Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.6

Aufgabe 16

a.)

Spinvektoren transformieren unter der SU(2). Drehungen im SU(2)-Raum (Spinraum) erfolgen über die Matrix

$$U_2 = \mathbb{1}_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,. \tag{1}$$

Wir müssen nun SU(2)-Drehungen im Produktraum zweier Spins durchführen, weshalb die entsprechende Matrix die Produktmatrix ist:

$$\begin{aligned} U_4 \equiv U\otimes U &= \left\{\mathbb{1}_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\otimes\left\{\mathbb{1}_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\mathbb{1}_2\otimes\mathbb{1}_2) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\{\mathbb{1}_2\otimes(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\mathbb{1}_2\} - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\otimes(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir führen über

$$\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-\,,\quad \sigma_y = -\mathrm{i}(\sigma_+ - \sigma_-)\,, \tag{3}$$

Auf- und Absteigeoperatoren ein und erhalten mit dem Einheitsvektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}\,, \tag{4}$$

dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} &= n_x(\sigma_+ + \sigma_-) - \mathrm{i}n_y(\sigma_+ - \sigma_-) + n_z\sigma_z = (n_x - \mathrm{i}n_y)\sigma_+ + (n_x + \mathrm{i}n_y)\sigma_- + n_z\sigma_z = \\ &= \sin\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)\sigma_+ + \sin\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)\sigma_- + \cos\vartheta\sigma_z\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Beachten wir

$$\sigma_+|+\rangle = 0\,,\quad \sigma_+|-\rangle = |+\rangle\,,\quad \sigma_-|-\rangle = 0\,,\quad \sigma_-|+\rangle = |-\rangle\,,\quad \sigma_z|+\rangle = |+\rangle\,,\quad \sigma_z|-\rangle = -|-\rangle\,, \tag{6}$$

so ergibt sich:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}|+\rangle = \sin\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)|-\rangle + \cos\vartheta|+\rangle\,, \tag{7}$$

und

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}|-\rangle = \sin\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)|+\rangle - \cos\vartheta|-\rangle\,. \tag{8}$$

Damit können wir den Zustand $|+,-\rangle$ transformieren:

$$\begin{aligned} U\otimes U(|+\rangle\otimes|-\rangle) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)|+,-\rangle &+ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\{\sin\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)|+,+\rangle - \cos\vartheta|+,-\rangle\} \\ &+ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\{\sin\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)|-,-\rangle + \cos\vartheta|+,-\rangle\} \\ &- \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big\{\sin^2\vartheta|-,+\rangle - \sin\vartheta\cos\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)|-,-\rangle \\ &\quad + \sin\vartheta\cos\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)|+,+\rangle - \cos^2\vartheta|+,-\rangle\Big\}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Für den Zustand $|-,+\rangle$ folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} U\otimes U(|-\rangle\otimes|+\rangle) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)|-,+\rangle &+ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\{\sin\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)|-,-\rangle + \cos\vartheta|-,+\rangle\} \\ &+ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\{\sin\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)|+,+\rangle - \cos\vartheta|-,+\rangle\} \\ &- \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big\{\sin^2\vartheta|+,-\rangle - \sin\vartheta\cos\vartheta\exp(\mathrm{i}\varphi)|-,-\rangle \\ &\quad + \sin\vartheta\cos\vartheta\exp(-\mathrm{i}\varphi)|+,+\rangle - \cos^2\vartheta|-,+\rangle\Big\}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Man kann nun nachrechnen, dass der Singulett-Zustand invariant unter einer Transformation Drehung um $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$-Raum ist (wir multiplizieren mit $\sqrt{2}$ durch, damit wir nicht immer den Normierungsfaktor $1/\sqrt{2}$ des Singulettzustandes mitschleppen müssen :-)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(U \otimes U)|S\rangle = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)&[|+,-\rangle - |-,+\rangle] \\ &+ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)[(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)|+,-\rangle - (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)|-,+\rangle] = \\ = |+,-\rangle - |-,+\rangle = \sqrt{2}|S\rangle\,. \qquad (11)\end{aligned}$$

Der Singulett-Zustand ist also invariant unter Drehungen im Produktraum $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.
Zustände mit Spinquantenzahl $S = 0$ oder Drehimpulsquantenzahl $L = 0$ sind immer invariant bezüglich Drehungen in den zugehörigen Räumen. Beim Drehimpuls handelt es sich jedoch um Drehungen im dreidimensionalen Anschauungsraum, welche durch die aus der Mechanik bekannten Drehmatrizen (über die Generatoren der Drehgruppe SO(3)) beschrieben werden. Ein anschauliches Beispiel für den Drehimpuls l liefert das Wasserstoffatom. In diesem haben die Orbitale, welche zu $l = 0$ gehören (also die n-s-Orbitale in der Sprache der Spektroskopieleute) kugelsymmetrische Gestalt und sind damit invariant unter Drehungen im dreidimensionalen Raum.

b.)

Der Aufgabenteil funktioniert analog und man stellt fest, dass die Triplettzustände nicht invariant unter $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$-Rotationen sind, sondern gegenseitig mischen.

Aufgabe 17

Die Quantentheorie war zu ihren Anfängen sehr stark umstritten unter den damaligen bedeutenden Physikern. Im Wesentlichen spaltete sich die Physikerschaft in zwei Lager. Da gab es zum einen die „Kopenhagener Schule“ um Bohr und die „Göttinger Schule“ um Heisenberg, welche die Quantentheorie als statistische Theorie akzeptierten, die Aussagen über Wahrscheinlichkeiten trifft. Auf der anderen Seite gab es Leute wie Einstein, Schrödinger und de Broglie, welchen diese statistische Natur der Theorie überhaupt nicht in den Kram passte und Magenschmerzen bereitete (siehe Einstein mit seinem bekannten Ausspruch: „Gott würfelt nicht.“)
Betrachten wir nun dazu ein Beispiel, welche diese Problematik beschreibt, nämlich den Zerfall eines instabilen Teilchens, etwa eines freien Neutrons. Experimentiert man mit vielen zerfallenden Neutronen und misst die Zeitdauer, nach der diese zerfallen, so wird man feststellen, dass diese nicht für alle Neutronen exakt gleich ist. Aus dem statistischen Mittel ergibt sich die **mittlere Lebensdauer** τ eines Neutrons und diese kann mit Methoden der Quantentheorie berechnet werden. Was die Quantentheorie jedoch nicht leistet, ist, vorauszusagen, zu **welcher exakten Zeitdauer ein bestimmtes Neutron** zerfallen wird, denn Neutronen sind quantenmechanisch gesehen identische Teilchen und keines besitzt eine Eigenschaft gegenüber eines anderen Neutrons, die für einen früheren oder späteren Zerfall verantwortlich sein sollte. Die Quantentheorie ist also eine **nicht deterministische Theorie**.
Es nun aber so, dass die Quantentheorie nicht unbedingt der Weisheit letzter Schluss sein muss. Noch in ihren Anfangsjahren wurde die Idee aufgeworfen, dass ein physikalisches System Freiheitsgrade aufweisen könnte, welche durch die Quantentheorie eben nicht beschrieben werden können. Diese Freiheitsgrade können dem System selbst entspringen oder der unmittelbaren Umgebung. Betrachten wir speziell die zerfallenden Neutronen. Vielleicht gibt es Mechanismen der Umgebung, die bei einem einzelnen Neutron dafür sorgen, dass dieses schneller zerfällt als ein anderes. Das könnten zufällige heftige Vakuumfluktuationen (also virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare, die aus dem Vakuum heraus stets erzeugt und wieder vernichtet werden) an einem ausgezeichneten Punkt der Raum-Zeit sein, an dem sich das betreffende Neutron befindet. Solche Einflüsse, von der die Quantentheorie erst einmal nichts weiß, werden als **verborgene Parameter** bezeichnet. Diese sollen keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeitsvorhersagen der Quantentheorie haben.
Der Mathematiker Neumann hat im Jahre 1932 bewiesen, dass es keine verborgenen Parameter in der Quantentheorie geben kann. Dies führte dazu, dass solche Diskussionen zunächst im Untergrund verschwanden …Nach 1950 fanden jedoch de Broglie, Bell und Bohm heraus, dass Neumann Voraussetzungen für seinen Beweis gebrauchte, welche für physikalische Anwendungen zu streng waren, was erneut die Diskussion um die verborgenen Parameter anfachte.
Aus der Bellschen Ungleichung in Aufgabe 17 folgt, dass es einen Parameterbereich gibt, in dem das quantenmechanische Ergebnis im Widerspruch zum Ergebnis steht, wenn man mit verborgenen Parametern rechnet. Diese Beobachtung kann man immer dann machen, wenn ein verschränkter quantenmechanischer Zustand im

Spiel ist und genau das ist der Singulettzustand in der Aufgabe. Was ist ein verschränkter Zustand? Im Allgemeinen lassen sich Hilberträume $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, ... verschiedener physikalischer Teilsysteme zu einem gesamten Hilbertraum $\mathcal{H}$ kombinieren, welcher das Tensorprodukt der einzelnen Hilberträume ist:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \,. \tag{12}$$

Jeder Hilbertraum $\mathcal{H}_n$ wird durch ein System aus Basisvektoren

$$\{|1\rangle_n, |2\rangle_n, \ldots\}\,, \tag{13}$$

aufgespannt. Dann lässt sich ein beliebiger Zustand $|\psi\rangle_n$ schreiben als

$$|\psi\rangle_n = \sum_i C_i |i\rangle_n \,. \tag{14}$$

Kombiniert man beispielsweise $\mathcal{H}_{n_1}$ und $\mathcal{H}_{n_2}$ mit Hilfe des Tensorprodukts, so benötigt man eine Basis des entstandenen Produktraumes. Diese lautet

$$\{|1\rangle\rangle_{n_1} \otimes |1\rangle_{n_2}, |2\rangle_{n_1} \otimes |2\rangle_{n_2}, \ldots \,. \tag{15}$$

Ein Produktzustand lässt sich also nach diesen Eigenvektoren entwickeln:

$$|\psi\rangle_{n_1} \otimes |\psi\rangle_{n_2} = \left(C_i \sum_i |i\rangle_{n_1}\right)\left(\sum_j C'_j |j\rangle_{n_2}\right) = \sum_{i,j} C_i C'_j |i\rangle_{n_1} \otimes |j\rangle_{n_2} \equiv \sum_{i,j} C''_{ij} |i\rangle_{n_1} \otimes |j\rangle_{n_2} \,. \tag{16}$$

Wir erkennen hier, dass sich die Koeffizienten in der Entwicklung nach den neuen Eigenvektoren $|i\rangle_{n_1} \otimes |j\rangle_{n_2}$, also C''_{ij} in der Form $C''_{ij} = C_i C'_j$ separieren lassen; ein solcher Zustand ist **nicht verschränkt**. **Verschränkte** Zustände sind dagegen von der Form

$$\sum_{i,j} C''_{ij} |i\rangle_{n_1} \otimes |j\rangle_{n_2} \,, \tag{17}$$

wobei sich C''_{ij} nicht als Produkt zweier Entwicklungskoeffizienten C_i und C'_j (für alle i und j) schreiben lässt. Im Falle der Aufgabe handelt es sich um zwei Spin-1/2-Systeme, die miteinander kombiniert werden. Die Basisvektoren der einzelnen Spinräume sind bekannt

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \tag{18}$$

und ebenso die des Produktraums:

$$|+,+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |+,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |-,+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |-,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{19}$$

Ein Zustand $|+,-\rangle$ ist also kein verschränkter Zustand, weil er sich in der Form $|+\rangle \otimes |-\rangle$ schreiben lässt. Dagegen ist jedoch der Singulettzustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle)\,, \tag{20}$$

sehr wohl verschränkt; er lässt sich nicht gemäß (16) aufteilen.
Zum wieder zurück zur ursprünglichen Thematik. Die Bellsche Ungleichung kommt sich nicht mit der Quantentheorie in die Haare, sofern das physikalische System aus einem statistischen Gemisch gemäß (16) faktorisierbarer Zustände besteht, wenn also jedem Teilsystem Eigenschaften zugeordnet werden können, die nur für das jeweilige Teilsystem charakteristisch sind. Dies ist in verschränkten Systemen nicht möglich; ein solches lässt sich nur als Ganzes betrachten.