Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.8

Aufgabe 21

a.)

Wir gehen aus von der Heisenbergschen Ungleichung

$$\mathrm{i}\hbar\dot{A} = [A, H]\,, \tag{1}$$

und berechnen die benötigten Kommutatoren:

$$[a, H] = [a, H_0] + [a, H_1] = \hbar\omega[a, a^\dagger]a + \hbar g\sigma_-[a, a^\dagger] = \hbar\omega a + \hbar g\sigma_-\,. \tag{2}$$

Als nächstes müssen wir die Kommutatoren mit $\sigma_\pm$ berechnen. Unter Verwendung der (ansonsten so nicht üblichen) Definition

$$\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \mp \mathrm{i}\sigma_y}{2}\,, \tag{3}$$

erhält man:

$$[\sigma_\pm, \sigma_z] = \frac{1}{2}[\sigma_x, \sigma_z] \mp \frac{1}{2}\mathrm{i}[\sigma_y, \sigma_z] = -\mathrm{i}\sigma_y \mp \mathrm{i}^2\sigma_x = \pm\sigma_x - \mathrm{i}\sigma_y = \pm 2\left(\frac{\sigma_x \mp \mathrm{i}\sigma_y}{2}\right) = \pm 2\sigma_\pm\,, \tag{4}$$

und

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\sigma_x, \sigma_y] + \frac{-\mathrm{i}}{4}[\sigma_y, \sigma_x] = -\frac{1}{2}\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_z = -\sigma_z\,. \tag{5}$$

Damit können wir die benötigten Kommutatoren berechnen:

$$[\sigma_-, H] = [\sigma_-, H_0] + [\sigma_-, H_1] = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathrm{eg}}[\sigma_-, \sigma_z] + \hbar g[\sigma_-, \sigma_+]a = \hbar\omega_{\mathrm{eg}}\sigma_- + \hbar g\sigma_z a\,, \tag{6}$$

$$[\sigma_z, H] = [\sigma_z, H_0] + [\sigma_z, H_1] = \hbar g[\sigma_z, \sigma_+] + \hbar g[\sigma_z, \sigma_-]a^\dagger = -2\hbar g\sigma_+ a + 2\hbar g\sigma_- a^\dagger\,. \tag{7}$$

Hieraus ergeben sich dann die Formeln auf dem Übungsblatt:

$$\boxed{\dot{a}(t) = -\mathrm{i}(\omega a(t) + g\sigma_-(t))\,,} \tag{8a}$$

$$\boxed{\dot{\sigma_(}t) = -\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{eg}}\sigma_-(t) + g\sigma_z(t)a(t))\,,} \tag{8b}$$

$$\boxed{\dot{\sigma}_z(t) = 2\mathrm{i}g(\sigma_+(t)a(t) - \sigma_-(t)a^\dagger(t))\,.} \tag{8c}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}[a^\dagger, H] &= [a^\dagger, H_0] + [a^\dagger, H_1] = \hbar\omega[a^\dagger, a^\dagger a] + \hbar g[a^\dagger, \sigma_+ a] = \hbar\omega a^\dagger[a^\dagger, a] + \hbar g\sigma_+[a^\dagger, a] = \\ &= -(\hbar\omega a^\dagger + \hbar g\sigma_+)\,,\end{aligned} \tag{9}$$

also

$$\dot{a}^\dagger = \mathrm{i}(\omega a^\dagger + g\sigma_+)\,, \tag{10}$$

ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}\dot{n}(t) &= \dot{a}^\dagger(t)a(t) + a^\dagger(t)\dot{a}(t) = \mathrm{i}(\omega a^\dagger(t) + g\sigma_+(t))a(t) - \mathrm{i}a^\dagger(t)(\omega a(t) + g\sigma_-(t)) = \\ &= \boxed{\mathrm{i}g(\sigma_+(t)a(t) - \sigma_-(t)a^\dagger(t))\,.}\end{aligned} \tag{11}$$

Bemerkung

Die ungewöhnliche Definition (3) wird verwendet, um mit σ_+ vom Grundzustand zum angeregten Zustand zu gelangen:

$$g \mapsto e\,, \quad \sigma_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{12}$$

b.)

Was wir benötigen, ist

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t\right) = \exp(\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\sigma_z\right) = \exp(\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\,, \tag{13}$$

und

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t\right) = \exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\sigma_z\right) = \exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\,. \tag{14}$$

Damit ist es möglich, den Operator H_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich des ungestörten Hamiltonoperators H_0 zu berechnen:

$$\begin{aligned} H_1^I &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t\right) H_1 \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t\right) = \\ &= \hbar g \Big[\exp(\mathrm{i}\omega t a^\dagger a) a \exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_+\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\} \\ &\quad \exp(\mathrm{i}\omega t a^\dagger a) a^\dagger \exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_-\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\Big]\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Hier verwenden wir die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

$$\exp(A)B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[A,B]_n}{n!}\,, \quad [A,B]_0 = B,\ [A,B]_1 = [A,B],\ [A,B]_2 = [A,[A,B]],\ \ldots\,. \tag{16}$$

Mit $A = \mathrm{i}\omega t a^\dagger a$ und $B = a^\dagger$ folgt

$$[A,B]_0 = a^\dagger\,, \quad [A,B]_1 = \mathrm{i}\omega t[a^\dagger a, a^\dagger] = \mathrm{i}\omega t a^\dagger [a, a^\dagger] = \mathrm{i}\omega t a^\dagger\,, \tag{17}$$

$$[A,B]_2 = (\mathrm{i}\omega t)^2[a^\dagger a,[a^\dagger a, a^\dagger]] = (\mathrm{i}\omega t)^2 a^\dagger\,, \quad \ldots \quad [A,B]_n = (\mathrm{i}\omega t)^n a^\dagger\,. \tag{18}$$

Somit gilt also:

$$\exp(\mathrm{i}\omega t)a^\dagger\exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega t)^n a^\dagger}{n!} = a^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega t)^n}{n!} = a^\dagger\exp(\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{19}$$

Analog gilt unter Verwendung von $[a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a$:

$$\exp(\mathrm{i}\omega t a^\dagger a)a\exp(-\mathrm{i}\omega t a^\dagger a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega t)^n a}{n!} = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega t)^n}{n!} = a\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{20}$$

Nun müssen wir uns noch um den Spinanteil kümmern. Unter Verwendung von

$$\sigma_z\sigma_\pm = \frac{1}{2}\left([\sigma_z,\sigma_\pm] + \{\sigma_z,\sigma_\pm\}\right) = \frac{1}{2}(\mp 2\sigma_\pm) = \mp\sigma_\pm\,, \tag{21}$$

folgt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_+\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\} = \\ &= \left\{\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\sigma_+ - \mathrm{i}\sigma_+ \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\} = \\ &= \left\{\cos^2\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_+ - 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{eg}}}{2}t\right)\sigma_+ = \\ &= \cos(\omega_{\mathrm{eg}}t)\sigma_+ - \mathrm{i}\sin(\omega_{\mathrm{eg}}t)\sigma_+ = \exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{eg}}t)\sigma_+\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left\{\cos\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right) - \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_- \left\{\cos\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\right\} = \\
&= \left\{\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\sigma_- + \mathrm{i}\sigma_- \sin\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right) + \mathrm{i}\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\right\} = \\
&= \left\{\cos^2\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\right\}\sigma_- + 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_{\text{eg}}}{2}t\right)\sigma_- = \\
&= \cos(\omega_{\text{eg}}t)\sigma_- + \mathrm{i}\sin(\omega_{\text{eg}}t)\sigma_- = \exp(\mathrm{i}\omega_{\text{eg}}t)\sigma_- \,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Damit ergibt sich H_1 im Wechselwirkungsbild:

$$\boxed{H_1^I = \hbar g[\sigma_+ a \exp(\mathrm{i}(\omega_{\text{eg}} - \omega)t) + \sigma_- a^\dagger \exp(-\mathrm{i}(\omega_{\text{eg}} - \omega)t)]\,.} \tag{24}$$

Aufgabe 22

a.)

Hier ist im Wesentlichen $[a_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}$ zu berücksichtigen, was dafür sorgt, dass jeweils eine von zwei Summen über $\mathbf{k}$ und λ wegfällt. Dann erhält man ein analoges Ergebnis zum vorherigen Aufgabenteil mit dem Unterschied, dass zusätzlich über $\mathbf{k}$ summiert wird:

$$H_1'(t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} H_1(t) = \boxed{\sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar g_{\mathbf{k}} \left\{\sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda} \exp(\mathrm{i}(\omega_{\text{eg}} - \omega_{\mathbf{k},\lambda})t) + \sigma_- a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-\mathrm{i}(\omega_{\text{eg}} - \omega_{\mathbf{k},\lambda})t)\right\}\,.} \tag{25}$$

b.)

Wir betrachten den Hamiltonoperator

$$H_0 = H_{\text{Feld}} + H_{\text{Atom}}\,, \quad H_{\text{Feld}} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}\,, \quad H_{\text{Atom}} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{eg}}\sigma_z\,. \tag{26}$$

H_{Feld} beschreibt das freie (nicht wechselwirkende) Strahlungsfeld. $a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} = n_{\mathbf{k}}$ ist der Anzahloperator. Dessen Eigenwerte ist die Anzahl der Feldquanten (Photonen) mit Frequenz $\omega_{\mathbf{k},\lambda}$. H_{Atom} beschreibt das freie Atom und zwar dessen Spinzustand.

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar g_{\mathbf{k}} (\sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda} + a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\sigma_-)\,, \tag{27}$$

beschreibt die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit dem Atom. $\sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda}$ führt zur Anregung des Atoms und Absorption eines Photons (weil $a_{\mathbf{k},\lambda}$ ein Photon vernichtet) und $a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\sigma_-$ führt dazu, dass das Atom unter Emission eines Photons ($a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$ erzeugt ein Photon im Strahlungsfeld) in den Grundzustand zurückkehrt. $g_{\mathbf{k}}$ ist eine Kopplungskonstante, welche die Stärke der Wechselwirkung beschreibt. Der Störoperator für einen Übergang vom angeregten Zustand $|e, n_{\mathbf{k}}\rangle$ zum Grundzustand $|g, n_{\mathbf{k}}\rangle$ ist $V_{e\mapsto g} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar g_{\mathbf{k}} \sigma_- a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$. Die zugehörige Energiebilanz ist

$$E_e - E_g - \hbar\omega_{\text{eg}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}) - \hbar\omega_{\text{eg}}\,. \tag{28}$$

$\hbar\omega_{\text{eg}}$ ist zu subtrahieren, weil ein Photon emittiert wird. Der Störoperator für einen umgekehrten Übergang lautet $V_{g\mapsto e} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar g_{\mathbf{k}} \sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda}$ mit der Energiebilanz

$$E_e - E_g + \hbar\omega_{\text{eg}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}) + \hbar\omega_{\text{eg}}\,. \tag{29}$$

$\hbar\omega_{\text{eg}}$ muss addiert werden, weil ein Photon absorbiert wird. Somit lauten nach Fermis goldener Regel

$$\Gamma_{i\mapsto f} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i \pm \hbar\omega)\,, \tag{30}$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\Gamma_{\substack{e\mapsto g\\ n\mapsto n'}} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k},\lambda} |\langle g, n'_{\mathbf{k}}|\hbar g_{\mathbf{k}} \sigma_- a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}|e, n_{\mathbf{k}}\rangle|^2 \delta(\hbar\omega_{\mathbf{k}}(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}) - \hbar\omega_{\text{eg}})\,, \tag{31}$$

$$\Gamma_{\substack{g\mapsto e\\ n\mapsto n'}} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k},\lambda} |\langle e, n_{\mathbf{k}}|\hbar g_{\mathbf{k}}\sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda}|g, n'_{\mathbf{k}}\rangle|^2 \delta(\hbar\omega_{\mathbf{k}}(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}) + \hbar\omega_{\mathrm{eg}})\,. \tag{32}$$

Unter Verwendung von

$$\sigma_- a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}|e, n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}+1}|g, n_{\mathbf{k}}+1\rangle\,, \quad \sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda}|g, n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}}|e, n_{\mathbf{k}}-1\rangle\,, \tag{33}$$

ergibt sich:

$$|\langle g, n'_{\mathbf{k}}|\sigma_- a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}|e, n(\mathbf{k})\rangle|^2 = (n_{\mathbf{k}}+1)\delta(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}} - 1)\,, \tag{34}$$

und

$$|\langle e, n'_{\mathbf{k}}|\sigma_+ a_{\mathbf{k},\lambda}|g, n_{\mathbf{k}}\rangle|^2 = n_{\mathbf{k}}\delta(n'_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}} + 1)\,. \tag{35}$$

Man erhält somit

$$\Gamma_{\substack{e\mapsto g\\ n\mapsto n'}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k},\lambda} g^2_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}}+1)\delta(\omega_{\mathbf{k},\lambda} - \omega_{\mathrm{eg}})\,, \tag{36}$$

wobei die 1 die spontane Emission und $n_{\mathbf{k}}$ die stimulierte Emission beschreibt. Für die Absorption folgt:

$$\Gamma_{\substack{g\mapsto e\\ n\mapsto n'}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k},\lambda} g^2_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\delta(\omega_{\mathrm{eg}} - \omega_{\mathbf{k},\lambda})\,. \tag{37}$$

Wir können die Summe nun noch in ein Integral umschreiben. Betrachten wir dazu ein eindimensionales System der Länge L mit periodischen Randbedingungen, also $\psi(x) = \psi(x+L)$.

$$\exp(\mathrm{i}kx) \overset{!}{=} \exp(\mathrm{i}k(x+L)) \Leftrightarrow \exp(\mathrm{i}kL) \overset{!}{=} 1 = \exp(2\pi\mathrm{i}n)\,, \quad n\in\mathbb{Z}\,. \tag{38}$$

Damit erhält man

$$kL = 2\pi n \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L}n\,. \tag{39}$$

k ist also quantisiert im Abstand von $\Delta k = 2\pi/L$. Lassen wir die Länge L gegen Unendlich gehen, so wird $\mathbf{k}$ kontinuierlich und wir können die Summe über k durch ein Integral ersetzen:

$$\sum_{k,\lambda} = \sum_{k,\lambda}\frac{\Delta k}{\Delta k} = \frac{L}{2\pi}\sum_{k,\lambda}\Delta k \xrightarrow{L\mapsto\infty} 2\cdot\frac{L}{2\pi}\int \mathrm{d}k = \frac{L}{\pi}\int\mathrm{d}k\,. \tag{40}$$

In drei Dimensionen folgt dann analog:

$$\sum_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_{\mathbf{k},\lambda}(\Delta k)^3 \xrightarrow{L\mapsto\infty} 2\cdot\frac{V}{8\pi^3}\int\mathrm{d}^3k = \frac{V}{4\pi^3}\int\mathrm{d}k\,k^2\int\mathrm{d}\Omega\,. \tag{41}$$

Die zusätzlichen Faktoren 2 kommen von der Summe über die beiden (physikalischen) transversalen Polarisationen λ der Photonen. Außerdem ersetzen wir die diskreten Funktionen $g_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k},\lambda}$, $a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$, $n_{\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{k},\lambda}$ durch ihre kontinuierlichen Pendants $g(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k})$, $n(\mathbf{k})$, $\omega(\mathbf{k})$. Man erhält somit (wobei die δ-Funktion) die Einschränkung $\omega_{\mathbf{k},\lambda} = c|\mathbf{k}| = \omega_{\mathrm{eg}}$ liefert:

$$\Gamma_{\substack{e\mapsto g\\ n\mapsto n'}} = \frac{V}{2\pi^2}\int\mathrm{d}\Omega\int\mathrm{d}k\,k^2 g(\mathbf{k})^2(n(\mathbf{k})+1)\delta(\omega(\mathbf{k})-\omega_{\mathrm{eg}}) = \boxed{\frac{\omega^2_{\mathrm{eg}}V}{2\pi^2c^3}\int\mathrm{d}\Omega\,g(\mathbf{k})^2(n(\mathbf{k})+1)\,,} \tag{42}$$

$$\Gamma_{\substack{g\mapsto e\\ n\mapsto n'}} = \frac{V}{2\pi^2}\int\mathrm{d}\Omega\int\mathrm{d}k\,k^2 g(\mathbf{k})^2 n(\mathbf{k})\delta(\omega(\mathbf{k})-\omega_{\mathrm{eg}}) = \boxed{\frac{\omega^2_{\mathrm{eg}}V}{2\pi^2c^3}\int\mathrm{d}\Omega\,g(\mathbf{k})^2 n(\mathbf{k})\,.} \tag{43}$$

Aufgabe 23

Wir setzen die angegebenen Darstellungen des elektrischen und magnetischen Feldes in den Kommutator ein und beachten, dass wir in beiden Summen unterschiedliche $\mathbf{k}$ und λ wählen:

$$\begin{aligned}[E_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r})] = \Bigg[&\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \left(a_{\mathbf{k},\lambda} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \right), \\ &\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}'}}} (\mathbf{k}' \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left(a_{\mathbf{k}',\lambda'} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}) + a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}) \right) \Bigg] . \end{aligned} \tag{44}$$

Wegen der Linearität des Kommutators, also

$$[a\widehat{C}, b\widehat{D}] = ab[\widehat{C}, \widehat{D}] , \quad \left[\sum_n \widehat{C}_n, \sum_m \widehat{D}_m \right] = \sum_n \sum_m [\widehat{C}_n, \widehat{D}_m] , \tag{45}$$

mit beliebigen Operatoren $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{C}_n$, $\widehat{D}_n$ und a, $b \in \mathbb{C}$ folgt:

$$\begin{aligned}[E_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}')] &= \frac{2\pi\hbar c}{V} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x (\mathbf{k}' \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'})_y \times \\ &\quad \times \left[a_{\mathbf{k},\lambda} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), a_{\mathbf{k}',\lambda'} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\lambda') + a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{2\pi\hbar c}{V} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sum_{\mathbf{k},\lambda'} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x [k_z (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x - k_x (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_z] \left\{ [a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] \exp(\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')) \right. \\ &\quad + [a_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] \exp(\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')) + [a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] \exp(-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')) \\ &\quad \left. + [a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] \exp(-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')) \right\} . \end{aligned} \tag{46}$$

Unter Verwendung der Vertauschungsrelationen

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0 , \tag{47a}$$

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} , \tag{47b}$$

folgt dann weiter:

$$[E_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}')] = \frac{2\pi\hbar c}{V} \sum_{\mathbf{k},\lambda} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x [k_z (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x - k_x (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_z] \left\{ \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) - \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) \right\} . \tag{48}$$

$\mathbf{e}_{k,\lambda}$ für $\lambda = \{1, 2\}$ sind die transversalen (physikalischen) Polarisationen des Photons. Wählt man als Ausbreitungsrichtung der Photonen die z-Achse, also $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^\intercal$, so sind die beiden transversalen Polarisationsvektoren durch zwei Vektoren gegeben, welche die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (in diesem Falle die x-y-Ebene) aufspannen. Man kann prinzipiell zwei beliebige linear unabhängige Vektoren in der x-y-Ebene wählen, der Einfachheit halber sollen diese auch noch senkrecht aufeinander stehen. Dies erreicht man mit der Standardbasis

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k},1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k},2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{49}$$

Es gilt somit $(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_x (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda})_z = 0$ für $\lambda = 1$, 2 und $(\mathbf{e}_{\mathbf{k},1}(\mathbf{e}_{\mathbf{k},1}) = 1$ bzw. $(\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}(\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}) = 0$. Damit kann man die Summe über $\lambda = 1$, 2 ausführen.
Mit einer Substitution $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ fasst man beide Terme zusammen und schreibt dann k_z als $-\mathrm{i}$ mal der Ableitung nach z, die auf $\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))$ wirkt:

$$[E_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}')] = \frac{4\pi\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k},\lambda} k_z \exp(\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) = -\mathrm{i}4\pi\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))] \right\} . \tag{50}$$

Führt man nun den Grenzübergang $L \mapsto \infty$ (analog zur Aufgabe 23) durch, so wird $\mathbf{k}$ kontinuierlich und wir können die Summe durch ein Integral ersetzen und die Definition der kontinuierlichen δ-Funktion verwenden:

$$[E_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}')] = -\mathrm{i}4\pi\hbar c \frac{\partial}{\partial z}\left(\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))\right) = -\mathrm{i}4\pi\hbar c\frac{\partial}{\partial z}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \\ = \boxed{-2\mathrm{i}hc\delta(x-x')\delta(y-y')\delta'(z-z')\,.} \tag{51}$$

Aufgabe 24

Ist die Information über ein quantenmechanisches System nur in der Hinsicht bekannt, dass man weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, ..., p_m sich das System in einem der durch die Vektoren $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., $|m\rangle$ beschriebenen Zustände befindet so handelt es sich um ein **statistisches Gemisch**. Dieses lässt sich mittels des Dichteoperators

$$\varrho = \sum_m p_m |m\rangle\langle m|\,, \tag{52}$$

beschreiben. Da die p_m Wahrscheinlichkeiten sind, müssen diese die folgenden Eigenschaften haben:

$$p_m \geq 0\,,\quad \sum_m p_m = 1\,. \tag{53}$$

Kennt man ϱ, lassen sich daraus alle messbaren physikalischen Größen ableiten, wie zum Beispiel Erwartungswerte von Observablen A

$$\langle A\rangle = \mathrm{Sp}(\varrho A)\,, \tag{54}$$

oder Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich das System in einem bestimmten Zustand befindet, also

$$W_{|\xi\rangle} = \langle \xi|\varrho|\xi\rangle\,. \tag{55}$$

Zwei statistische Gemische sind identisch, wenn sie dieselbe Dichtematrix besitzen. Die Zeitentwicklung der Dichtematrix ist durch folgende Bewegungsgleichung bestimmt:

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}(t) = [H,\varrho(t)] = \begin{pmatrix} E_a & \Delta(t) \\ \Delta^*(t) & E_b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varrho_{aa}(t) & \varrho_{ab}(t) \\ \varrho_{ba}(t) & \varrho_{bb}(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_{aa}(t) & \varrho_{ab}(t) \\ \varrho_{ba}(t) & \varrho_{bb}(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E_a & \Delta(t) \\ \Delta^*(t) & E_b\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} E_a\varrho_{aa}(t) + \Delta(t)\varrho_{ba}(t) & E_a\varrho_{ab}(t)+\Delta(t)\varrho_{bb}(t) \\ E_b\varrho_{ba}(t)+\Delta^*(t)\varrho_{aa}(t) & E_b\varrho_{bb}(t)+\Delta^*(t)\varrho_{ab}(t)\end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} E_a\varrho_{aa}(t)+\Delta^*(t)\varrho_{ab}(t) & E_b\varrho_{ab}(t)+\Delta(t)\varrho_{aa}(t) \\ E_a\varrho_{ba}(t)+\Delta^*(t)\varrho_{bb}(t) & E_b\varrho_{bb}(t)+\Delta(t)\varrho_{ba}(t)\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \Delta(t)\varrho_{ba}(t)-\Delta^*(t)\varrho_{ab}(t) & (E_a-E_b)\varrho_{ab}(t)-\Delta(t)(\varrho_{aa}(t)-\varrho_{bb}(t)) \\ -(E_a-E_b)\varrho_{ba}(t)+\Delta^*(t)(\varrho_{aa}(t)-\varrho_{bb}(t)) & \Delta^*\varrho_{ab}(t)-\Delta(t)\varrho_{ba}(t)\end{pmatrix}\,. \tag{56}$$

Dies führt damit auf die folgenden Gleichungen:

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}_{aa} = \Delta(t)\varrho_{ba}(t)-\Delta^*(t)\varrho_{ab}(t)\,, \tag{57a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}_{bb} = \Delta^*(t)\varrho_{ab}(t)-\Delta(t)\varrho_{ba}(t)\,, \tag{57b}$$

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}_{ab} = (E_a-E_b)\varrho_{ab}(t)-\Delta(t)(\varrho_{aa}(t)-\varrho_{bb}(t))\,, \tag{57c}$$

und

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}_{ba} = -(E_a-E_b)\varrho_{ba}(t)+\Delta^*(t)(\varrho_{aa}(t)-\varrho_{bb}(t))\,. \tag{57d}$$

Es gilt $\varrho_{aa}\in\mathbb{R}$ und $\varrho_{bb}\in\mathbb{R}$. Außerdem ist $\varrho_{ab} = \varrho_{ba}^*$. Durch Subtraktion von (57a) und (57b) und mittels $\Delta = \Delta_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, $\hbar\omega = E_a - E_b$:

$$\mathrm{i}\hbar(\dot{\varrho}_{aa}-\dot{\varrho}_{bb}) \equiv \mathrm{i}\hbar\dot{\delta\varrho} = 2\Delta_0\varrho_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega t) - 2\Delta_0^*\varrho_{ba}^*\exp(\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{58}$$

Wir schreiben Δ_0 in der Eulerschen Darstellung als $\Delta_0 = |\Delta| \exp(\mathrm{i}\varphi)$. Nun ist es von Vorteil, $\varrho_{ba} = A(t) \exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi))$ zu schreiben. Aus (58) ergibt sich dann:

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\dot{\delta\varrho} = 2|\Delta|A - 2|\Delta|A^* = 2|\Delta|(A - A^*) = 4|\Delta|\mathrm{i}\mathrm{Im}(A)\,.} \tag{59}$$

Aus (57d) folgt entsprechend

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varrho}_{ba} = -\hbar\omega\varrho_{ba} + \Delta_0^* \exp(\mathrm{i}\omega t)\delta\varrho\,, \tag{60}$$

bzw. mit den obigen Definitionen

$$\mathrm{i}\hbar\dot{A}\exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi)) - \hbar\omega A \exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi)) = -\hbar\omega A \exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi)) + |\Delta| \exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi))\delta\varrho\,, \tag{61}$$

und somit:

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\dot{A} = |\Delta|\delta\varrho\,.} \tag{62}$$

Differentiation von (59) nach t und Einsetzen von (62) bzw. Differentiation von (62) nach t und Einsetzen von (59) führt auf

$$\boxed{-\hbar^2\ddot{A} = 4|\Delta|^2\mathrm{i}\mathrm{Im}(A)\,,} \tag{63}$$

bzw.

$$\boxed{-\hbar^2\ddot{\delta\varrho} = 4|\Delta|^2\delta\varrho\,,} \tag{64}$$

da $\delta\varrho \in \mathbb{R}$. Zerlegt man nun $A(t)$ direkt in Real- und Imaginärteil, so folgt zunächst aus (63):

$$-\hbar^2\{\mathrm{Re}(\ddot{A}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(\ddot{A})\} = 4|\Delta|^2\mathrm{i}\mathrm{Im}(A)\,. \tag{65}$$

Da auf der rechten Seite kein Realteil steht, kommt man auf $\mathrm{Re}(\ddot{A}) = 0$ und somit $\mathrm{Re}(A) = C_1 + C_2 t$. Für den Imaginärteil gilt

$$\mathrm{Im}(\ddot{A}) = -\frac{4|\Delta|^2}{\hbar^2}\mathrm{Im}(A)\,, \tag{66}$$

also

$$\mathrm{Im}(A) = C_3\cos(\Omega t) + C_4\sin(\Omega t)\,, \quad \Omega = \frac{2|\Delta|}{\hbar}\,. \tag{67}$$

Führen wir $A(t = 0) = A(0) = A_0$ ein, so folgt $C_3 = \mathrm{Im}(A_0)$. Aus (62) ergibt sich

$$\mathrm{i}\hbar\mathrm{Re}(\dot{A}) - \hbar\mathrm{Im}(\dot{A}) = |\Delta|\delta\varrho\,, \tag{68}$$

und entsprechend $\mathrm{Re}(\dot{A}) = 0$, also $C_2 = 0$. Analog zu vorher resultiert dann auch $C_1 = \mathrm{Re}(A_0)$. Für den Imaginärteil gilt

$$-\hbar\mathrm{Im}(\dot{A}) = \hbar\Omega\{C_3\sin(\Omega t) - C_4\cos(\Omega t)\} = |\Delta|\delta\varrho\,. \tag{69}$$

Aus (64) resultiert

$$\delta\varrho = D_1\cos(\Omega t) + D_2\sin(\Omega t)\,, \quad \Omega = \frac{2|\Delta|}{\hbar}\,. \tag{70}$$

Definieren wir $\delta\varrho(t = 0) = \delta\varrho_0$, so folgt $D_1 = \delta\varrho_0$. Aus (69) erhalten wir

$$D_2 = \frac{\hbar\Omega}{|\Delta|}\mathrm{Im}(A_0) = 2\mathrm{Im}(A_0)\,, \quad C_4 = -\frac{|\Delta|\delta\varrho_0}{\hbar\Omega} = -\frac{\delta\varrho_0}{2}\,. \tag{71}$$

Also haben wir alle Konstanten bestimmt und können schließlich die Lösung angeben:

$$\boxed{\delta_{ba}(t) = \left\{\mathrm{Re}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi)) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\cos(\Omega t) - \frac{\mathrm{i}}{2}\delta\varrho_0\sin(\Omega t)\right\}\exp(\mathrm{i}(\omega t - \varphi))\,,} \tag{72a}$$

$$\boxed{\delta_{ab}(t) = \left\{\mathrm{Re}(\varrho_{ab}(0)\exp(-\mathrm{i}\varphi)) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(\varrho_{ab}(0)\exp(-\mathrm{i}\varphi))\cos(\Omega t) + \frac{\mathrm{i}}{2}\delta\varrho_0\sin(\Omega t)\right\}\exp(-\mathrm{i}(\omega t - \varphi))\,,} \tag{72b}$$

$$\boxed{\delta\varrho(t) = \delta\varrho_0\cos(\Omega t) + 2\mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\sin(\Omega t)\,.} \tag{72c}$$

ϱ_{aa} und ϱ_{bb} lassen sich aus den beiden Gleichungen

$$\varrho_{aa} - \varrho_{bb} = \delta\varrho\,, \quad \varrho_{aa} + \varrho_{bb} = 1\,, \tag{73}$$

zu

$$\varrho_{aa} = \frac{1}{2}(1 + \delta\varrho)\,, \quad \varrho_{bb} = \frac{1}{2}(1 - \delta\varrho)\,. \tag{74}$$

bestimmen. Setzen wir $\delta\varrho$ ein, ergibt sich

$$\varrho_{aa}(t) = \frac{1}{2}(1 + \delta\varrho_0\cos(\Omega t)) + \mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\sin(\Omega t)\,. \tag{75}$$

Unter Verwendung von $\varrho_{aa}(0) = 1/2 + 1/2\delta\varrho_0$ können wir dies in der Form

$$\boxed{\varrho_{aa}(t) = \varrho_{aa}(0)\cos(\Omega t) + \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega t)) + \mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\sin(\Omega t)\,,} \tag{76}$$

schreiben. Darüber hinaus gilt entsprechend

$$\varrho_{bb} = \frac{1}{2}(1 - \delta\varrho_0\cos(\Omega t)) - \mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\sin(\Omega t)\,, \tag{77}$$

und mit $\varrho_{bb}(0) = 1/2 - 1/2\delta\varrho_0$ ergibt sich:

$$\boxed{\varrho_{bb}(t) = \varrho_{bb}(0)\cos(\Omega t) + \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega t)) - \mathrm{Im}(\varrho_{ba}(0)\exp(\mathrm{i}\varphi))\sin(\Omega t)\,.} \tag{78}$$

Aufgabe 25

a.)

Zunächst definieren wir

$$|1\rangle = |+,+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |2\rangle = |+,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |3\rangle = |-,+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |4\rangle = |-,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{79}$$

Der Grundzustand ist der Singulettzustand

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)\,. \tag{80}$$

Wir erhalten die Dichtematrix aus dem dyadischen Produkt dieses Zustands:

$$\begin{aligned} \widehat{\varrho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| &= \frac{1}{2}(|+-\rangle + |-+\rangle)(\langle +-| - \langle -+|) = \\ &= \frac{1}{2}\left\{|+-\rangle\langle +-| - |-+\rangle\langle +-| - |+-\rangle\langle -+| + |-+\rangle\langle -+|\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{|2\rangle\langle 2| - |3\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 3|\right\} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}\,. \end{aligned} \tag{81}$$

Wegen $\widehat{\varrho}^2 = \widehat{\varrho}$ handelt es sich um einen reinen Zustand. Äquivalent dazu ist $\mathrm{Sp}(\varrho^2) = 1$. (Die Bedingung $\widehat{\varrho}^2 = \widehat{\varrho}$ besagt, dass ϱ ein Projektor ist. Die Spur eines Projektors ist gerade gleich Eins.)

b.)

Die reduzierte Dichtematrix ergibt sich durch Bildung der Spur über die Zustände des zweiten Spins:

$$\widehat{\varrho}^{\text{red}}_{+,+} = \widehat{\varrho}_{++,++} + \widehat{\varrho}_{+-,+-} = \widehat{\varrho}_{1,1} + \widehat{\varrho}_{2,2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,, \tag{82}$$

$$\widehat{\varrho}^{\text{red}}_{+,-} = \widehat{\varrho}_{++,-+} + \widehat{\varrho}_{+-,--} = \widehat{\varrho}_{1,3} + \widehat{\varrho}_{2,4} = 0 + 0 = 0\,, \tag{83}$$

$$\widehat{\varrho}^{\text{red}}_{-,+} = \widehat{\varrho}_{-+,++} + \widehat{\varrho}_{--,+-} = \widehat{\varrho}_{3,1} + \widehat{\varrho}_{4,2} = 0 + 0 = 0\,, \tag{84}$$

und

$$\widehat{\varrho}^{\text{red}}_{-,-} = \widehat{\varrho}_{-+,-+} + \widehat{\varrho}_{--,--} = \widehat{\varrho}_{3,3} + \widehat{\varrho}_{4,4} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}\,. \tag{85}$$

Somit gilt

$$\boxed{\widehat{\varrho}^{\text{red}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.} \tag{86}$$

Wegen

$$(\widehat{\varrho}^{\text{red}})^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \widehat{\varrho}^{\text{red}}\,, \tag{87}$$

handelt es sich um ein Gemisch und keinen reinen Zustand.