

LÖSUNGSVORSCHLAG ZUM ÜBUNGSBLATT NR.4

Aufgabe 10

Der allgemeine Gruppenbegriff

Eine Gruppe \mathcal{G} ist eine Menge mit einer Verknüpfung \circ (Gruppenverknüpfung), so dass folgende Eigenschaften gelten:

- 1.) Abgeschlossenheit bezüglich der Gruppenverknüpfung: Aus $g_1 \circ g_2 = g_3$ folgt $g_3 \in \mathcal{G}$, sofern $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$.
- 2.) Assoziativität bezüglich der Verknüpfung \circ : $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = g_1 \circ g_2 \circ g_3$.
- 3.) Existenz eines neutralen Elements e bezüglich \circ : $g \circ e = e \circ g = g$.
- 4.) Existenz eines inversen Elements g^{-1} bezüglich \circ : $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Ist die Gruppenverknüpfung zusätzlich noch kommutativ, gilt also $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, so handelt es sich um eine **kommutative** oder auch **abelsche** Gruppe. Das Besondere an einer Liegruppe ist, dass ihr zusätzlich eine **topologische Struktur** zugrunde liegt.

Die Gruppe $SU(N)$ und speziell die $SU(2)$

Im Folgenden werden die Liegruppe $SU(N)$ betrachten, der sowohl in der Teilchen- als auch der Festkörperphysik eine große Rolle zukommt. Bei der $SU(N)$ (spezielle unitäre Gruppe in N Dimensionen) handelt es sich um die Menge aller $N \times N$ -Matrizen Z mit $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}_2$ (unitär!) und $\det(U) = 1$ (dafür steht das Attribut „speziell“). Man kann ein Element U der Gruppe schreiben in der Form

$$U = \exp\left(-i \sum_a \theta^a T^a\right), \quad (1)$$

wobei T^a die sogenannten **Generatoren** der Gruppe und θ^a ($a = 1, 2, \dots$, Anzahl der Generatoren) Parameter sind. (Die θ^a spannen den Parameterraum der Gruppe auf.) Die Generatoren sind somit Objekte, welche solche Gruppenelemente erzeugen können. Deshalb werden sie manchmal auch als **Erzeugende** bezeichnet.

Im Allgemeinen besitzt die Gruppe $SU(N)$ $N^2 - 1$ Generatoren. Woher kommt das? Schauen wir uns dazu an, welche Eigenschaften die Generatoren erfüllen müssen. Aus (1) folgt das hermitesch konjugierte Element

$$U^\dagger = \exp\left(i \sum_a \theta^a (T^\dagger)^a\right), \quad (2)$$

wenn wir annehmen, dass sich die Liegruppe reell ($\theta^a = (\theta^*)^a$) parametrisieren lässt. (Komplexe Anteile stecken in den Generatoren.) Um die Gruppeneigenschaft $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}_N$ zu erfüllen, muss

$$\exp\left(i \sum_a \theta^a (T^a - (T^\dagger)^a)\right) \stackrel{!}{=} \mathbb{1}_N, \quad (3)$$

gelten und dies ist genau dann der Fall, wenn $T = T^\dagger$ ist, die Generatoren also hermitesch sind. Aus der zweiten Bedingung $\det(U) = 1$ folgt mit $\det(\exp(U)) = \exp(\text{Sp}(U))$ (wobei „Sp“ für die Spur der Matrix steht, also die Summe der Diagonalelemente):

$$\det\left\{\exp\left(i \sum_a \theta^a T^a\right)\right\} = \exp\left\{\text{Sp}\left(i \sum_a \theta^a T^a\right)\right\} = \exp\left\{i \sum_a \theta^a \text{Sp}(T^a)\right\} \stackrel{!}{=} 1, \quad (4)$$

was mit $\text{Sp}(T^a) = 0$ gilt, also sofern die Generatoren spurlos sind. Eine komplexe spurlose $N \times N$ -Matrix, die dazu noch hermitesch sein soll, hat gerade $N^2 - 1$ freie Parameter (Übung :-)

Die Generatoren T^a genügen einer sogenannten **Liealgebra**. Zur Bildung einer Liealgebra benötigt man eine Verknüpfung \circ , die linear bezüglich Addition und Multiplikation mit einer Konstanten ist,

$$(\alpha a + \beta b) \circ c = \alpha(a \circ c) + \beta(b \circ c), \quad (5)$$

antisymmetrisch ist

$$a \circ b = -b \circ a, \quad (6)$$

und die Jacobi-Identität erfüllt:

$$a \circ b \circ c + b \circ c \circ a + c \circ a \circ b = 0. \quad (7)$$

Eine Verknüpfung, die das leistet, ist der bereits aus den Grundlagen der Quantenmechanik wohlvertraute Kommutator $[\bullet, \bullet]$ (Übung :-). Für zwei Generatoren T^a, T^b einer Liegruppe gilt also

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^{N^2-1} f^{abc} T^c, \quad (8)$$

wobei T^c ein weiterer Generator ist. Die f^{abc} bezeichnet man als Strukturkonstanten; diese sind charakteristisch für eine bestimmte Gruppe. Genau eine solche Beziehung (8) bezeichnet man als Liealgebra.

Zu jeder Liegruppe gibt es sogenannte **Darstellungen**. Eine Darstellung ist eine Abbildung r von Gruppenelementen g auf komplexe $n \times n$ -Matrizen M , also

$$r : \mathcal{G} \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{C}, n), g \mapsto M(g), \quad (9)$$

so dass sich diese $n \times n$ -Matrizen multiplikativ so verhalten wie die Gruppenelemente. Gilt also $g_1 \circ g_2 = g_3$, dann folgt daraus

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(g_1) M_{jk}(g_2) = M_{ik}(g_1 \circ g_2) = M_{ik}(g_3). \quad (10)$$

Eine Darstellung (bzw. der Darstellungsraum $V^{(j)}$) heißt irreduzibel, wenn V als invariante Unterräume nur den Nullraum $\{0\}$ und V selbst hat. Invariante Unterräume sind Räume, die durch Anwenden von Gruppenoperationen unter sich selbst transformieren, also immer nur Elemente ihres eigenen Raums erzeugen.

Nun zur Liegruppe $SU(2)$! Dabei handelt es sich um die Menge aller unitären 2×2 -Matrizen U mit Determinante eins. Eine solche Matrix lässt sich in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a^* & b \\ -b^* & a \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (11)$$

schreiben, wobei a und b komplexe Zahlen sind. (Man kann nachrechnen, dass eine solche Matrix die Eigenschaften $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}_2$ und $\det(U) = 1$ erfüllt.) Setzt man nun $a = r + is$ und $b = x + iy$ an, so ergibt sich aus $|a|^2 + |b|^2 = 1$:

$$r^2 + s^2 + x^2 + y^2 = 1, \quad (12)$$

was die Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel beschreibt. Diese Oberfläche bezeichnet man auch als Sphäre S^3 (wobei die „3“ die Dimensionalität der Oberfläche (Hyperfläche) angibt, die um eins niedriger ist als die Dimension der Kugel selbst.) Diese Sphäre ist die topologische Struktur, welche der $SU(2)$ innewohnt. Die Liegruppe $SU(2)$ besitzt $2^2 - 1 = 3$ Generatoren. Diese sind die Paulimatrizen (dividiert durch 2, wobei dieser Vorfaktor Konvention ist):

$$[T_i, T_j] = i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} T_k, \quad T_i = \frac{\sigma_i}{2}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Man kann nachprüfen, dass die $\sigma_i/2$ hermitesch und spurlos sind (Übung :-). Die Strukturkonstanten der $SU(2)$ sind also (bis auf einen Faktor i) gegeben durch den total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \text{ zyklisch aus } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ antizyklisch aus } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (14)$$

Die Gruppe des Gesamtdrehimpulses J ist die $SU(2)$. Speziell im Falle der $SU(2)$ ist die Eigenschaft von invarianten Unterräumen, dass sie mittels der Auf- und Absteigeoperatoren J_\pm nur unter sich selbst transformieren. Man kommt also nicht aus dem Raum heraus, wenn man die J_\pm anwendet. Die Vektoren $|j, m\rangle$ (mit $m = j$,

$j - 1, \dots, -j$) bilden die Basis einer irreduziblen Darstellung $V^{(j)}$, wobei j die Werte $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ annehmen kann. Ein jeder solchen Darstellungsraum besitzt die Dimension $2j + 1$. Zur Wiederholung:

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle, \quad (15a)$$

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle, \quad (15b)$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle. \quad (15c)$$

Irreduzibilität bedeutet hier also gerade, dass sich j nicht ändert, wenn man J_\pm auf einen Vektor $|j, m\rangle$ anwendet, sondern nur m .

Koppelt man verschiedene Drehimpulse j_1 und j_2 miteinander, die jeweils in den Räumen $\mathcal{H}^{(j_1)}$ bzw. $\mathcal{H}^{(j_2)}$ gegeben sind, so leben die gekoppelten Drehimpulse im Produktraum $\mathcal{H}^{(j_1)} \otimes \mathcal{H}^{(j_2)}$. Dieser Produktraum lässt sich schreiben als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen:

$$\mathcal{H}^{(j_1)} \otimes \mathcal{H}^{(j_2)} = (j_1 + j_2) \oplus (j_1 + j_2 - 1) \oplus \dots \oplus |j_1 - j_2|. \quad (16)$$

Beispielsweise wird die erste irreduzible Darstellung $(j_1 + j_2)$ von $2(j_1 + j_2) + 1$ Zustandsvektoren $\{|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle, |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, \dots, |j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle\}$ aufgespannt. Im Allgemeinen spricht man von einer $D^{(j)}$ -Darstellung. Diese Darstellungsräume transformieren sich (wie oben erwähnt) unter sich selbst. Die direkte Summe drückt im Wesentlichen aus, dass die Darstellungen zu einer blockdiagonalen Matrix zusammengefasst werden:

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i/2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & J_i^{(1)} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & J_i^{(3/2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Hierbei sind $\sigma_i/2$ die Generatoren der Spin-1/2-Darstellung, die $J_i^{(1)}$ die Generatoren der Spin-1-Darstellung (das sind die Matrizen, die in der Aufgabe angegeben sind), $J_i^{(3/2)}$ die Generatoren der Spin-3/2-Darstellung usw. Die Spin-1/2-Darstellung wirkt nur auf zwei Vektoren (die man als Eigenvektoren der Matrix σ^3 wählt),

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

während die Spin-1-Darstellung auf die Vektoren des Triplets

$$|1, 1\rangle = |+, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = |-, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

wirkt usw. Die direkte Summe erweitert im Wesentlichen einen Darstellungsraum und füllt die Basisvektoren durch Nullen auf. Beispielsweise gilt für die Kopplung zweier Spin-1/2:

$$\mathcal{H}^{(1/2)} \otimes \mathcal{H}^{(1/2)} = 1 \oplus 0, \quad (20)$$

und dieser Darstellungsraum $1 \oplus 0$ wird die durch Vektoren

$$|1, 1\rangle = |+, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (21a)$$

$$|1, -1\rangle = |-, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21b)$$

Aufgabe 11

a.)

Dies haben wir bereits in Aufgabe 7 gemacht:

$$|1, 1\rangle = |+, +\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle), \quad |1, -1\rangle = |-, -\rangle, \quad (22)$$

als die symmetrischen Tripletzustände und den antisymmetrischen Singulettzustand

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle). \quad (23)$$

b.)

Die sogenannten Clebsch-Gordon-Koeffizienten $C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2}$ beschreiben im Wesentlichen einen Basiswechsel von Eigenzuständen $|S, M\rangle$ und Eigenzuständen $|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$. Dazu schieben wir den Einsoperator

$$\mathbb{1} = \sum_{m_1, m_2} |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle \langle s_1, s_2; m_1, m_2|, \quad (24)$$

ein und erhalten:

$$|S, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle \langle s_1, s_2; m_1, m_2|S, M\rangle \equiv \sum_{m_1, m_2} C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2} |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle, \quad (25)$$

mit den Clebsch-Gordon-Koeffizienten

$$C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2} \equiv \langle s_1, s_2; m_1, m_2|S, M\rangle. \quad (26)$$

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten, für die $M \neq m_1 + m_2$ gilt, verschwinden. Es gilt nun

$$|S, M\rangle = |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle, \quad m_1 + m_2 = M, \quad (27)$$

also

$$C_{M=m_1+m_2, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2} = 1. \quad (28)$$

Wenden wir den Absteigeoperator $J_- = J_{1,-} + J_{2,-}$ auf (27) an, so ergibt sich für die linke Seite der Gleichung

$$J_- |S, M\rangle = \hbar \sqrt{S(S+1) - M(M-1)} |S, M-1\rangle, \quad (29)$$

und für die rechte Seite

$$(J_{1,-} + J_{2,-}) |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle = \hbar \sqrt{s_1(s_1+1) - m_1(m_1-1)} |s_1, s_2; m_1-1, m_2\rangle \\ + \hbar \sqrt{s_2(s_2+1) - m_2(m_2-1)} |s_1, s_2; m_1, m_2-1\rangle. \quad (30)$$

Damit gilt also

$$C_{M-1, m_1-1, m_2}^{S, s_1, s_2} = \sqrt{\frac{s_1(s_1+1) - m_1(m_1-1)}{S(S+1) - M(M-1)}}, \quad C_{M-1, m_1, m_2-1}^{S, s_1, s_2} = \sqrt{\frac{s_2(s_2+1) - m_2(m_2-1)}{S(S+1) - M(M-1)}}. \quad (31)$$

Auch hier gilt $M' = m'_1 + m'_2$ mit $M' = M - 1$ und $m'_1 = m_1 - 1$ bzw. $m'_2 = m_2 - 1$. Dies ist bei jedem Schritt so, da auf der linken Seite M immer um Eins erniedrigt wird und auf der rechten Seite m_1 bzw. m_2 um Eins erniedrigt werden. Somit tragen nur die Clebsch-Gordon-Koeffizienten für $M = m_1 + m_2$ bei; alle anderen verschwinden. Deshalb kann man die obige Summe von vorn herein auf $M = m_1 + m_2$ einschränken und man erhält

$$|S, M\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=M}} |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle \langle s_1, s_2; m_1, m_2|S, M\rangle \equiv \sum_{m_1, m_2} C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2} |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle. \quad (32)$$

Im Prinzip können wir die Clebsch-Gordon-Koeffizienten aus Aufgabenteil (a) einfach ablesen. Wir wollen diese jedoch mittels der eben angegebenen Technik berechnen. Für den ersten Zustand gilt

$$|1, 1\rangle = |+, +\rangle, \quad (33)$$

wobei wir direkt

$$\boxed{\langle +, + | 1, 1 \rangle = C_{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 1,} \quad (34)$$

ablesen. Als nächstes wenden wir den Absteigeoperator $J_- = J_{1,-} + J_{2,-}$ auf den ersten Zustand an:

$$J_- |1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle, \quad (35a)$$

$$(J_{1,-} + J_{2,-}) |+, +\rangle = J_{1,-} |+, +\rangle + J_{2,-} |+, +\rangle = \hbar |-, +\rangle + \hbar |+, -\rangle, \quad (35b)$$

woraus sich dann ergibt:

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, +\rangle + |+, -\rangle). \quad (36)$$

Jetzt können wir direkt ablesen:

$$\boxed{\langle -, + | 1, 0 \rangle = C_{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle +, - | 1, 0 \rangle = C_{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (37)$$

Wenden wir den Absteigeoperator $J_- = J_{1,-} + J_{2,-}$ erneut auf $|1, 0\rangle$ an, folgt:

$$J_- |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, -1\rangle, \quad (38a)$$

$$(J_{1,-} + J_{2,-}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, +\rangle + |+, -\rangle) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{2,-} |-, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} J_{1,-} |+, -\rangle = \hbar\sqrt{2} |-, -\rangle, \quad (38b)$$

woraus

$$|1, -1\rangle = |-, -\rangle, \quad (39)$$

folgt und somit

$$\boxed{\langle -, - | 1, -1 \rangle = C_{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 1.} \quad (40)$$

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten zum Gesamtspin $S = 0$ erhalten wir nicht durch Anwenden eines Absteigeoperators J_- , weil dieser nur auf die m -Quantenzahlen wirkt. Man setzt deshalb eine allgemeine Linearkombination der Form

$$|0, 0\rangle = \alpha |+, -\rangle + \beta |-, +\rangle, \quad (41)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten α und β an. Dieser Zustand muss senkrecht auf $|1, 0\rangle$ stehen, also $\langle 1, 0 | 0, 0 \rangle = 0$ gelten. Hieraus folgt dann $\alpha = -\beta$ und nach Normierung erhalten wir:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, +\rangle - |+, -\rangle), \quad (42)$$

also

$$\boxed{\langle -, + | 0, 0 \rangle = C_{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle +, - | 0, 0 \rangle = C_{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (43)$$

Alle anderen Clebsch-Gordon-Koeffizienten verschwinden.

Aufgabe 12

Die Wechselwirkung von Atomen mit elektromagnetischer Strahlung wird beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}), \quad (44)$$

wobei V das Potential (des Atomkerns), \mathbf{A} das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. e ist die Elementarladung. In der Dipolnäherung nähert man die Potentiale durch die am Punkte \mathbf{r}_0 , welches die Position des Atoms angibt, an:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \approx \Phi(\mathbf{r}_0, t). \quad (45)$$

Die Physik ändert sich nicht unter einer Eichtransformation des Viererpotentials, also

$$A^\mu \mapsto \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

wobei wir

$$\lambda = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{t_0}^t \Phi(\mathbf{r}_0, t) dt, \quad (47)$$

wählen. Dies geschieht, weil dann in den separaten Transformationen

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \quad \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \Phi(\mathbf{r}_0, t) + \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (48)$$

die Terme $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$ und $\Phi(\mathbf{r}, t) - \Phi(\mathbf{r}_0, t)$ auftreten, die man in der Dipolnäherung vernachlässigt. Daraus folgt dann der Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = H_0 + H_I, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad H_I = e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad (49)$$

folgt. Es sei nun $\mathbf{r}_0 = 0$ (Verschiebung des Koordinatensystems, so dass der Ursprung am Ort des Wasserstoffatoms liegt). Wenn \mathbf{e} der Polarisationsvektor der Strahlung ist, folgt die angegebene Formel.

c.)

Physikalisch ist es einsichtig, dass nur Übergänge $|2, 1, m\rangle \mapsto |1, 0, 0\rangle$ bei Zuständen $|2, 1, m\rangle$ mit $m \in \{-1, 0, 1\}$ stattfinden. In der Aufgabe wird die Dipolnäherung betrachtet, die sogenannte **führende Ordnung in der Störungstheorie**. Man entwickelt hier im Wesentlichen nach der elektromagnetischen Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \quad (50)$$

und man erkennt, dass die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zu e^2 , also α ist. Dies bedeutet, dass der Übergang unter Emission eines einzelnen Photons stattfindet. Dies erkennt man auch am Argument der δ -Funktion, welches **Energieerhaltung** ausdrückt:

$$E_{2lm}^{(0)} - E_{100}^{(0)} = \hbar\omega, \quad (51)$$

wobei $E_{2lm}^{(0)}$, $E_{100}^{(0)}$ die ungestörten Energien der Zustände $|2, l, m\rangle$ und $|1, 0, 0\rangle$ und $\hbar\omega$ die Energie des abgestrahlten Photons ist. Neben der Energie muss auch der Drehimpuls erhalten sein. Dabei muss man ins Gedächtnis rufen, dass ein Photon ein Boson, genauer ein Spin-1-Teilchen, ist. Da sich die Drehimpulsquantenzahl um $\Delta l = -1$ ändert, muss ein Drehimpuls \hbar wegtransportiert werden und dies erledigt gerade das Photon. Wie wir schon in Aufgabe 7 und 11 gesehen haben, lebt ein Spin-1-Teilchen in der Triplet-Darstellung, welche von den symmetrischen Zuständen $|1, 1\rangle$ ($j = 1, m = 1$), $|1, 0\rangle$ ($j = 1, m = 0$) und $|1, -1\rangle$ ($j = 1, m = -1$) aufgespannt wird. Ein Photon kann sich also in keinem Zustand mit $m \geq 2$ oder $m \leq -2$ befinden und somit sind nur Überhänge mit $m = -1, 0$ oder $+1$ möglich, wobei es die folgenden drei Möglichkeiten gibt:

- 1.) $|2, 1, 1\rangle \mapsto |1, 0, 0\rangle$: Hierbei gilt $\Delta m = -1$, das Photon muss also $J_z = \hbar$ wegtransportieren. Es befindet sich daher im Zustand $|1, 1\rangle$.
- 2.) $|2, 1, 0\rangle \mapsto |1, 0, 0\rangle$: Es ist $\Delta m = 0$ und das Photon befindet sich im Zustand $|1, 0\rangle$.
- 3.) $|2, 1, -1\rangle \mapsto |1, 0, 0\rangle$: Es gilt $\Delta m = 1$. Das Photon muss also $J_z = \hbar$ an das Wasserstoffatom abgeben und nimmt danach den Zustand $|1, -1\rangle$ ein.