Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.9

Aufgabe 26

a.)

$$
\begin{aligned}
P(x,p) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x'\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x'\right) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, \psi^* \left(x + \frac{x'}{2}\right) \psi \left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x'\right) . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b.)

$$
\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \, A(x,p) P(x,p) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{A} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x'\right) \times \\
&\qquad \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'' \left\langle x - \frac{x''}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x''}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x''\right) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{A} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \left\langle x - \frac{x''}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x''}{2} \right\rangle \times \\
&\qquad \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \, \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} (x' + x'') p\right) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{A} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \left\langle x - \frac{x''}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x''}{2} \right\rangle \delta(x' + x'') = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{A} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \left\langle x + \frac{x'}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x - \frac{x'}{2} \right\rangle = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{A}\widehat{\varrho} \middle| x - \frac{x'}{2} \right\rangle = \mathrm{Sp}(\widehat{A}\widehat{\varrho}) . \qquad (2)
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
\varrho(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \, P(x,p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x'\right) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \widehat{\varrho} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle \delta(x') = \langle x | \widehat{\varrho} | x \rangle . \qquad (3)
\end{aligned}
$$

d.)

$$P(x,p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, \psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px'\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\langle x-\frac{x'}{2}\middle|\,\widehat{\varrho}\,\middle|x+\frac{x'}{2}\right\rangle \delta(x') = \langle x|\widehat{\varrho}|x\rangle\,. \tag{4}$$

e.)

Wir werden $\mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$ auf

$$P(x,p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, \psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\,, \tag{5}$$

an:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{i}\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\left\{\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial t}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)+\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial t}\right\}\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\,. \tag{6}$$

Unter Verwendung der Schrödingergleichung (und ihrer komplex konjugierten)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\,,\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x^2}\,,\,, \tag{7}$$

kommt man auf:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\left\{\frac{\partial^2\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x^2}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)-\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x^2}\right\}\,. \tag{8}$$

Nun schreiben wir eine Ableitung nach x in eine Ableitung nach x' um

$$\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\,,\quad \frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'} = \frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x'} = \frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}\right)\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x} = -2\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}\,,\quad \frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x} = 2\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}\,, \tag{10}$$

also erhalten wir:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\left\{\frac{\partial^2\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x\partial x'}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)+\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\frac{\partial^2\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x\partial x'}\right\}\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\,. \tag{11}$$

Partielle Integration bezüglich x' führt auf (wobei wir beachten müssen, dass die im Zuge der partiellen Integration auftretende Ableitung nach x' auch auf die Exponentialfunktion wirkt):

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)+\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\Bigg|_{x'=-\infty}^{x'=+\infty} \\ &\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\left(\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}+\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right) \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}\hbar p}{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\left(\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)+\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Der zweite Term verschwindet, wenn die Ableitungen nach x' wieder in Ableitungen nach x umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}+\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x'}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}= \\ =\frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)}{\partial x}\right\}=0\,. \tag{13}$$

Der Randterm der partiellen Integration kann mittels der Produktregel für Ableitungen noch weiter vereinfacht und auf die Form

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial x}\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)\bigg|_{x'=-\infty}^{x'=+\infty}\,, \tag{14}$$

gebracht werden. Im Unendlichen verschwindet ψ bzw. ψ^* wegen der Quadratintegrabilität der Wellenfunktion und somit auch dieser Randterm. Der dritte Term lässt sich schließlich auch noch mittels der Produktregel umformen und man erhält schlussendlich:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial P(x,p)}{\partial t}=-\frac{\mathrm{i}\hbar p}{m}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px'}{\hbar}\right)=-\mathrm{i}\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial P(x,p)}{\partial x}\,, \tag{15}$$

also die zu beweisende Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial P(x,p)}{\partial t}+\frac{p}{m}\frac{\partial P(x,p)}{\partial x}=0\,.} \tag{16}$$

Aufgabe 28

a.)

$$\frac{1}{c}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\beta mc^2\right)\psi=\alpha_i\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{q}{c}A_i\right)\psi\,, \tag{17}$$

mit

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma_i\\ \sigma_i & \mathbf{0}\end{pmatrix}\,,\quad \beta=\begin{pmatrix}\mathbb{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\,,\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0\\ Bx\\ 0\end{pmatrix}\,,\quad \psi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}-mc\begin{pmatrix}\phi_1\\ -\phi_2\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix}\sigma_i\phi_2\\ \sigma_i\phi_1\end{pmatrix}-\frac{q}{c}A_i\begin{pmatrix}\sigma_i\phi_2\\ \sigma_i\phi_1\end{pmatrix}\,. \tag{19}$$

Wir können nun beide Gleichungen getrennt behandeln und erhalten:

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-mc\right)\phi_1=\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{q}{c}A_i\right)\sigma_i\phi_2\,, \tag{20a}$$

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+mc\right)\phi_2=\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{q}{c}A_i\right)\sigma_i\phi_1\,. \tag{20b}$$

Wenden wir auf (20a) den Operator

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+mc\,, \tag{21}$$

an und setzen dann (20b) ein, so ergibt sich weiter:

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+mc\right)\left(\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-mc\right)\phi_1=\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{q}{c}A_i\right)\sigma_i\left(\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+mc\right)\phi_2\,, \tag{22}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2c^2\right)\phi_1 = \left\{\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c}A_i\right)\sigma_i\right\}^2 \phi_1\,, \tag{23}$$

also

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right)\phi_1 = \left\{\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c}A_i\right)\sigma_i\right\}^2 \phi_1\,. \tag{24}$$

Wir müssen nun die rechte Seite von (24) auswerten und beachten, dass über $i = 1, 2, 3$ zu summieren ist:

$$R = \left\{-\hbar^2\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}B\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\sigma_i\sigma_y + x\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_i\sigma_y + \sigma_y\sigma_i)\right) + \left(\frac{q}{c}Bx\right)\sigma_y^2\right\}\phi_1\,. \tag{25}$$

Wir verwenden

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}\,, \tag{26}$$

für

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\left([\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\}\right) = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}\,. \tag{27}$$

Damit gilt

$$\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial_j}\mathbb{1} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\mathbb{1}\,. \tag{28}$$

Der erste Term verschwindet hier, weil ε antisymmetrisch und die zweite Ableitung symmetrisch in den Indizes i und j ist. Weiterhin ist $\partial x/\partial x_i = \delta_{1,i}$ und somit:

$$R = \left\{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\mathbb{1} + \mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}B\left(\mathrm{i}\sigma_z + 2x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\frac{q}{c}Bx\right)^2\right\}\phi_1\,. \tag{29}$$

Mit dem angegebenen Ansatz

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(x)\exp(\mathrm{i}(k_y y + k_z z))\,, \tag{30}$$

folgt dann weiter

$$\begin{aligned} R &= \left\{-\hbar^2\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}\mathbb{1} + \hbar^2k_y^2\mathbb{1} + \hbar^2k_z^2\mathbb{1} - 2\hbar\frac{q}{c}Bxk_y + \left(\frac{q}{c}Bx\right)^2\right\}\phi_1 = \\ &= \left\{-\hbar^2\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}\mathbb{1} + \left(\hbar k_y - \frac{q}{c}Bx\right)^2 + \hbar^2k_z^2 - \hbar\frac{q}{c}B\sigma_z\right\}\phi_1\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Wir kommen somit auf folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\left\{\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \left(\hbar k_y - \frac{q}{c}Bx\right)^2\chi_1 + \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - \hbar^2k_z^2 + \frac{\hbar q}{c}B\sigma_z\right)\right\}\chi_1 = 0\,,} \tag{32}$$

b.)

Zur Lösung dieser Differentialgleichung schauen wir uns zuerst die zeitunabhängige Schrödingergleichung des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators an:

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)\,, \quad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\,, \tag{33}$$

also

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)\,. \tag{34}$$

Deren Lösungen sind gegeben durch

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\,, \tag{35}$$

mit den Energieeigenwerten

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\,, \tag{36}$$

mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir wollen eine neue Variable $\chi = Cx$ einführen, um die Differentialgleichung (34) auf folgende Form zu bringen:

$$\boxed{\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\chi^2} + \chi^2\right)\widetilde{\psi}_n(\chi) = \widetilde{E}\widetilde{\psi}_n(\chi)\,.} \tag{37}$$

Setzen wir darin $\chi = Cx$ ein, ergibt sich

$$\left(-\frac{1}{C^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + C^2x^2\right)\widetilde{\psi}_n(Cx) = \widetilde{E}_n\widetilde{\psi}_n(Cx)\,. \tag{38}$$

und ein Vergleich mit (34) liefert mit beiden Gleichungen

$$\frac{1}{C^2\widetilde{E}} = \frac{\hbar^2}{2mE}\,,\quad \frac{C^2}{\widetilde{E}} = \frac{m\omega^2}{2E}\,, \tag{39}$$

mit den Lösungen

$$\widetilde{E} = \frac{2}{\hbar\omega}E\,,\quad C = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,. \tag{40}$$

Der numerische Vorfaktor der Wellenfunktion folgt aus deren Normierung. Da $\psi(x)$ auf eins normiert ist, muss dies auch $\widetilde{\psi}(\chi)$ sein.

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,|\psi(x)|^2 = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\chi\,|\psi(\chi/C)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\chi\,\left|\frac{1}{\sqrt{C}}\psi(\chi/C)\right|^2\,. \tag{41}$$

Damit muss also folgende Übersetzungsvorschrift für die Wellenfunktion gelten:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\psi\left(\frac{\chi}{C}\right)\,,\quad C = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,. \tag{42}$$

In der neuen Variablen χ lautet die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators (37) und deren Lösung zusammen mit den Energieeigenwerten:

$$\boxed{\widetilde{\psi}_n(\chi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\chi)\exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)\,,\quad \widetilde{E}_n = 2n+1\,.} \tag{43}$$

b.)

Wir schreiben die Differentialgleichung (32) folgendermaßen um:

$$\left\{\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{qB}{c}\right)^2\left(x - \frac{\hbar k_y c}{qB}\right)^2\chi_1 + \widetilde{E}\right\}\chi_1 = 0\,,\quad \widetilde{E} = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - \hbar^2k_z^2 + \frac{\hbar q}{c}B\sigma_z\,. \tag{44}$$

Nun müssen wir (analog zu vorher) eine Substitution $\xi = \widetilde{C}(x - x_0)$ finden, welche diese Differentialgleichung auf die Form

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2 + a_\sigma\right)\chi_1(x) = 0\,, \tag{45}$$

bringt. $x_0 = c\hbar k_y/(qB)$ kann man sofort ablesen. $\widetilde{C}$ und a_σ ergeben sich aus den folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{\widetilde{C}^2a_\sigma} = \frac{\hbar^2}{\widetilde{E}}\,,\quad \frac{\widetilde{C}^2}{a_\sigma} = \left(\frac{qB}{c}\right)^2\,,\qquad \Rightarrow\quad \widetilde{C} = \sqrt{\frac{|q|B}{\hbar c}}\,,\quad a_\sigma = \frac{c}{\hbar|q|B}\widetilde{E}\,. \tag{46}$$

Damit ist die neue Differentialgleichung gegeben durch, wobei $\sigma = \pm 1$ die Eigenwerte der dritten Paulimatrix σ_z sind und die Ausrichtung des Spins vorgibt:

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2 + a_\sigma\right)\chi_1(x) = 0\,, \quad a_\sigma = \frac{\frac{E^2}{c} - m^2c^3 - c\hbar^2k_z^2 + \hbar q\sigma B}{\hbar|q|B}\,.} \tag{47}$$

Die Lösungen und Eigenwerte der Gleichung (45) sind analog zu denen, die wir in (43) gefunden haben. Es gilt also

$$\boxed{\chi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)\,.} \tag{48}$$

Weiterhin muss $a_\sigma = 2n+1$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sein. Daraus lassen sich die Energieeigenwerte bestimmen, wobei $q = \mathrm{sign}(q)|q|$ ausgenutzt wird:

$$E_{n,\sigma}^2 = (2n+1-\mathrm{sign}(q)\sigma)\hbar c|q|B + (mc^2)^2 + (c\hbar k_z)^2\,. \tag{49}$$

In der Aufgabe handelt es sich um ein Elektron mit $q = -e$. Außerdem ist $\mathrm{sign}(q)\sigma$ eine ganze Zahl (entweder 1 oder -1), was man ausnutzen kann, um den Index n, welcher die Energieniveaus durchzählt, umzudefinieren:

$$2n+1-\mathrm{sign}(q)\sigma = 2n+1+\sigma \equiv 2n'\,. \tag{50}$$

Mit $\hbar k_z = p_z$ gilt dann schlussendlich:

$$\boxed{E_{n'} = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (cp_z)^2 + 2n'\hbar ceB}\,.} \tag{51}$$

Die negativen Energieniveaus stehen für Antiteilchen (Positronen) bzw. Löcher im Festkörper. $\sigma = -1$ entspricht $n = n'$ und $\sigma = 1$ entspricht $n' = n-1$. Alle Energien sind zweifach entartet bis auf die mit $n' = 0$, da alle $n' \neq 0$ aus $\sigma = 1$ und $\sigma = -1$ konstruiert werden können.

c.)

Wir ziehen den Faktor $(mc^2)^2 > 0$ aus der Wurzel heraus und verwenden

$$E_{n'} = \pm mc^2\sqrt{1 + \frac{p_z^2}{m^2c^2} + \frac{2n'\hbar ceB}{m^2c^4}} \approx \boxed{mc^2 + \frac{p_z^2}{2m} + n'\frac{\hbar e}{mc}B\,.} \tag{52}$$