Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.2

Aufgabe 4

a.)

Es ist die zeitunabhängige Schrödingergleichung, also das Eigenwertproblem der Energie $H|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle$ zu lösen. Mit dem Hamiltonoperator $H = -1/2\hbar\omega\sigma_z$ folgen die Eigenwerte

$$E_{|+\rangle} = -\frac{1}{2}\hbar\omega\,, \quad E_{|-\rangle} = \frac{1}{2}\hbar\omega\,, \tag{1}$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,. \tag{2}$$

Der Grundzustand als Zustand niedrigster Energie ist gegeben durch

$$|\Psi_0\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,, \tag{3}$$

mit der zugehörigen Energie $E_{|+\rangle}$.

b.)

Die Eigenwerte von S_x sind gegeben durch $S_{|+\rangle_x} = 1$ und $S_{|-\rangle_x} = -1$ mit den zugehörigen Eigenzuständen

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\,, \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\,. \tag{4}$$

Bei $t < 0$ befindet sich das Teilchen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$. Dann wird bei $t = 0$ eine Messung von S_x durchgeführt. Wir drücken deshalb $|\Psi_0\rangle$ durch die Eigenvektoren von S_x aus:

$$|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)\,. \tag{5}$$

Dann ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, Zustände $|+\rangle_x$ und $|-\rangle_x$ zu messen, durch Projektion auf die jeweiligen Unterräume mit den Projektoren („Wahrscheinlichkeitsoperatoren“) $P_{|+\rangle_x} = |+\rangle_{xx}\langle+|$ und $P_{|-\rangle_x} = |-\rangle_{xx}\langle-|$.

$$W_{|+\rangle} = \langle+|P_{|+\rangle_x}|+\rangle = \langle+|+\rangle_{xx}\langle+|+\rangle = |_x\langle+|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{6}$$

bzw.

$$W_{|-\rangle} = \langle+|P_{|-\rangle_x}|+\rangle = \langle+|-\rangle_{xx}\langle-|+\rangle = |_x\langle-|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,. \tag{7}$$

Man misst also $|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = |+\rangle_x$ bzw. $|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = |-\rangle_x$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ und das System befindet sich unmittelbar nach der Messung im Zustand $|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = |+\rangle_x$ bzw. $|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = |-\rangle_x$. Für $0 < t < t_1$ entwickeln sich die Zustände nach der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Es gilt dann in der Basis der Eigenzustände von S_z:

$$|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)|+\rangle + \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)|-\rangle\right\}\,, \tag{8}$$

sofern $S_x = \hbar/2$ gemessen wurde und

$$|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)|+\rangle - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t\right)|-\rangle\right\}\,, \tag{9}$$

wenn $S_x = -\hbar/2$ gemessen wurde. Zum Zeitpunkt t_1 wird eine Messung von S_z durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dieses Mal durch Projektion mittels der Projektoren $P_{|+\rangle} = |+\rangle\langle+|$ bzw. $P_{|-\rangle} = |-\rangle\langle-|$:

$$W_{|+\rangle} = \langle\Psi_{1,S_x=\hbar/2}|P_{|+\rangle}|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = \langle\Psi_{1,S_x=\hbar/2}|+\rangle\langle+|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = |\langle+|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{10}$$

und

$$W_{|-\rangle} = \langle\Psi_{1,S_x=\hbar/2}|P_{|-\rangle}|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = \langle\Psi_{1,S_x=\hbar/2}|-\rangle\langle-|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle = |\langle-|\Psi_{1,S_x=\hbar/2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{11}$$

sofern bei der ersten Messung $S_x = \hbar/2$ gemessen wurde oder

$$W_{|+\rangle} = \langle\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}|P_{|+\rangle}|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = \langle\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}|+\rangle\langle+|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = |\langle+|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{12}$$

und

$$W_{|-\rangle} = \langle\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}|P_{|-\rangle}|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = \langle\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}|-\rangle\langle-|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle = |\langle-|\Psi_{1,S_x=-\hbar/2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{13}$$

wenn bei der ersten Messung $S_x = -\hbar/2$ gemessen wurde. Man misst also die Eigenwerte $S_z = \hbar/2$ bzw. $S_z - \hbar/2$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, unabhängig vom Ergebnis der zuvor durchgeführten Messung von S_x. Die Wahrscheinlichkeiten für Messung von Eigenwerten S_x und S_z ergeben sich durch Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten (Pfadregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung) und wir fassen die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammen:

1.Messung	2.Messung	gesamte Wahrscheinlichkeit
$\lvert+\rangle_x$	$\lvert+\rangle$	1/4
$\lvert+\rangle_x$	$\lvert-\rangle$	1/4
$\lvert-\rangle_x$	$\lvert+\rangle$	1/4
$\lvert-\rangle_x$	$\lvert-\rangle$	1/4

Andere Messergebnisse sind nicht möglich und wie erwartet ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins.

c.)

Wir verwenden den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right)\,. \tag{14}$$

Damit können wir $S_{z,H}$ sofort ausrechnen:

$$S_{z,H}(t) = U^\dagger(t)S_zU(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right)\frac{\hbar}{2}\sigma_z\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right) = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = S_z\,, \tag{15}$$

da $U(t)$ mit σ_z vertauscht. Um $S_{x,H}$ zu berechnen, schreiben wir $U(t)$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\right)^n\sigma_z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\right)^{2n}\sigma_z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\right)^{2n+1}\sigma_z^{2n+1} = \\ &= \mathbb{1}\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Nun zur Berechnung von $S_{x,H}(t)$:

$$\begin{aligned}
S_{x,H}(t) &= \frac{\hbar}{2}\left\{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right\}\sigma_x\left\{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right\} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\left\{\mathbb{1}\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right\}\left\{\sigma_x\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \sigma_y\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right\} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\left\{\sigma_x\cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) + 2\sigma_y\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \sigma_x\sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right\} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix}\cos^2(\omega/2t) - 2\mathrm{i}\sin(\omega/2t)\cos(\omega/2t) \\ -\sin^2(\omega/2t)\end{matrix} \\ \begin{matrix}\cos^2(\omega/2t) + 2\mathrm{i}\sin(\omega/2t)\cos(\omega/2t) \\ -\sin^2(\omega/2t)\end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ \exp(\mathrm{i}\omega t) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{17}$$

d.)

Siehe Musterlösung :-)
Etwas zur Interpretation: Das symmetrisierte Matrixelement, das man hier berechnen soll, ist eine Korrelationsfunktion in der Zeit und beschreibt Korrelationen der x-Komponente des Spins zu Zeiten 0 und t_1 im Grundzustand. Korrelationen zwischen zwei Größen können (müssen aber nicht) einen Hinweis darauf liefern, ob ein kausalar Zusammenhang zwischen diesen Größen besteht.
Der symmetrisierte Ausdruck hat die Haupteigenschaften einer klassischen Autokorrelationsfunktion bezüglich der Zeit (und ist außerdem reell), der unsymmetrisierte jedoch nicht. (Dieser ist nicht einmal eine Messgröße, weil dessen Ergebnis komplex ist.) Eine Autokorrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit einer Funktion mit der zugeordneten Funktion mit verschobenem Argument.
Im Gleichgewicht sollte die Korrelation für vergangene Zeiten und für zukünftige Zeiten dieselbe sein, wenn nur der Zeitabstand zu $t = 0$ gleich ist. Dies wird durch die Symmetrisierung gewährleistet.

Aufgabe 5

Ein quantenmechanisches System befinde sich in einem Zustand $|\Psi\rangle$, der nicht notwendigerweise Eigenzustand $|\varphi_n\rangle$ des Hamiltonoperators sein muss. Dieser Zustand $|\Psi\rangle$ kann jedoch nach Eigenzuständen entwickelt werden:

$$|\Psi\rangle \sum_n C_n|\varphi_n\rangle\,, \tag{18}$$

wobei die C_n zunächst noch unbekannte Entwicklungskoeffizienten sind. Die Wahrscheinlichkeit W_m, dass sich das System im Eigenzustand $|\varphi_m\rangle$ befindet, ist gegeben durch das Betragsquadrat des Koeffizienten C_m, also $W_m = |C_m|^2$. Das gesuchte Betragsquadrat $|C_m|^2$ ist der Erwartungswert des Projektors („Wahrscheinlichkeitsoperators“) des jeweiligen Unterraums, der durch den gesuchten Zustand $|\varphi_m\rangle$ aufgespannt wird. Dieser Projektor ist gegeben durch $P_m = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$ und man erhält dann:

$$\langle\Psi|P_m|\Psi\rangle = \langle\Psi|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|\Psi\rangle = \left|\langle\varphi_m|\left(\sum_n C_n|\varphi_n\rangle\right)\right|^2 = \left|\sum_n C_n\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle\right|^2 = \left|\sum_n C_n\delta_{mn}\right|^2 = |C_m|^2\,. \tag{19}$$

Bei einem Mehrteilchensystem funktioniert das Ganze analog. Ein Mehrteilchen-Eigenzustand $|\varphi_{n_1,n_2,\ldots}\rangle$ wird geschrieben als Tensorprodukt von Einteilchenzuständen $|\varphi_{n_1}\rangle$, $|\varphi_{n_2}\rangle$, … (wobei durch die Indizes n_1, n_2, … die Zustände unterschieden werden):

$$|\varphi_{n_1,n_2,\ldots}\rangle = |\varphi_{n_1}\rangle \otimes |\varphi_{n_2}\rangle \otimes \ldots \equiv |\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots\rangle\,. \tag{20}$$

In der zuletzt aufgeführten Form schreibt man üblicherweise einen solchen Zustand auf. (In dieser Kurzschreibweise kann man die Tensorproduktzeichen „$\otimes$“ weglassen und muss nicht jeden Einteilchenzustand komplett ausschreiben.) Ein beliebiger Zustand lässt sich dann nach diesen Mehrteilchenzuständen entwickeln:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1,n_2,\ldots} C_{n_1,n_2,\ldots}|\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\ldots\rangle\,. \tag{21}$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das m-te Teilchen im Zustand $|\varphi_m\rangle$ befindet, benötigt man den Projektor auf den Unterraum, der von den Zuständen $|\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\ldots\varphi_m\ldots\rangle$ aufgespannt wird. Der aufgespannte Unterraum ist eine Linearkombination der eben aufgeführten Zuständen mit allen möglichen n_1, n_2, … (wobei m festgehalten wird):

$$P_{n_1,n_2,\dots} = \sum_{n_1,n_2,\dots} |\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\dots\rangle\langle\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\dots| \,. \tag{22}$$

a.)

Wir messen die z-Komponente des Spins. Der Projektor auf den Zustand $|+\rangle$ des ersten Spins ist gegeben durch

$$P_{1,z}(+) = |+,+\rangle\langle +,+| + |+,-\rangle\langle +,-| \,, \tag{23}$$

und der auf den Zustand $|-\rangle$ des ersten Spins:

$$P_{1,z}(-) = |-,+\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-| \,. \tag{24}$$

Die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt $t = 0$ den Eigenwert $-\hbar/2$ von $S_{1,z}$ zu messen, ergibt sich als Erwartungswert des Projektors $P_{1,z}$:

$$W_{1,-\hbar/2} = \langle\Psi|P_{1,z}(-)|\Psi\rangle \,, \quad |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+,+\rangle + \frac{1}{2}|+,-\rangle + \frac{1}{2}|-,-\rangle \,. \tag{25}$$

Damit ergibt sich also:

$$\begin{aligned} W_{1,-\hbar/2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +,+| + \frac{1}{2}\langle +,-| + \frac{1}{2}\langle -,-|\right)\{|-,+\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-|\}\times \\ &\quad\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+,+\rangle + \frac{1}{2}|+,-\rangle + \frac{1}{2}|-,-\rangle\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +,+| + \frac{1}{2}\langle +,-| + \frac{1}{2}\langle -,-|\right)\frac{1}{2}|-,-\rangle = \boxed{\frac{1}{4}\,.} \end{aligned} \tag{26}$$

Das System befindet sich nach der Messung im Zustand, auf den der Projektor $P_{1,z}(-)$ projiziert hat. In diesem Falle ist das der Zustand $|-,-\rangle$.

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass der Spin des ersten Teilchens in x-Richtung den Wert $\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ hat, benötigen wir die Projektoren auf die jeweiligen Unterräume:

$$P_{1,x}(+) = |+,+\rangle_{xx}\langle +,+| + |+,-\rangle_{xx}\langle +,-| \,, \tag{27}$$

bzw.

$$P_{1,x}(-) = |-,-\rangle_{xx}\langle -,-| + |-,+\rangle_{xx}\langle -,+| \,. \tag{28}$$

Wir stellen die Zwei-Spin-Zustände als Tensorprodukt von Ein-Spin-Zuständen dar und drücken diese über die Eigenzustände des Spinoperators in z-Richtung aus:

$$|+,+\rangle_x = |+\rangle_x \otimes |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{2}(|+,+\rangle + |+,-\rangle + |-,+\rangle + |-,-\rangle) \,, \tag{29}$$

$$|+,-\rangle_x = |+\rangle_x \otimes |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \frac{1}{2}(|+,+\rangle - |+,-\rangle + |-,+\rangle - |-,-\rangle) \,. \tag{30}$$

Berechnen wir nun die Projektoren. Dazu zum ersten Term:

$$\begin{aligned} [P_{1,x}(\pm)]_{\text{Term 1}} &= \frac{1}{2}(|+,+\rangle \pm |+,-\rangle \pm |-,+\rangle + |-,-\rangle)\frac{1}{2}(\langle +,+| \pm \langle +,-| \pm \langle -,+| + \langle -,-|) = \\ &= \frac{1}{4}\Big\{|+,+\rangle\langle +,+| \pm |+,+\rangle\langle +,-| \pm |+,+\rangle\langle -,+| + |+,+\rangle\langle -,-| \\ &\qquad \pm |+,-\rangle\langle +,+| + |+,-\rangle\langle +,-| + |+,-\rangle\langle -,+| \pm |+,-\rangle\langle -,-| \\ &\qquad \pm |-,+\rangle\langle +,+| + |-,+\rangle\langle +,-| + |-,+\rangle\langle -,+| \pm |-,+\rangle\langle -,-| \\ &\qquad + |-,-\rangle\langle +,+| \pm |-,-\rangle\langle +,-| \pm |-,-\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-|\Big\} \,, \end{aligned} \tag{31}$$

und zum zweiten:

$$\begin{aligned}
[P_{1,x}(\pm)]_{\text{Term 2}} &= \frac{1}{2}(|+,+\rangle \mp |+,-\rangle \pm |-,+\rangle - |-,-\rangle)\frac{1}{2}(\langle +,+| \mp \langle +,-| \pm \langle -,+| - \langle -,-|) = \\
&= \frac{1}{4}\Big\{ |+,+\rangle\langle +,+| \mp |+,+\rangle\langle +,-| \pm |+,+\rangle\langle -,+| - |+,+\rangle\langle -,-| \\
&\qquad \mp |+,-\rangle\langle +,+| + |+,-\rangle\langle +,-| - |+,-\rangle\langle -,+| \pm |+,-\rangle\langle -,-| \\
&\qquad \pm |-,+\rangle\langle +,+| - |-,+\rangle\langle +,-| + |-,+\rangle\langle -,+| \mp |-,+\rangle\langle -,-| \\
&\qquad - |-,-\rangle\langle +,+| \pm |-,-\rangle\langle +,-| \mp |-,-\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-| \Big\} . \qquad (32)
\end{aligned}$$

Die Summe beider Term ist der gesuchte Projektor:

$$\begin{aligned}
P_{1,x}(\pm) = \frac{1}{2}\Big\{ &\Big(|+,+\rangle\langle +,+| \pm |+,+\rangle\langle -,+| \Big) + \Big(|-,+\rangle\langle -,+| \pm |-,+\rangle\langle +,+| \Big) \\
&+ \Big(|+,-\rangle\langle +,-| \pm |+,-\rangle\langle -,-| \Big) + \Big(|-,-\rangle\langle -,-| \pm |-,-\rangle\langle +,-| \Big) \Big\} . \qquad (33)
\end{aligned}$$

Unser System befindet sich wegen der ersten Messung immer noch im Zustand $|-,-\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit, in x-Richtung einen Spin von $\pm\hbar/2$ zu messen, ergibt sich als Erwartungswert des Projektors $P_{1,x}(\pm)$ bezüglich des Zustandes $|-,-\rangle$:

$$\langle -,-|P_{1,x}(\pm)|-,-\rangle = \pm\frac{1}{2}\langle -,-|+,-\rangle + \frac{1}{2}\langle -,-|-,-\rangle = \boxed{\frac{1}{2}\,.} \qquad (34)$$

Die Wahrscheinlichkeit ist somit 1/2, unabhängig vom Vorzeichen der Spineinstellung in x-Richtung.

b.)

Wir unterscheiden die vier möglichen auftretenden Fälle:

1.) Beide Spins gleich und positiv: $\hbar/2$:

$$P_{\hbar/2,\hbar/2} = |+,+\rangle\langle +,+| \,, \qquad (35)$$

$$W_{\hbar/2,\hbar/2} = \langle \Psi|P_{\hbar/2,\hbar/2}|\Psi\rangle = \langle \Psi|+,+\rangle\langle +,+|\Psi\rangle = \boxed{\frac{1}{2}\,.} \qquad (36)$$

2.) Erster Spin $\hbar/2$, zweiter Spin $-\hbar/2$:

$$P_{\hbar/2,-\hbar/2} = |+,-\rangle\langle +,-| \,, \qquad (37)$$

$$W_{\hbar/2,-\hbar/2} = \langle \Psi|P_{\hbar/2,-\hbar/2}|\Psi\rangle = \langle \Psi|+,-\rangle\langle +,-|\Psi\rangle = \boxed{\frac{1}{4}\,.} \qquad (38)$$

3.) Erster Spin $-\hbar/2$, zweiter Spin $\hbar/2$:

$$P_{-\hbar/2,\hbar/2} = |-,+\rangle\langle -,+| \,, \qquad (39)$$

$$W_{-\hbar/2,\hbar/2} = \langle \Psi|P_{-\hbar/2,\hbar/2}|\Psi\rangle = \langle \Psi|-,+\rangle\langle -,+|\Psi\rangle = \boxed{0\,.} \qquad (40)$$

4.) Beide Spins gleich und negativ: $-\hbar/2$

$$P_{-\hbar/2,-\hbar/2} = |-,-\rangle\langle -,-| \,, \qquad (41)$$

$$W_{-\hbar/2,-\hbar/2} = \langle \Psi|P_{-\hbar/2,-\hbar/2}|\Psi\rangle = \langle \Psi|-,-\rangle\langle -,-|\Psi\rangle = \boxed{\frac{1}{4}\,.} \qquad (42)$$

Somit ist die gesamte Wahrscheinlichkeit, dass beide Spins denselben Wert haben, gleich 3/4 und die Wahrscheinlichkeit für unterschiedlichen Spinwerte beträgt 1/4.

Aufgabe 6

a.)

Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird bestimmt über den Zeitentwicklungsoperator

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu_B B_0 \sigma_z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mu_B B_0 \sigma_z\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\mathrm{i}^{2n}\left(\frac{\mu_B B_0}{\hbar}\right)^{2n}\sigma_z^{2n} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\mathrm{i}^{2n}\left(\frac{\mu_B B_0}{\hbar}\right)^{2n+1}\sigma_z^{2n+1} = \\ &= \cos\left(\frac{\mu_B B_0}{\hbar}\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\mu_B B_0}{\hbar}\right)\sigma_z = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\mu_B B_0/\hbar) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\mu_B B_0/\hbar) \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{43}$$

b.)

Die Transformation lautet:

$$\psi'(t) = U^\dagger \psi(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t \sigma_z\right)\psi(t) . \tag{44}$$

Daraus folgt die Schrödingergleichung für diesen Zustand $\psi'(t)$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(U^\dagger\psi(t)) = (U^\dagger H U)[U^\dagger\psi(t)] + \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger\right)U(U^\dagger\psi(t)) := H'[U^\dagger\psi(t)] . \tag{45}$$

Wir führen nun die unitäre Transformation des Hamiltonoperators durch:

$$H_1'\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger\right)U = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z , \tag{46}$$

$$\begin{aligned} H_2' &= U^\dagger H_2 U = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right)\sigma_x\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right) = \\ &= \left\{\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_z\right\}\sigma_x\left\{\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_z\right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_x - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_x + 2\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_y = \\ &= \cos(\omega t)\sigma_x + \sin(\omega t)\sigma_y , \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} H_3' &= U^\dagger H_3 U = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right)\sigma_y\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t\sigma_z\right) = \\ &= \left\{\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_z\right\}\sigma_y\left\{\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_z\right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_y - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_y - 2\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)\sigma_x = \\ &= \cos(\omega t)\sigma_y - \sin(\omega t)\sigma_x , \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} H' &= U^\dagger(H_1 + H_2 + H_3)U = \\ &= -\mu_B B_0\sigma_z - \mu_B B_1\left\{\cos^2(\omega t)\sigma_x + \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sigma_y - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sigma_y + \sin^2(\omega t)\sigma_x\right\} = \\ &= -\mu_B B_0\sigma_z - \mu_B B_1\sigma_x = \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x , \end{aligned} \tag{49}$$

mit der Larmorfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2\mu_B B_0}{\hbar} , \tag{50}$$

und der Rabifrequenz

$$\Omega = \frac{2\mu_B B_1}{\hbar} . \tag{51}$$

c.)

Im Resonanzfall, also bei $\omega = \omega_0$, ist die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H' \psi(t)\,, \quad H' = -\frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x\,, \tag{52}$$

zu lösen. Deren Lösung ist gegeben durch:

$$\psi(t) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\sigma_x t\right)\psi(0) = \left\{\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_x\right\}\psi(0)\,. \tag{53}$$

Berechnen wir die Erwartungswerte in x-, y- und z-Richtung:

$$\begin{aligned}
\langle S_y\rangle(t) &= \frac{\hbar}{2}\left\langle\Psi(0)\right|\left\{\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_x\right\}\sigma_y\left\{\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_x\right\}\left|\Psi(0)\right\rangle = \\
&= \frac{\hbar}{2}\left\langle\Psi(0)\right|\left\{\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_x\right\}\left\{\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_y + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\sigma_z\right\}\left|\Psi(0)\right\rangle = \\
&= \frac{\hbar}{2}\langle\Psi(0)|\{\cos(2\omega t)\sigma_y + \sin(2\omega t)\sigma_z\}|\Psi(0)\rangle = \\
&= \cos(2\omega t)\langle S_y\rangle(0) + \sin(2\omega t)\langle S_z\rangle(0)\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

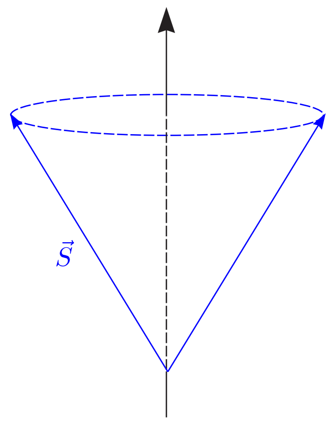
Analog folgt:

$$\langle S_z\rangle(t) = \cos(2\omega t)\langle S_z\rangle(0) - \sin(2\omega t)\langle S_y\rangle(0)\,, \tag{55}$$

und

$$\langle S_x\rangle(t) = \langle S_x\rangle(0)\,. \tag{56}$$

Daraus lesen wir ab, dass der Spinvektor in x-Richtung konstant bleibt, in y- und z-Richtung jedoch oszilliert. Der Spin vollführt also eine Präzessionsbewegung (analog zum Drehimpuls beim klassischen Kreisel) durch:



Führen wir die inverse Transformation (zurück ins Laborsystem durch), so erkennt man, dass der Präzessionsbewegung um die z-Achse eine langsame Oszillation der z-Komponente des Spins (Rabi-Oszillation) überlagert ist. Der Spinvektor bewegt sich dann entlang einer Kugeloberfläche: