Das Feld einer kurzen Spule à la Numerik

Im Allgemeinen können die Komponenten des Feldes einer Spule mit der parametrisierten Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{I}{R}\begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ a \end{pmatrix} \delta(\varrho - R)\delta(z - a\varphi)$$

(siehe Aufgabe 29) mit dem Biot-Savartschen Gesetz in der folgenden Form geschrieben werden:

$$B_x = \int\limits_{-L/(2a)}^{L/(2a)} \mathrm{d}\varphi' \frac{R(z - a\varphi')\cos\varphi' - a\varrho\sin\varphi + aR\sin\varphi'}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\varphi - \varphi') + (z - a\varphi')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

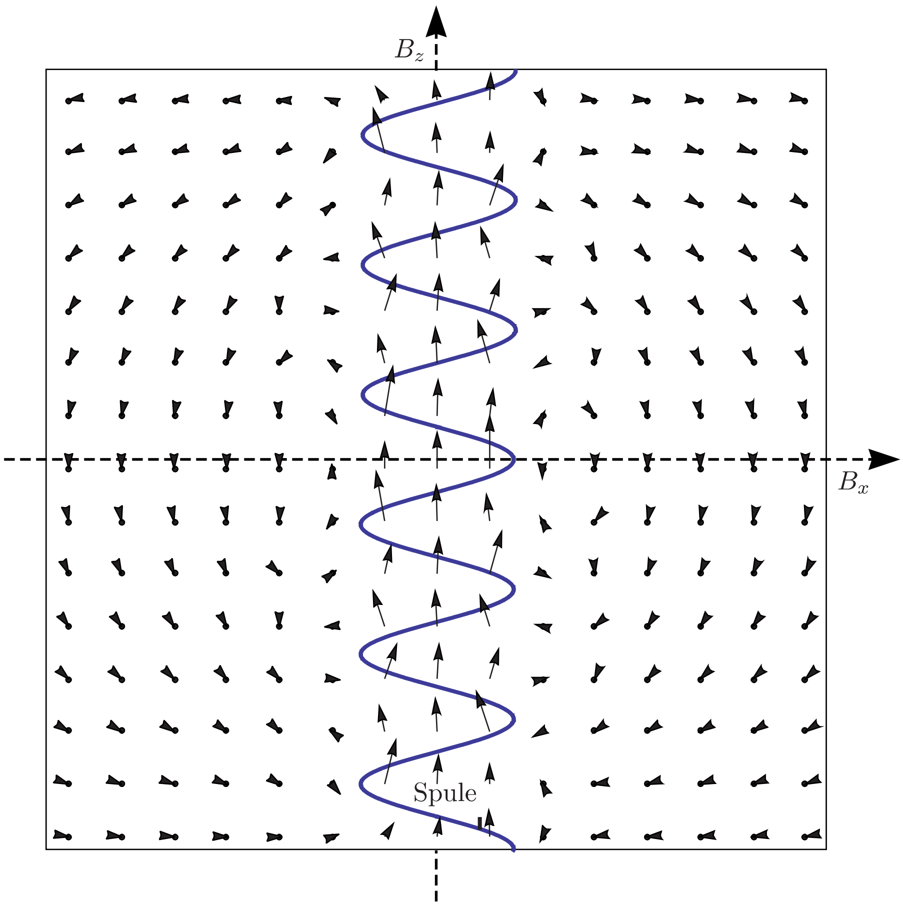
$$B_y = \int\limits_{-L/(2a)}^{L/(2a)} \mathrm{d}\varphi' \frac{R(z - a\varphi')\sin\varphi' + a\varrho\cos\varphi - aR\cos\varphi'}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\varphi - \varphi') + (z - a\varphi')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_z = \int\limits_{-L/(2a)}^{L/(2a)} \mathrm{d}\varphi' \frac{R(R - \varrho\cos(\varphi - \varphi'))}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\varphi - \varphi') + (z - a\varphi')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die auftretenden Integrale sind nicht exakt zu berechnen, womit das Problem numerisch angegangen werden muss. Dazu werden die Werte $L = 6\pi$, $R = 2$, $a = 0,5$ und $\varphi = 0$ gewählt. An der x-Achse sei B_x und an der z-Achse B_z aufgetragen. (Die Wahl $\varphi = 0$ ist konsistent mit der Tatsache, dass das Feld in der B_x-B_z-Ebene betrachtet wird.) Mittels `Mathematica` und der Befehlsfolge

```
<< Graphics‘PlotField‘
PlotVectorField[{NIntegrate[
   Bx /. {R -> 2, a -> 0.5, \[Phi] -> 0}, {\[Phi]1, -6*\[Pi]/2/0.5,
    6*\[Pi]/2/0.5}, WorkingPrecision -> 100],
  NIntegrate[
   Bz /. {R -> 2, a -> 0.5, \[Phi] -> 0}, {\[Phi]1, -6*\[Pi]/2/0.5,
    6*\[Pi]/2/0.5}, WorkingPrecision -> 100]}, {\[Rho], -6*\[Pi]/2,
  6*\[Pi]/2}, {z, -6*\[Pi]/2, 6*\[Pi]/2}, Axes -> True]
```

lässt sich damit ein Bild des numerisch berechneten Vektorfeldes erstellen. Man bekommt dann eine ungefähre Vorstellung davon, wie dieses aussieht:



Erkennbar ist auf jeden Fall, dass genau auf der Mittelachse der Spule (also der z-Achse) das **B**-Feld keineswegs homogen ist. Es gibt durchaus Abweichungen, auch wenn diese winzig klein sind. Diese Abweichungen rühren von der fehlenden Azimuthalsymmetrie der Spulenform her. Diese Inhomogenitäten des **B**-Feldes auf der z-Achse gewinnen umso mehr an Bedeutung, desto größer die Ganghöhe $2\pi a$ der Spule ist. Im Grenzfalle $a \mapsto \infty$ liegt prinzipiell ein unendlich langer Leiter entlang der z-Achse vor und dann gibt es natürlich überhaupt keine z-Komponente des **B**-Feldes mehr.