Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.10

Aufgabe 29

Wir benötigen die Transformationsgesetze $\psi'(x') = S\psi(x)$ mit $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$. Adjungieren wir die letzte Gleichung, so ergibt sich

$$S^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(S^{-1})^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu(\gamma^\nu)^\dagger\,.$$

Durch Einfügen von $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ folgt weiter:

$$S^\dagger\gamma^0\underbrace{\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0}_{\gamma^\mu}\gamma^0(S^{-1})^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^0\underbrace{\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0}_{\gamma^\nu}\gamma^0\,.$$

Multiplikation von links bzw. rechts mit γ^0 führt auf

$$\underbrace{\gamma^0S^\dagger\gamma^0}_{S^{-1}}\gamma^\mu\underbrace{\gamma^0(S^{-1})^\dagger\gamma^0}_{=S} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\,,\ \text{also}\ \boxed{\gamma^0S^\dagger\gamma^0 = S^{-1}\,,\quad \gamma^0(S^{-1})^\dagger\gamma^0 = S\,.}$$

a.)

$$x'^\mu y'_\mu = \Lambda^\mu{}_\varrho x^\varrho\Lambda_\mu{}^\sigma x_\sigma = \delta_\varrho{}^\sigma x^\varrho x_\sigma = x^\varrho x_\varrho\,. \tag{1}$$

b.)

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\psi'(x') &= \psi'^\dagger(x')\gamma^0\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0S\psi(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0\underbrace{\gamma^0S^\dagger\gamma^0}_{S^{-1}}S\psi(x) = \\ &= \overline{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

c.)

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') &= \psi^\dagger(x')\gamma^0\gamma^\mu\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S\psi(x) = \psi^\dagger(x)\underbrace{\gamma^0S^\dagger\gamma^0}_{S^{-1}}\gamma^\mu S\psi(x) = \\ &= \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

d.)

Mittels der Definition

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\,, \tag{4}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \psi^\dagger(x')S^\dagger\gamma^0\sigma^{\mu\nu}S\psi(x) = \overline{\psi}(x)S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S\psi(x) = \overline{\psi}(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu S - S^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu S\right\}\psi(x) = \\ &= \overline{\psi}(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda^\mu{}_\varrho\gamma^\varrho}\underbrace{S^{-1}\gamma^\nu S}_{\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma} - \underbrace{S^{-1}\gamma^\nu S}_{\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma}\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda^\mu{}_\varrho\gamma^\varrho}\Big\}\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\varrho\Lambda^\nu{}_\sigma\overline{\psi}(x)\sigma^{\varrho\sigma}\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{5}$$

e.)

Mit der Definition

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varrho\gamma^\sigma\,, \tag{6}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^5 S &= \frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\varrho SS^{-1}\gamma^\sigma = \frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\gamma^\beta\Lambda^\varrho{}_\gamma\gamma^\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\gamma^\delta = \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\varrho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = \det(\Lambda)\gamma^5\,, \end{aligned} \tag{7}$$

unter Verwendung von $\det(\Lambda) = \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_1\Lambda^\varrho{}_2\Lambda^\sigma{}_3$. Über α, β, γ und δ wird von 0 bis 3 summiert. Betrachten wir $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$, also eine beliebige Permutation von $(0,1,2,3)$. Eine bestimmte Anzahl von Transpositionen (Vertauschen benachbarter γ-Matrizen) führt auf die Reihenfolge $(0,1,2,3)$. Wegen $\gamma^\alpha\gamma^\beta = -\gamma^\beta\gamma^\alpha$ für $\alpha \neq \beta$ bekommt von einen Vorfaktor $(-1)^N$, wobei N die Anzahl der benötigten Transpositionen ist. Um den Ausdruck nach dieser Umformung auf Originalgestalt zu bringen, benennt man die Indizes μ, ν, ϱ, σ entsprechend um und bringt das antisymmetrische ϵ-Symbol durch entsprechende N Permutationen wieder auf Originalgestalt. Der zusätzlich auftretende Faktor $(-1)^N$ hebt sich mit dem vorherigen $(-1)^N$ weg. Führen wir dies für eine Transposition durch:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_1\Lambda^\nu{}_0\Lambda^\varrho{}_2\Lambda^\sigma{}_3\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 &= -\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\nu{}_0\Lambda^\mu{}_1\Lambda^\varrho{}_2\Lambda^\sigma{}_3 = -\varepsilon_{\nu\mu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_1\Lambda^\varrho{}_2\Lambda^\sigma{}_3 = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_1\Lambda^\varrho{}_2\Lambda^\sigma{}_3\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Sind zwei Indizes gleich, trägt der entsprechende Term nicht bei:

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0(\gamma^0)^2 = -\varepsilon_{\nu\mu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0(\gamma^0)^2 = -\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0(\gamma^0)^2 \Rightarrow \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0(\gamma^0)^2 = 0\,. \tag{9}$$

Damit gilt nun:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}'(x')\gamma^5\gamma^\mu\psi'(x') &= \psi^\dagger(x')\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu S\psi(x) = \\ &= \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma^5\gamma^\mu S\psi(x) = \overline{\psi}(x)\underbrace{S^{-1}\gamma^5 S}_{=\det(\Lambda)\gamma^5}\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\psi(x) = (\det\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

f.)

Analog zu vorher zeigen wir das Transformationverhalten für den Pseudoskalar:

$$\overline{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0\gamma^5\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0\gamma^5 S\psi(x) = \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma^5 S\psi(x) = (\det\Lambda)\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\,. \tag{11}$$

Aufgabe 30

a.)

Wir benötigen die Darstellung der Exponentialfunktion als Grenzwert einer Reihe, also

$$\exp(a) = \lim_{n\mapsto\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\,. \tag{12}$$

Berechnen müssen wir den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{N\mapsto\infty}\left(\mathbb{1}_4 + \frac{\vartheta B}{N}\right)^N\,,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp(\vartheta B)\,. \tag{13}$$

Die Exponentialfunktion $\exp(\vartheta B)$ berechnen wir wie üblich mit ihrer Reihendarstellung:

$$\exp(\vartheta B) = \mathbb{1}_4 - B^0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)!}\vartheta^{2n}B^{2n} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)!}\vartheta^{2n+1}B^{2n+1}\,. \tag{14}$$

Wir benötigen nun die geraden und ungeraden Potenzen der Matrix B:

$$B^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Damit folgt nun:

$$\begin{aligned}
\exp(\vartheta B) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\vartheta^{2n} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\vartheta^{2n+1} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\vartheta) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin(\vartheta) = \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Die 3×3-Untermatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

beschreibt eine Drehung um die z-Achse.

b.)

Was wir in der Aufgabe im Wesentlichen berechnen, ist der Kommutator der definierten Größe

$$\tau = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\,, \quad \Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}\,, \tag{18}$$

mit der γ-Matrix γ^μ. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\tau &= \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\gamma^\mu(\gamma_\varrho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\varrho) = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\left\{(2\delta^\mu{}_\varrho - \gamma_\varrho\gamma^\mu)\gamma_\sigma - (2\delta^\mu{}_\sigma - \gamma_\sigma\gamma^\mu)\gamma_\varrho\right\} = \\
&= \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho - \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\gamma_\varrho\gamma^\mu\gamma_\sigma + \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma_\varrho = \\
&= \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho - \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\gamma_\varrho(2\delta^\mu{}_\sigma - \gamma_\sigma\gamma^\mu) + \frac{1}{8}\Delta\omega^{\varrho\sigma}\gamma_\sigma(2\delta^\mu{}_\varrho - \gamma_\varrho\gamma^\mu) = \\
&= \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho + \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma + \tau\gamma^\mu\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Damit ist

$$\gamma^\mu\tau - \tau\gamma^\mu = \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho - \frac{1}{4}\Delta\omega^{\varrho\mu}\gamma_\varrho + \frac{1}{4}\Delta\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma = \Delta\omega^{\mu\nu}\gamma_\nu\,, \tag{20}$$

was aus der Asymmetrie von $\Delta\omega^{\mu\nu}$ folgt.