Untersuchungen zur Lorentzsymmetriebrechung in der modifizierten Maxwell-Theorie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Physik des

Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Marco Schreck

aus Sinsheim (Baden-Württemberg)

Karlsruher Institut für Technologie – Campus Süd
Fakultät für Physik
Institut für Theoretische Physik

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Oktober 2010
Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer (IThP, Karlsruher Institut für Technologie)
Korreferent: Prof. Dr. C. Lämmerzahl (ZARM, Universität Bremen)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **7**

1. Einleitung **9**

Teil I. Lorentzsymmetrie-verletzende Modifikation der Maxwell-Theorie **13**

2. Die Lorentzinvarianz und deren Verletzung **15**
2.1. Symmetrien 15
2.2. Brechung der Lorentzinvarianz 17
2.3. Physikalische Effekte 20

3. Einführung des Modells **23**
3.1. Wirkung der modifizierten Quantenelektrodynamik 23
3.2. Die Feldgleichungen der modifizierten Theorie 26
3.3. Der nicht-doppelbrechende Ansatz 27
3.4. Allgemeine Bemerkungen zur Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit . . 27
3.5. Der räumlich isotrope Fall 28
3.6. Räumlich anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Richtung 31
3.7. Anisotroper Fall mit zwei Vorzugsrichtungen 33

Teil II. Modifizierte teilchenphysikalische Prozesse **35**

4. Die Vakuum-Cherenkov-Strahlung **37**
4.1. Bemerkungen zur klassischen Cherenkov-Strahlung 37
4.2. Berechnung der Schwellenenergie und der Zerfallsbreite der Vakuum-Cherenkov-Strahlung 40
4.3. Die Modifikation der Polarisationsvektoren und der Polarisationssumme 42
4.4. Berechnung der Zerfallsbreite 44
4.5. Verlustrate des Viererimpulses 49
4.6. Diskussion der Ergebnisse 51
4.7. Abschätzung für die Strahlungslänge eines ultra-hochenergetischen Teilchens . 57
4.8. Das Spektrum der Vakuum-Cherenkov-Strahlung 58
4.9. Vergleich mit semiklassischen Ergebnissen 59

5. Der Photonzerfall **63**
5.1. Das Amplitudenquadrat für Spin-1/2-Fermionen und skalare Teilchen 64
5.2. Berechnung der Zerfallsbreite 65
5.3. Diskussion der Ergebnisse 66

6. Der Proton-Breakup-Prozess **69**
6.1. Das Proton als punktförmiges Teilchen 70
6.2. Der Proton-Breakup-Prozess in der modifizierten Quantenelektrodynamik . . . 70
6.3. Das Proton als ausgedehntes Teilchen 71
6.4. Der Proton-Breakup-Prozess im Partonmodell 73
6.5. Auswirkungen der Lorentzsymmetrieverletzung im Eichsektor der Partonen . . 76
6.6. Berechnung der Zerfallsbreite des Prozesses 79

7. Die Schwellenenergie und Abstrahlungsrate des (Vakuum-)Cherenkov-Prozesses für eine Ladungsverteilung **81**
7.1. Klassischer Zugang 81
7.2. Quantenfeldtheoretischer Zugang 82
7.3. Klassische Cherenkov-Strahlung und Vakuum-Cherenkov-Strahlung 85

8. Bestimmung experimenteller Schranken **89**
8.1. Klassifikation experimenteller Schranken 89
8.2. Ursprung ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung 90
8.3. Experimente zur Detektion und Vermessung ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung 91
8.4. Neue Schranke an den Parameter der isotropen modifizierten Maxwell-Theorie 92

9. Zusammenfassung zu Teil II **99**

Teil III. Untersuchungen zur Unitarität und Mikrokausalität **101**

10. Einführung **103**

11. Räumlich isotroper Fall (Fall 1) **107**
11.1. Lichtkegel 107
11.2. Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit der Theorie 108
11.3. Der modifizierte Photonpropagator in verschiedenen Eichungen 108
11.4. Verhalten des Feynman-Propagators unter Wick-Rotation 112
11.5. Die Subluminitätsbedingung 117
11.6. Der Kommutator des Vektorpotentials an verschiedenen Raumzeit-Punkten . . 117
11.7. Die Kommutatoren der physikalischen Felder 118
11.8. Untersuchungen zur Unitarität 121

12. Anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung (Fall 2) 125
12.1. Phasen-, Gruppen-, und Frontgeschwindigkeit der Theorie 126
12.2. Verhalten des Feynman-Propagators bezüglich Wick-Rotation 127
12.3. Der Propagator in verschiedenen Eichungen 127
12.4. Die Kommutatoren der physikalischen Felder 128
12.5. Reflexions-Positivität 129

13. Anisotroper Fall mit zwei Raumzeit-Richtungen (Fall 3) 131
13.1. Die Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit der Theorie 132
13.2. Der Propagator in axialer Eichung 134
13.3. Verhalten des Feynman-Propagators unter Wick-Rotation 135
13.4. Reflexions-Positivität 136
13.5. Untersuchung der Unitarität mittels des optischen Theorems 138

14. Diskussion der Ergebnisse 145
14.1. Effektive Metrik, invariante und maximale Geschwindigkeit 145
14.2. Zusätzliche Interpretation mittels des Casimir- und Scharnhorst-Effekts 149

15. Zusammenfassung zu Teil III 151

Teil IV. Berechnung von Quantenkorrekturen in der modifizierten Quantenelektrodynamik 153

16. Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau 155
16.1. Berechnung von Ein-Schleifen-Korrekturen zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung . 155
16.2. Behandlung des Lorentzsymmetrie-brechenden Anteils als Vertex-Einsetzung . 162
16.3. Die fermionische Selbstenergie 164
16.4. Die Vertexkorrektur 165
16.5. Techniken zur Berechnung der Quantenkorrekturen mit hierarchischen Skalen . 167
16.6. Anwendung der asymptotischen Entwicklung 171

17. Die Ward-Identität in der Quantenelektrodynamik 175
17.1. Ward-Identitäten – quantenfeldtheoretische Erhaltungssätze 175
17.2. Die Ward-Identität in der modifizierten Quantenelektrodynamik 177

18. Zerfallsbreite des Photonzerfalls mittels des optischen Theorems 181

19. Zusammenfassung zu Teil IV 185

Teil V. Compton-Streuprozess im Schwarzschild-Hintergrund mit modifizierter

Photondispersionsrelation und Streuamplitude **187**

20. Einleitung **189**

21. Compton-Streuung **191**
21.1. Compton-Streuung in gewöhnlicher Quantenelektrodynamik 191
21.2. Compton-Streuung im isotropen Fall der modifizierten Quantenelektrodynamik 193

22. Die Schwarzschild-Lösung **195**
22.1. Isometrien und Killing-Vektoren 195
22.2. Thermodynamik schwarzer Löcher 197

23. Kopplung der Gravitation an die modifizierte Maxwell-Theorie **201**
23.1. Folgen für schwarze Löcher 201
23.2. Modifizierte Quantenelektrodynamik in gekrümmter Raumzeit 201
23.3. Untersuchungen zum Compton-Streuprozess in der Ergosphäre 203
23.4. Numerische Analyse des Prozesses 209

24. Die endliche Lücke bezüglich der Lorentzsymmetrie-Verletzung **219**
24.1. Numerische Überlegungen bezüglich des Phasenraums 219
24.2. Robustheit des Ergebnisses 220
24.3. Diskussion der Ergebnisse 220

25. Zusammenfassung zu Teil V **223**

26. Zusammenfassung und Ausblick **225**

Teil VI. Anhang **229**

A. Berechnung von Zerfallsbreiten **231**
A.1. Die δ-Funktion und einige ihrer Eigenschaften 231
A.2. Polarisationsvektoren und Polarisationssumme 232
A.3. Proton-Breakup-Prozess 240

B. Transformation der Lorentzsymmetrieverletzung vom Photonsektor zum Materiesektor **247**
B.1. Modifizierte Dispersionsrelation für massive Spin-1/2-Fermionen 250

C. Klassische Cherenkov-Strahlung **253**
C.1. Abgestrahlte Energie einer einzelnen Ladung 253
C.2. Abgestrahlte Energie einer klassischen Ladungsverteilung 255

D. Berechnungen zur Unitarität und Mikrokausalität **259**
D.1. Berechnung der Kommutatorfunktion des Vektorpotentials 259

D.2. Berechnung der Kommutatoren der physikalischen Felder 262
D.3. Berechnung der Kommutatorfunktion 265
D.4. Auswertung der Reflexions-Positivität 268
D.5. Uneigentliche Integrale über Produkte von trigonometrischen Funktionen . . . 270

E. Technische Einzelheiten zur Berechnung der Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau 273
E.1. Die Passarino-Veltman-Zerlegung der auftretenden Tensorintegrale 273

F. Nebenrechnungen zur Compton-Streuung am schwarzen Loch 277
F.1. Lösung der Killing-Gleichung in der Schwarzschild-Raumzeit 277
F.2. Berechnung von Killing-Energie und Killing-Drehimpuls 279
F.3. Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung in der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik 281
F.4. Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung in der modifizierten Quantenelektrodynamik 282
F.5. Bemerkungen zur numerischen Analyse 283

Summary 285

Symbolverzeichnis 291

Index 292

Literaturverzeichnis 299

Danksagung 306

Lebenslauf 309

Kapitel 1.

Einleitung

Symmetrien ermöglichen eine sehr elegante und effiziente Beschreibung physikalischer Phänomene und spielen daher eine herausragende Rolle in allen Bereichen der theoretischen Physik. Im Falle kontinuierlicher Symmetrien liefert das Noether-Theorem Erhaltungsgrößen, und Zustände hängen mit den Darstellungen der jeweiligen Symmetriegruppe zusammen. Diese Darstellungen können wiederum entweder durch diskrete Quantenzahlen oder durch kontinuierliche Parameter charakterisiert werden, wobei aus den Erhaltungssätzen folgt, dass sich die Summen dieser Quantenzahlen bzw. Parameter bei der zeitlichen Entwicklung physikalischer Zustände nicht ändert [1]. Das Verständnis der Symmetrien einer Theorie gewährt somit einen tiefen Einblick in deren Struktur, ohne dass eine explizite Lösung der Dynamik notwendig ist.

Die Symmetriegruppe der speziellen Relativitätstheorie ist die Poincaré-Gruppe. Sie setzt sich zusammen aus der Lorentzgruppe O(3,1), welche das Minkowski-Längenquadrat invariant lässt, und der Translationsgruppe des Minkowski-Raums. Diese Symmetrie wird als Lorentzsymmetrie bezeichnet, und sie erlaubt es einem, einen Großteil der Physik der speziellen Relativitätstheorie zu verstehen. Zum einen beinhaltet sie das Axiom über die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und zum anderen die Lichtkegelstruktur, welche grundlegend für die Dispersionsrelationen von massiven und masselosen Teilchen sowie die Kausalität der Theorie ist. Die Eigenschaft einer bestehenden Lorentzsymmetrie nennt man auch Lorentzinvarianz.

Jedoch sind Symmetrien, die man in der theoretischen Physik aus unterschiedlichen Gründen postuliert, in der Natur meistens experimentell nachweisbar gebrochen, manche explizit und andere spontan durch den Grundzustand. Zum Beispiel glaubte man lange Zeit, dass physikalische Gesetze invariant sind bezüglich Raumspiegelung. Lange bevor die Theorie der schwachen Wechselwirkung von Glashow, Weinberg und Salam etabliert wurde, hatte Weyl die Idee für eine Theorie mit einer Vektor-Axialvektor-Struktur gehabt. Jedoch war diese von Pauli barsch zurückgewiesen worden [2], da sie offensichtlich die eben erwähnte Invarianz unter Raumspiegelung verletzte. Diese Meinung hielt sich noch Jahrzehnte in der Physikergemeinschaft, bis in den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts eben diese Verletzung durch Wu et al. experimentell nachgewiesen wurde [3].

Aus der Geschichte hat man gelernt und heute ist man dahingehend offener. Obwohl es in den Experimenten bisher so aussieht, als wäre die Lorentzinvarianz der Raumzeit bis zu den höchs-

ten gemessenen Energien eine exakte Symmetrie, kann sie unter bestimmten Voraussetzungen verletzt sein. Mit einer gebrochenen Lorentzsymmetrie gehen interessante physikalische Effekte einher, und aus einer Untersuchung derselbigen lassen sich neue Einsichten in das physikalische Weltbild gewinnen. Eine solche Verletzung experimentell nachzuweisen, wäre ein direkter Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells. Zum Beispiel könnte dies auf eine mikroskopische Struktur der Raumzeit hindeuten, wobei in diesem Zusammenhang oft das Schlagwort „Raumzeitschaum“ [4, 5] fällt. Darüber hinaus tritt eine Verletzung der Lorentzsymmetrie in gewissen Szenarien der Stringtheorie [6, 7, 8], nichtkommutativen Feldtheorie [9], der Schleifenquantengravitation [10] und Modellen mit nichttrivialer Topologie der Raumzeit [11, 12, 13] auf.

In der Tat gibt es eine sehr umfangreiche Sammlung von Modellen, welche die Lorentzsymmetrie-verletzung im Niederenergielimes in Form einer effektiven Theorie behandeln. Von großer Bedeutung für die Untersuchung phänomenologischer Auswirkungen ist die „Lorentzsymmetrie-verletzende Erweiterung des Standardmodells“ – eine Zusammenstellung aller renormierbaren Terme, die sich aus Lorentzsymmetrie-verletzenden Operatoren und Feldern des Standardmodells konstruieren lassen [14]. Diese Dissertation beschäftigt sich mit der modifizierten Maxwell-Theorie, welche eine Verletzung der Lorentzsymmetrie im Photonsektor parametrisiert. Da diese Theorie bisher eher wenig untersucht wurde, ist es das Ziel, sie in allen möglichen bisweilen auch stark unterschiedlichen Facetten zu beleuchten und physikalisch zu verstehen.

Die Dissertation ist in sechs große Abschnitte gegliedert. Teil I beinhaltet eine Einführung in die Theorie der Lorentzsymmetrieverletzung, wobei hier auf formale Aspekte verzichtet wird und die Grundbegriffe physikalisch motiviert und anschaulich erläutert werden sollen. Im Mittelpunkt steht der Abschnitt zur Einführung des zugrundeliegenden Modells, nämlich der modifizierten Maxwell-Theorie bzw. der modifizierten Quantenelektrodynamik. Auf einige wichtige Spezialfälle der Theorie wird hier ausführlich eingegangen. Teil II widmet sich verstärkt der Phänomenologie und der Untersuchung von teilchenphysikalischen Prozessen, die bei verletzter Lorentzsymmetrie im Photonsektor auftreten. Dazu gehören beispielsweise die Vakuum-Cherenkov-Strahlung, der Photonzerfall oder auch Modifikationen des Partonmodells. Dieser Teil ist eng auf aktuelle experimentelle Ergebnisse ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung gestützt. Teil III umfasst eine formalere Untersuchung der Theorie. Hier wird insbesondere auf Gesichtspunkte wie Kausalität und Unitarität eingegangen. Derartige Untersuchungen wurden für die gewöhnliche Quantenelektrodynamik bereits um 1920 durchgeführt und bestätigten die genannten Eigenschaften. Für Theorien mit verletzter Lorentzsymmetrie ist jedoch die Gültigkeit dieser Annahmen nicht unbedingt gewährleistet und muss erst einer Überprüfung unterzogen werden. Teil IV wiederum beschäftigt sich mit Quantenkorrekturen und deren Berechnung in der modifizierten Quantenelektrodynamik. Diese schließt eine explizite Überprüfung der Ward-Identität und auch der UV-Renormierbarkeit der Theorie auf Ein-Schleifen-Niveau ein. Abschließend wird in Teil V die modifizierte Maxwell-Theorie an die Gravitation gekoppelt. Eine solche Vereinheitlichung könnte zur Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik schwarzer Löcher führen, was die physikalische

Konsistenz einer solchen Theorie in Frage stellen würde. Diese Problemstellung soll anhand eines gedanklichen Compton-Streuexperiments gründlich untersucht werden. Das abschließende letzte Kapitel des Hauptteils der Dissertation gibt eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der Arbeit und einen Ausblick auf weitere Untersuchungen, die lohnenswert sein können.

Auf längere Rechnungen wird im Hauptteil verzichtet, sofern sie nicht unbedingt zum physikalischen Verständnis beitragen. Ansonsten werden diese im Anhang (Teil VI) ausführlich präsentiert. Darüber hinaus verwenden wir natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$, wobei wir zur besseren Verständlichkeit an bestimmten Stellen $\hbar$ und c wieder einsetzen.

Wir haben hier dauernd das Wort Vakuum benutzt statt des sonst of gebrauchten Wortes „Äther“ („Lichtäther“), weil uns jenes negative Wort immer noch mehr Inhalt zu haben scheint als dieses scholastische Wort, welches falsche, mit der Relativitätstheorie unvereinbare Vorstellungen weckt.

Arnold Sommerfeld

Teil I.

Lorentzsymmetrie-verletzende Modifikation der Maxwell-Theorie

Kapitel 2.

Die Lorentzinvarianz und deren Verletzung

2.1. Symmetrien

Um zu verstehen, was es überhaupt heißt, die Lorentzinvarianz zu brechen, muss man zunächst wissen, dass Transformationen in zwei Klassen eingeteilt werden können. In der englischen Fachliteratur werden Transformationen, die zur ersten Gruppe gehören, oft „observer transformations“ und die der zweiten Gruppe „particle transformations“ genannt. Da im Deutschen die direkt übersetzten Ausdrücke unüblich sind, bezeichnen wir im Folgenden die ersten als passive und die zweiten als aktive Transformationen.

Um den Unterschied zwischen aktiven und passiven Transformationen zu verstehen, betrachten wir als Beispiel den Ferromagneten. Ein Ferromagnet ist ein Metall, in dem sich unterhalb ei-

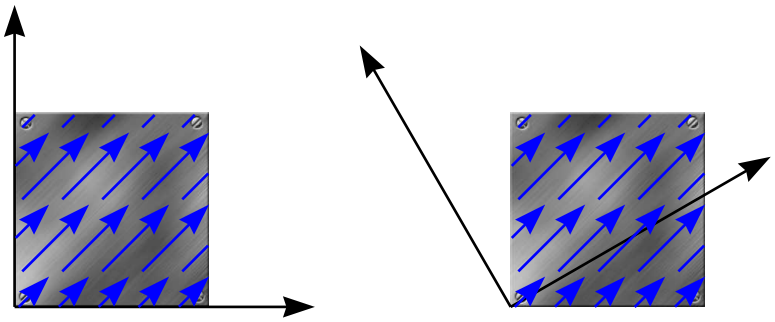


Abbildung 2.1.: Magnetisierung **M** eines Ferromagneten. Dargestellt ist eine passive Drehung, also ein Basiswechsel.

ner kritischen Temperatur T_c Domänen – die sogenannten Weißschen Bezirke – bilden, die eine spontane permanente Magnetisierung aufweisen, also ohne dass ein äußeres Magnetfeld angelegt wird. Oberhalb von T_c wird diese Magnetisierung zerstört und das Material verhält sich dann paramagnetisch. Beschreiben wir die Magnetisierung durch einen Vektor **M**. Dieser soll im ganzen Ferromagneten gleich sein; wir vernachlässigen also die Ausbildung der erwähnten Weißschen Bezirke und Domänengrenzen, welche für die folgende einfache Analogiebetrachtung keine Rolle spielen. Die Komponenten von **M** werden durch die Wahl des Koordinatensystems, also der Basis, festgelegt. Schauen wir uns nun eine bestimmte Transformation an, nämlich

die Drehung im dreidimensionalen Raum. Vollzieht man eine passive Drehung, so bedeutet das eine Drehung des Koordinatensystems, also der Basis. Dies führt zwangsläufig auch zu einer Änderung der Koordinaten von **M**. Für den Ferromagneten und die einhergehenden physikalischen Effekte ist es jedoch vollkommen unwichtig, was für ein Koordinatensystem gewählt wird! Die Physik bleibt dieselbe, wir ändern bei einer passiven Drehung nur ihre Beschreibung; eine passive Transformation ist also nichts anderes als eine Transformation der Koordinaten. Vollkommen anders verhält sich das Ganze jedoch, wenn wir eine Drehung durchführen, welche die Spins im Ferromagneten anders ausrichtet. Da die Existenz von **M** ein ausgezeichnetes Bezugssystem festlegt, handelt es sich dabei um eine Drehung bezüglich des ausgezeichneten Systems, also um eine aktive Drehung. Diese führt einen beobachtbaren physikalischen Effekt nach sich, der sich zeigt, sobald wir ein zusätzliches elektrisch geladenes Teilchen – beispielsweise eine Elektron – in die Nähe des Ferromagneten bringen. Den Unterschied zur vorherigen passiven Drehung soll folgendes Gedankenexperiment veranschaulichen. Wir präparieren im Unendlichen ein Elektron so, dass sich dieses auf den Ferromagneten zu bewegt. Aufgrund des Magnetfeldes, welches vom Ferromagneten ausgeht, wird das Teilchen abgelenkt, bevor es wieder ins Unendliche entkommt. Danach ändern wir die Magnetisierung des Ferromagneten, also die Richtung (aber nicht den Betrag) von **M** und präparieren ein zweites Elektron im Unendlichen, so dass auch dieses auf dieselbe Weise wie das Elektron zuvor auf den Ferromagneten zu fliegt. Dieses Elektron wird jedoch aufgrund der geänderten Magnetisierung eine andere Ablenkung erfahren und auf einer anderen Bahn ins Unendliche entkommen als das erste Elektron. Die aktive Drehung von **M** zeigt sich in ihrer physikalischen Auswirkung auf die Bahn des Teilchens.

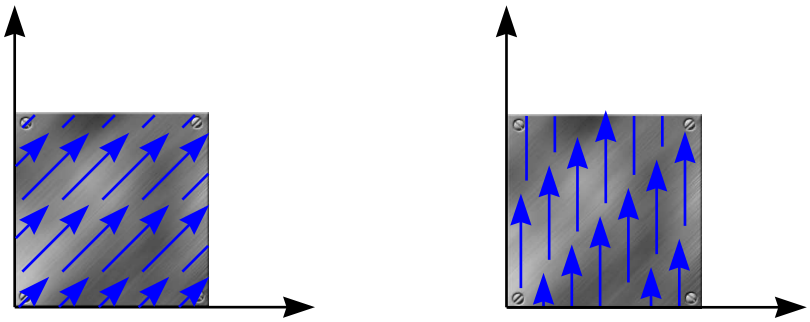


Abbildung 2.2.: Hier ist eine aktive Drehung veranschaulicht, die zu einer Änderung des Magnetisierungsvektors **M** führt, also zu abweichenden physikalischen Effekten.

Der zugrundeliegende physikalische Effekt ist die spontane Symmetriebrechung, bei der die möglichen Grundzustände der Magnetisierung, welche durch alle Richtungen von **M** im dreidimensionalen Raum charakterisiert werden, durch aktive Drehungen miteinander verknüpft sind. Der Ferromagnet wählt einen bestimmten Grundzustand. Eben diese Wahl zeichnet eine Richtung im dreidimensionalen Raum aus und bricht die aktive Symmetrie, während die passive davon unberührt bleibt. Die Verletzung der aktiven Drehinvarianz zeigt sich dann durch Einbringen eines Testteilchens. Das ist ein sehr wichtiges Prinzip, denn es ergibt physikalisch keinen Sinn, von einer Verletzung der passiven Invarianz zu reden, weil dies bedeuten würde,

dass physikalische Phänomene von der Wahl der Koordinaten abhängig sind. Eine Verletzung der aktiven Invarianz muss durch einen physikalischen Effekt geschehen, im Falle des Ferromagneten beispielsweise durch ein äußeres Magnetfeld, das die Ausrichtung der magnetischen Momente der Atome ändert.

2.2. Brechung der Lorentzinvarianz

Diese Analogie können wir nun auf beliebige Transformationen, insbesondere Lorentztransformationen übertragen. Durch eine passive Lorentztransformation ändern wir die Basis aller Vierervektoren im Minkowski-Raum, nicht aber die Physik; dies geschieht nur durch eine aktive Lorentztransformation. Wie bereits erwähnt, sind beide Arten von Transformationen gleichwertig, sofern die zugrunde liegende Symmetrie erhalten ist.

Wodurch kann eine Brechung der aktiven Lorentzinvarianz erfolgen? In der speziellen Relativitätstheorie ist die vierdimensionale Raumzeit homogen und isotrop. In der Homogenität spiegelt sich die Invarianz unter Translationen wider und in der Isotropie die Invarianz unter homogenen Lorentztransformationen, also Boosts und räumlichen Drehungen. Diese Homogenität und Isotropie der Raumzeit ist auf großen Skalen bzw. kleinen Energien wohl etabliert. Sowohl die spezielle als auch die allgemeine Relativitätstheorie sind jedoch klassische Theorien, welche Quanteneffekte vernachlässigen. Für ein Teilchen mit relativistischer Masse $m \equiv m(v)$ (wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens ist) existieren charakteristische Längenskalen; in der allgemeinen Relativitätstheorie ist dies der Schwarzschild-Radius R_S, in der Quantentheorie die de-Broglie-Wellenlänge λ_{dB}:

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2}\,, \quad \lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{2\pi\hbar}{p(v)}\,, \tag{2.1}$$

mit der Gravitationskonstanten G, der Lichtgeschwindigkeit c, dem Planckschen Wirkungsquantum h ($\hbar \equiv h/(2\pi)$) und dem relativistischen Impuls $p(v)$. In R_S geht die gesamte Energie des Teilchens und nicht nur dessen Ruhemasse ein, da nach der Masse-Energie-Äquivalenz alle Energieformen gravitativ wechselwirken. Wir betrachten ein ultra-relativistisches Teilchen mit $v \simeq c$. Nimmt die Energie $E = mc^2$ dieses Teilchens zu, so erhöht sich R_S, während λ_{dB} abnimmt. Bei der Planck-Masse

$$M_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}\,, \tag{2.2}$$

werden beide Längenskalen von derselben Größenordnung sein; die zugehörige Längenskala bezeichnet man als Planck-Länge:

$$l_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}\,. \tag{2.3}$$

Physikalisch handelt es sich um den vorstellbar extremsten Fall. Das Teilchen wird eine so

hohe Energie bzw. Masse besitzen, welche nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation auf eine Skala von der Größenordnung des Schwarzschild-Radius des Teilchens konzentriert ist. Bei solchen Längenskalen bricht das heutige physikalische Weltbild zusammen. Sowohl Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie als auch der Quantentheorie werden gleichermaßen wichtig. Die Unbestimmtheit der Energie schläge sich dann über die Einsteinschen Feldgleichungen in eine Unbestimmtheit der Metrik der Raumzeit nieder. Die Raumzeit wäre dann nicht mehr glatt, sondern dynamisch und würde Fluktuationen sowohl ihrer Geometrie als auch ihrer Topologie aufweisen und das in Form von mikroskopischen Defekten. Ein solcher Defekt ist in Abb. 2.3 skizziert. Die Gesamtheit aller Defekte bezeichnet man treffend als Raumzeit-

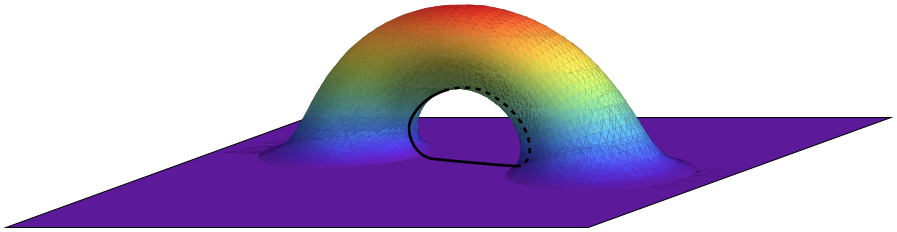


Abbildung 2.3.: Zweidimensionaler Schnitt eines mikroskopischen Defekts in der Raumzeit, dessen Topologie nicht der eines flachen Raums entspricht. Dies ist daraus ersichtlich, dass es geschlossene Kurven auf dem Defekt gibt, die sich nicht zu einem Punkt zusammenziehen lassen.

schaum. Da jedoch bisher eine Vereinheitlichung aus Quantenphysik und allgemeiner Relativitätstheorie fehlt, muss dieser Raumzeitschaum in der klassischen Näherung (unter anderem nicht-dynamisch) behandelt werden [4, 5, 15, 16, 17, 18]. Um den klassischen Raumzeitschaum skizzenhaft zu veranschaulichen, soll Abb. 2.4 dienen. Die Skizze stellt einen zweidimensio-

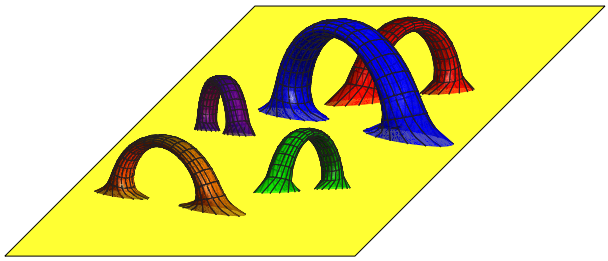


Abbildung 2.4.: Zweidimensionaler Schnitt einer zeitlichen Momentaufnahme eines vierdimensionalen Raumzeitschaums. Die flache Minkowski-Raumzeit ist als ebene Fläche dargestellt, während Defekte der Metrik durch geschwungene Röhren visualisiert werden. Das Modell ist räumlich isotrop.

nalen Schnitt der vierdimensionalen Raumzeit dar; die beiden Achsen sind räumliche Achsen. Die klassische, nichtdynamische Raumzeit wird als ebene Fläche abgebildet, die Defekte als geschwungene Röhren, welche verschiedene Punkte der Raumzeit miteinander verbinden.[1] Der skizzierte Raumzeitschaum ist ein Beispiel für ein räumlich isotropes Modell (zumindest in

[1] Als erstes einfaches Bild kann man sich die Defekte analog zu Luftblasen beispielsweise in Eis vorstellen. Die Defekte der Raumzeit sind jedoch dahingehend unterschiedlich im Vergleich zu einfachen Luftblasen in einem Medium, dass verschiedene Punkte der Raumzeit miteinander identifiziert werden.

den beiden gezeigten Raumdimensionen). Ein Modell, welches eine bestimmte Raumrichtung auszeichnet, kann durch Abb. 2.5 veranschaulicht werden.

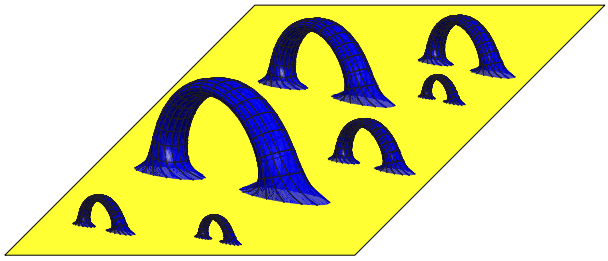


Abbildung 2.5.: Zeitliche Momentaufnahme eines räumlich anisotropen Modells von statischen Defekten der flachen Minkowski-Raumzeit. Die räumlich gleichmäßig angeordneten Defekte könnten eine bestimmte Raumrichtung auszeichnen analog wie permanente Dipolmomente in einem Festkörper eine Vorzugsrichtung zur Folge haben.

In der speziellen Relativitätstheorie sind Geschwindigkeiten relative Größen, also nur definiert auf einen bestimmten Bezugspunkt. Bewegt sich zum Beispiel eine Rakete gleichförmig von der Erde weg, so kann man mit systeminternen Mitteln nicht feststellen, ob sich die Rakete, die Erde oder beide bewegen. Dies ist der Inhalt des Relativitätsprinzips und dessen Fundament ist, dass kein absolutes ausgezeichnetes Referenzsystem existiert, bezüglich dessen Geschwindigkeiten angegeben werden können.

Um zu verstehen, was es bedeutet, ein absolutes Bezugssystem zu definieren, betrachten wir das Vakuum. Der klassische Vakuumzustand ist charakterisiert durch einen verschwindenden Energie-Impuls-Tensor: $T^{\mu\nu} \equiv 0$. Das Ergebnis einer Lorentztransformation ist wieder ein Vakuumzustand; das Vakuum ist also invariant unter Lorentztransformationen. Ansonsten wäre es möglich, dem Vakuumzustand einen nichtverschwindenden Impuls bzw. eine Energie zu geben und damit wäre es kein Vakuumzustand mehr. Man könnte meinen, dass das Vakuum dadurch in gewisser Weise zu einem ausgezeichneten Referenzsystem wird. Jedoch ist das klassische Vakuum leer und kann nicht als Referenz dienen, um so etwas wie absolute Geschwindigkeiten zu messen. Das Vakuum einer Vereinheitlichung von Quantentheorie und Gravitation kann ebenso durch einen verschwindenden Energie-Impuls-Tensor charakterisiert sein.[2] Jedoch sind, wie oben bereits erwähnt, nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation Fluktuationen von Energie und Impuls zu erwarten, die nicht verschwinden. Damit müssen die einzelnen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors durch Erwartungswerte ersetzt werden, also fordert man $\langle T^{\mu\nu} \rangle \equiv 0$. Entsprechend gilt dann $\langle p \rangle = \langle E \rangle \equiv 0$. Auch hier muss der Vakuumzustand nach Definition invariant unter Lorentztransformationen sein, so dass nach einer solchen Transformation stets $\langle T^{\mu\nu} \rangle \equiv 0$ ist. Der Unterschied zum klassischen Vakuum ist jedoch, dass dieses Vakuum Defekte aufweist[3], und genau diese Defekte sind es, welche die Festlegung des Vakuums als absolutes Referenzsystem erlauben. Ein aktiver Boost wird sich nicht auf den zeitlichen Mittelwert solcher Defekte auswirken, dennoch aber wohl auf ein Testteilchen. Diese

[2] Eine nicht-verschwindende kosmologische Konstante soll an diesem Punkt nicht betrachtet werden.
[3] beispielsweise Fluktuationen in der Krümmung

Tatsache erlaubt es einem, die Geschwindigkeit in Bezug auf das fluktuierende Vakuum absolut anzugeben, also bricht der Vakuumzustand die aktive Lorentzinvarianz. Die Gültigkeit der passiven Lorentzinvarianz ist unbedingt weiterhin zu fordern, weil passive Transformationen nur die Beschreibung der Physik ändern. Zusammenfassend kann man also sagen, dass ein nichttriviales Vakuum als Grundzustand einer vereinheitlichten Theorie aus Gravitation und Quantenphysik (gekennzeichnet durch ein Netzwerk aus Unebenheiten der Raumzeit) ein absolutes Bezugssystem auszeichnet und die aktive Lorentzinvarianz spontan bricht.

Zum Schluss wollen wir noch zum Verständnis auf ein Beispiel eingehen und zwar betrachten wir ein Teilchen, das in Bezug auf einen Beobachter ruht. Ein aktiver Boost auf das Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ ist zu einem passiven Boost des Beobachters mit $-\mathbf{p}$ gleichwertig, oder anders ausgedrückt, kann er durch einen passiven Boost in das Ruhesystem des Teilchens aufgehoben werden. Das Relativitätsprinzip besagt, dass man nicht entscheiden kann, ob sich das Teilchen oder der Beobachter bewegt. Man kann nur die Aussage treffen, dass das Teilchen relativ zum Beobachter den Impuls $\mathbf{p}$ besitzt. Liegt nun durch das nichttriviale Vakuum ein ausgezeichnetes Bezugssystem vor, so führt ein aktiver Boost zu einer Bewegung des Teilchens mit $\mathbf{p}$ relativ zu dem absoluten System. Ein passiver Boost in das Ruhesystem des Teilchens kann diesen jedoch nicht aufheben, da das nichttriviale Vakuum invariant unter Lorentztransformationen ist. Man kann jetzt also eine absolute Bewegung des Teilchens definieren, was die aktive Lorentzinvarianz bricht.

2.3. Physikalische Effekte

Bisher haben wir uns klargemacht, wodurch eine Brechung der aktiven Lorentzinvarianz verursacht und wie eine solche physikalisch interpretiert werden kann. Die nächste Frage ist, welche physikalischen Effekte mit einer solchen Brechung einhergehen. Durch die Defekte der Raumzeit wird ein Koordinatensystem ausgezeichnet, nämlich das, in dem ein Testteilchen bezüglich dieser Defekte in Ruhe ist. Nach der Argumentation im vorherigen Abschnitt transformieren Defekte nicht unter aktiven Boosts. Ein Testteilchen kann jedoch durch einen aktiven Boost in ein Koordinatensystem transformiert werden, in welchem es sich mit Impuls $\mathbf{k}$ bezüglich der Defekte bewegt. Hohe Impulse entsprechen kleinen de-Broglie-Wellenlängen des Teilchens. Für $\lambda_{\mathrm{dB}} \gg l_{\mathrm{Pl}}$ werden sich die Defekte auf die Propagation des Teilchens dahingehend auswirken, als ob sich dieses in einem effektiven Medium bewegt. Erst bei $\lambda_{\mathrm{dB}} \sim l_{\mathrm{Pl}}$ treten Effekte auf, die von bisherigen physikalischen Modellen nicht erfasst werden. Man kann sich das Ganze mit folgender wertvollen Analogie klar machen: Betrachten wir Licht, welches durch eine Flüssigkeit, beispielsweise Wasser, propagiert. Ist die Wellenlänge des Lichts nicht zu klein, so wirkt das Wasser als effektives Medium und ändert damit gewisse Propagationseigenschaften des Lichts wie beispielsweise dessen Phasengeschwindigkeit; dieses physikalische Phänomen lässt sich im Rahmen der klassischen Optik ausreichend beschreiben. Für sehr hochenergetische Strahlung jedoch, deren Wellenlänge im Bereich eines Atomdurchmessers liegt, werden quantenmechanische Effekte wichtig und eine naive Beschreibung einzig und allein mittels der geometrischen

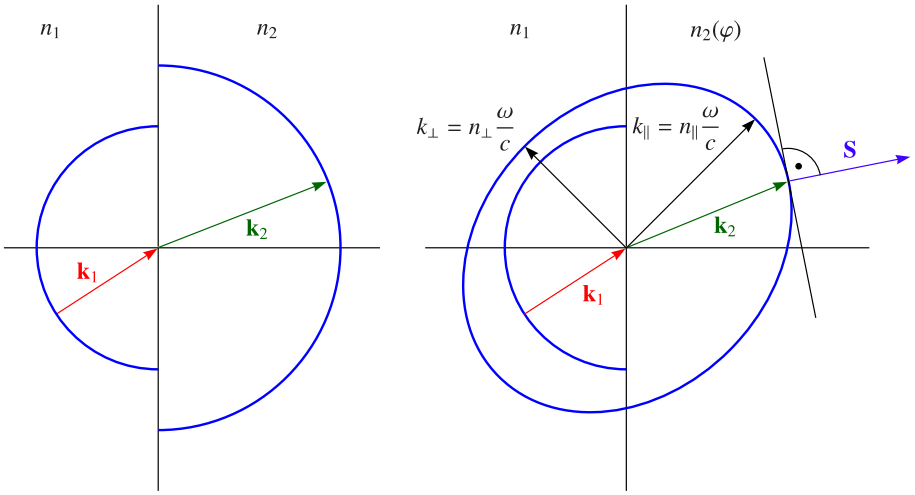


Abbildung 2.6.: Ein Lichtstrahl mit Wellenvektor $\mathbf{k}_1$ treffe aus einem nicht-doppelbrechenden Medium (Brechzahl n_1) kommend auf ein nicht-doppelbrechendes Medium mit Brechzahl n_2 (links) bzw. auf ein einachsiges doppelbrechendes Medium mit Brechzahlen $n_\perp$ (senkrecht zur optischen Achse) und $n_\parallel$ (parallel zur optischen Achse), wobei der neue Wellenvektor in diesem Medium $\mathbf{k}_2$ ist. Die Isofrequenzkurve im nicht-doppelbrechenden Falle ist ein Kreis mit Radius k_1 bzw. k_2 und im doppelbrechenden Falle eine Ellipse mit den Halbachsen $k_\perp$ und $k_\parallel$. Die Richtung des Energieflusses (Poynting-Vektor) ist $\mathbf{S}$.

Optik versagt.

Was sich für Teilchen zumindest ändern wird, die sich in einer Raumzeit bewegen, welche die oben genannten Defekte aufweist, sind die Propagationseigenschaften, also der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls des Teilchens, sprich die Dispersionsrelation. Die Defekte können sensitiv auf bestimmte Arten von Teilchen sein. Für Photonen können sie sich auf die Art auswirken, dass sich – wie bereits erwähnt – das Vakuum wie ein effektives Medium mit einem Brechungsindex $n \neq 1$ verhält, wobei n entweder konstant ist oder selbst noch von der Frequenz ω abhängt: $n = n(\omega)$. Im letzteren Falle tritt Dispersion auf, also die Auffächerung eines Strahlbündels von Teilchen, was zur Trennung der Teilchen mit unterschiedlicher Energie führt. Ein weiteres Phänomen, das mit der Brechung der aktiven Lorentzinvarianz bei Photonen mit einhergehen kann, ist die Doppelbrechung. In der klassischen Optik tritt die Doppelbrechung in Kristallen auf, in denen eine regelmäßige Anordnung von Molekülen (beispielsweise auch ein permanentes Dipolmoment) bestimmte Richtungen im Kristall auszeichnet. Je nach Polarisation in Bezug auf diese sogenannten optischen Achsen besitzt der Kristall unterschiedliche Brechungsindizes, was zu Moden führt, die sich mit verschiedener Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Für einen Strahl, dessen Polarisationsvektor senkrecht steht auf der optischen Achse, gibt es nur einen Brechungsindex $n_\perp$, während für einen Strahl mit Polarisationskomponenten parallel zur optischen Achse zwei Brechungsindizes $n_\parallel$ und $n_\perp$ maßgeblich sind. Im Gegensatz zu einem nicht-doppelbrechenden Material sind die Flächen konstanter Frequenz (Isofrequenzflächen) keine Kugeln, sondern Ellipsoide (siehe dazu Abb. 2.6 und 2.7). Ein einlaufender Strahl,

der sich aus Teilstrahlen aller möglichen Polarisationsrichtungen zusammensetzt, spaltet sich infolgedessen in einen ordentlichen (ordinären) und außerordentlichen (extraordinären) Strahl auf.

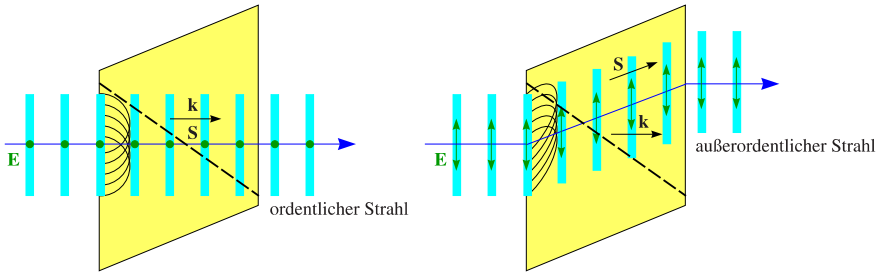


Abbildung 2.7.: Ein optisch einachsiger Kristall wird von einem Lichtstrahl getroffen. In der Situation links sei der Lichtstrahl senkrecht zur optischen Achse polarisiert und gehorcht dem gewöhnlichen Brechungsgesetz. Wellenvektor $\mathbf{k}$ und Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ sind parallel zueinander. In der Situation rechts besitzt die Polarisation des Strahls eine Komponente, die parallel zur optischen Achse verläuft, wird damit auch bei senkrechtem Einfall gebrochen. Für den außerordentlichen Strahl gilt $\mathbf{k} \not\parallel \mathbf{S}$.

Kapitel 3.

Einführung des Modells

Um physikalische Vorhersagen zu treffen und Theorie mit Experiment zu vergleichen, muss die Art der Lorentzsymmetrieverletzung zunächst im Formalismus der Feldtheorie parametrisiert werden. Eine Zusammenstellung der nach Power-Counting renormierbaren Terme, welche Lorentzsymmetrie-verletzende Operatoren und alle Felder des Standardmodells der Elementarteilchenphysik beinhalten und dessen Eichsymmetrie berücksichtigen, liefert die „Lorentzsymmetrie-verletzende Erweiterung des Standardmodells“ [14].

Da die gleichzeitige Behandlung aller möglichen Sektoren, in denen eine Verletzung der Lorentzsymmetrie auftreten kann, vom technischen Standpunkt schwierig ist, beschränkt man sich auf ein bestimmtes Modell, welches den Teil der aktiven Lorentzsymmetrieverletzung beschreibt, an dem man interessiert ist. Die Möglichkeiten, eichinvariante und nach Power-Counting renormierbare Terme zu konstruieren, welche die aktive Lorentzinvarianz im Photonsektor verletzen, ist sehr beschränkt. Im Wesentlichen gibt es zwei Klassen solcher Theorien, nämlich die Maxwell-Chern-Simons-Theorie [19, 20, 21] und die modifizierte Maxwell-Theorie [22, 14, 23, 24]. Der letzteren gilt das Augenmerk in der vorliegenden Dissertation.

3.1. Wirkung der modifizierten Quantenelektrodynamik

Die modifizierte Quantenelektrodynamik (QED) mit der Wirkung S_{modQED}, welche die Grundlage der folgenden Berechnungen darstellt, setzt sich zusammen aus der Wirkung S_{modMax} der modifizierten Maxwell-Theorie und einem Standard-Dirac-Term $S_{\text{standDirac}}$ [25], welcher ein Teilchen der Masse M und der Ladung e minimal an das modifizierte Photon koppelt:

$$S_{\text{modQED}} = S_{\text{modMax}} + S_{\text{standDirac}}\,, \tag{3.1a}$$

$$S_{\text{modMax}} = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\varrho\sigma}(x) \right\}, \tag{3.1b}$$

$$S_{\text{standDirac}} = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, \overline{\psi}(x) \left(\gamma^\mu (\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu(x)) - M\right) \psi(x)\,. \tag{3.1c}$$

Hier ist A_μ das abelsche U(1)-Eichfeld der gewöhnlichen QED und $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der elektromagnetische Feldstärketensor. Das Dirac-Spinorfeld bezeichnen wir als ψ und γ^μ sind die Dirac-Matrizen, welche der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ mit der Minkowski-Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ genügen. Das konjugierte Spinorfeld ist $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

Im modifizierten Anteil koppelt der Feldstärketensor bilinear an einen vierstufigen, dimensionslosen „Tensor“ $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$. Der Begriff „Tensor“ ist in Anführungszeichen gesetzt, da sich $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ nur unter passiven Lorentztransformationen wie ein Tensor transformiert, was die Wirkung zu einem Lorentzskalar macht. Unter aktiven Lorentztransformationen verhält sich das Objekt $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ jedoch wie ein konstantes Hintergrundfeld und bricht somit die aktive Lorentzinvarianz. Die modifizierte Maxwell-Theorie ist sowohl eichinvariant[1] als auch CPT-invariant[2] (im Gegensatz zur Maxwell-Chern-Simons-Theorie), besitzt jedoch paritätsverletzende Sektoren.

Damit der modifizierte Maxwell-Term dieselben Raumzeit-Symmetrien wie der Standard-Maxwell-Term aufweist, folgert man für den κ-Tensor:[3]

$$\kappa_{\mu\nu\varrho\sigma} = -\kappa_{\nu\mu\varrho\sigma}\,, \quad \kappa_{\mu\nu\varrho\sigma} = -\kappa_{\mu\nu\sigma\varrho}\,, \quad \kappa_{\mu\nu\varrho\sigma} = \kappa_{\varrho\sigma\mu\nu}\,, \tag{3.2a}$$

sowie die Bianchi-Identität

$$\sum_{(\nu,\rho,\sigma)\ \text{zyklisch}} \kappa_{\mu,(\nu,\rho,\sigma)} = \kappa_{\mu\nu\rho\sigma} + \kappa_{\mu\rho\sigma\nu} + \kappa_{\mu\sigma\nu\rho} = 0\,. \tag{3.2b}$$

Infolgedessen sind nur 20 der ursprünglich 256 Komponenten von $\kappa_{\mu\nu\varrho\sigma}$ voneinander unabhängig. Darüber hinaus wird eine zusätzliche Bedingung an den vierstufigen Tensor gestellt und zwar soll dessen doppelte Spur verschwinden: $\kappa^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$. Wir wollen verstehen, warum dies gefordert wird und untersuchen die Folgen der Annahme $\kappa^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = \alpha \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit spalten wir jede Komponente in zwei Teile auf, also $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} \equiv \widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma} + \widehat{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$ mit den Eigenschaften

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0\,, \quad \widehat{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = \alpha\,, \quad \widehat{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}\big|_{\substack{\varrho=\mu\\ \sigma=\nu}} = \frac{\alpha}{16}\,, \tag{3.3}$$

wobei Größen mit einem senkrechten Strich stets so zu verstehen sind, dass über gleiche Indizes nicht summiert wird. Der zusätzliche Anteil α bei der nicht-verschwindenden doppelten Spur wird also auf alle Komponenten $\widehat{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}|_{\substack{\varrho=\mu\\ \sigma=\nu}}$ in der Spur gleichermaßen aufgeteilt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{modMax}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma} = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\bigg|_{\substack{\varrho=\mu\\ \sigma=\nu}} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\bigg|_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}} =\end{aligned}$$

[1] Das folgt bereits aus der Eichinvarianz des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$.

[2] Dies resultiert aus C: $x^\mu \mapsto x^\mu$, PT: $x^\mu \mapsto -x^\mu$ und C: $A^\mu \mapsto -A^\mu$, P: $A^\mu \mapsto A_\mu$, T: $A^\mu \mapsto A_\mu$.

[3] Derartige Raumzeit-Symmetrien weist auch der Riemannsche Krümmungstensor in der Riemannschen Geometrie auf.

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\Big|_{\substack{\varrho=\mu\\\sigma=\nu}} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\Big|_{\substack{\varrho\neq\mu\\\sigma\neq\nu}} =$$

$$= -\frac{1}{4}(1+\alpha)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\Big|_{\substack{\varrho=\mu\\\sigma=\nu}} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}\Big|_{\substack{\varrho\neq\mu\\\sigma\neq\nu}} . \tag{3.4}$$

Der nicht-verschwindende Anteil α der doppelten Spur kann also durch eine Redefinition der Felder absorbiert werden und ist deshalb unphysikalisch. Aus dem Grund ist es möglich, $\kappa^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$ zu fordern. Infolge dieser zusätzlichen Bedingung verbleiben 19 unabhängige Komponenten des κ-Tensors.

Die Lorentzsymmetrieverletzung betrifft nur den freien Photonterm, was die Propagationseigenschaften der Photonen modifiziert. Die Propagation massiver Fermionen sowie die Wechselwirkung zwischen Materie und Photon bleibt jedoch unberührt. Das Hintergrundfeld, welches durch den κ-Tensor beschrieben wird, kann man sich nach Abb. 3.1 als gegebenes, nicht änderbares Feld vorstellen. Dieses füllt die Raumzeit aus und weist in jedem Punkt konstante Werte auf[4], die sich durch eine aktive Lorentztransformation nicht ändern. Nach den einführenden Bemerkungen in Kapitel 1 kann man sich vorstellen, dass das Hintergrundfeld mit den Defekten der Raumzeit zusammenhängt und deren Effekte auf einer makroskopischen Ebene beschreibt. Das Ganze ist analog zur Einführung eines Brechungsindex $n \neq 1$ zu verstehen für die Erklärung gewisser Propagationseigenschaften von Licht innerhalb eines Mediums im Rahmen der geometrischen Optik, ohne dass Kenntnisse der Quantenmechanik nötig sind. Die modifizierte Maxwell-Theorie ist also eine effektive Theorie, welche mögliche Auswirkungen der Vereinheitlichung von Gravitation und Quantenphysik im Niederenergie-Limes beschreibt. Die

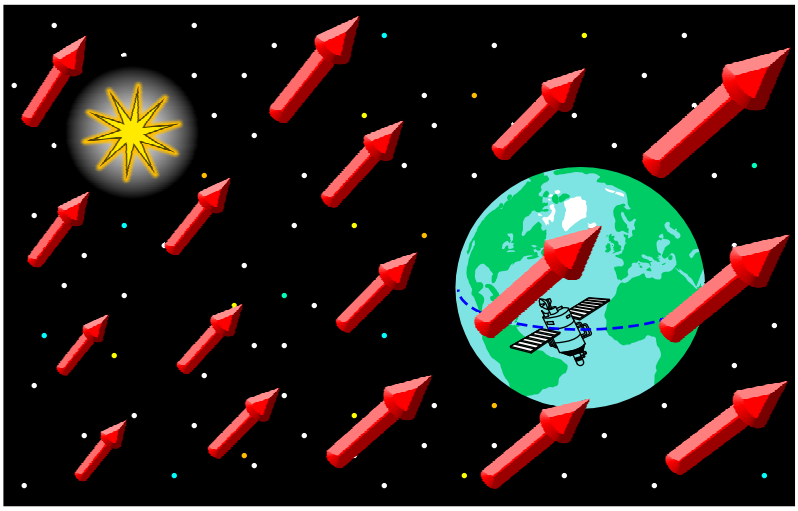


Abbildung 3.1.: In dieser Abbildung ist symbolisch die Erde (mit einem künstlichen Satelliten) und die Sonne gezeigt. Die (roten) Pfeile stellen ein konstantes Hintergrundfeld dar, welches das gesamte Vakuum ausfüllt und dessen Änderung uns nicht zugänglich ist.

[4] sofern man zusätzlich Translationsinvarianz fordert

aktive Lorentzinvarianz wird spontan durch den Grundzustand, also das nichttriviale Vakuum, gebrochen.

3.2. Die Feldgleichungen der modifizierten Theorie

Durch Variation der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{modMax}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\varrho\sigma} \equiv \mathcal{L}\,, \tag{3.5}$$

ergeben sich die modifizierten Feldgleichungen des Photonfeldes A_μ:

$$\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0\,. \tag{3.6}$$

Zur expliziten Herleitung der Feldgleichungen ist es geschickt, den bilinearen Term im Feldstärketensor auf die Form

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\,, \tag{3.7}$$

zu bringen. Damit ergeben sich dann die partiellen Ableitungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2}\left(\delta^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu\partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \delta^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\Big(\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}\delta_\mu{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta\partial_\varrho A_\sigma + \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\varrho{}^\alpha\delta_\sigma{}^\beta \\
&\qquad\qquad - \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}\delta_\mu{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta\partial_\sigma A_\varrho - \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\sigma{}^\alpha\delta_\varrho{}^\beta\Big) \\
&= -\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha + \kappa^{\alpha\beta\varrho\sigma}\partial_\varrho A_\sigma - \kappa^{\alpha\beta\varrho\sigma}\partial_\sigma A_\varrho\right) \\
&= -\left(F^{\alpha\beta} + \kappa^{\alpha\beta\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}\right)\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0\,, \tag{3.9}$$

so dass man die Gleichungen

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha} + \kappa^{\beta\alpha\varrho\sigma}\partial_\alpha F_{\varrho\sigma} = 0\,, \tag{3.10}$$

erhält. Mittels eines Ebenen-Wellen-Ansatzes

$$F^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(k)\exp(-\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha), \tag{3.11}$$

transformiert man die Gleichung anschließend noch vom Ortsraum in den Impulsraum:

$$\boxed{k_\alpha F^{\beta\alpha} + k_\alpha\kappa^{\beta\alpha\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma} = 0\,.} \tag{3.12}$$

3.3. Der nicht-doppelbrechende Ansatz

Im Gegensatz zur Maxwell-Chern-Simons-Theorie erlaubt die Struktur der modifizierten Maxwell-Theorie die Wahl von Parametern (und ausgezeichneten Richtungen in der vierdimensionalen Raumzeit), ohne dass Doppelbrechung auftritt. Neun der insgesamt 19 voneinander unabhängigen Parameter beschreiben eine Theorie, in der es nur eine Mode mit einer bestimmten Gruppengeschwindigkeit gibt; es handelt sich also eine Theorie ohne Doppelbrechung. Dieser Teilraum von κ-Tensoren kann durch den sogenannten nicht-doppelbrechenden Ansatz [26, 27]

$$\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\nu\varrho} - \eta^{\nu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\mu\varrho})\,, \tag{3.13}$$

beschrieben werden. Hierbei sind $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ Komponenten einer symmetrischen 4×4-Matrix, die darüber hinaus spurlos ist: $\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\mu} = 0$. Der Ansatz stellt eine Entwicklung bezüglich $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ dar, wobei nur die lineare Ordnung bezüglich $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ berücksichtigt wird. Prinzipiell sind auch Terme höherer Ordnung (beispielsweise der Form $\kappa^{\mu\nu}\kappa^{\varrho\sigma}$ bzw. $\kappa^{\mu\alpha}\kappa_{\alpha}{}^{\nu}\kappa^{\varrho\sigma}$ usw.) möglich, welche mit der Indexstruktur des κ-Tensors verträglich sind. Diese sind jedoch wegen $\mathcal{O}(|\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}|) \ll 1$ sehr viel kleiner als die linearen Terme und werden deshalb vernachlässigt.

Phänomenologisch wird oft Gebrauch vom nicht-doppelbrechenden Ansatz gemacht, weil die doppelbrechenden Komponenten durch Polaritätsmessungen sehr stark eingeschränkt sind und zwar in der Größenordnung 10^{-32} [28].

Zur Durchführung konkreter Berechnungen beschränkt man sich wegen der reichhaltigen Parameterstruktur der Theorie am Besten auf Fälle mit möglichst wenigen ausgezeichneten Richtungen und Parametern. Im Rahmen dieser Doktorarbeit werden im Wesentlichen drei Fälle untersucht, die im Folgenden aufgeführt werden sollen. Zunächst gehen wir aber noch kurz auf einige Begriffe ein.

3.4. Allgemeine Bemerkungen zur Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit einer ebenen Welle mit dem Wellenvektor $\mathbf{k}$ ($k \equiv |\mathbf{k}|$) und der Dispersionsrelation $\omega(\mathbf{k})$ ist definiert durch

$$\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega(\mathbf{k})}{k}\,\widehat{\mathbf{k}}\,, \tag{3.14}$$

wobei $\widehat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ die Richtung von $\mathbf{k}$ angibt. Bei einer ebenen Welle ist die Phasengeschwindigkeit charakteristisch für die Phasendifferenz von Oszillationen zwischen verschiedenen Raumpunkten. Die Phasengeschwindigkeit kann größer sein als die maximal erreichbare Geschwindigkeit eines Wellenpakets, welches durch ein Medium propagiert. Ein Wellenpaket bzw. ein Signal

setzt sich aus vielen solcher Elementarwellen mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten zusammen. Somit stellt die Phasengeschwindigkeit keine geeignete Größe dar, um die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals zu beschreiben. Aus diesem Grund wurde von Lord J. Rayleigh die Gruppengeschwindigkeit eingeführt:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k})\,. \tag{3.15}$$

Jedoch kann sogar v_{gr} größer sein als die maximal erreichbare Geschwindigkeit eines Signals in einem Medium, beispielsweise wenn anomale Dispersion vorliegt, also der Brechungsindex mit zunehmender Frequenz sinkt. Dies ist oft der Fall für Frequenzen, die stark absorbiert werden. Bereits Sommerfeld hat auf diese Problematik hingewiesen. Infolgedessen muss eine angemessenere Größe gefunden werden, um die Geschwindigkeit eines Signals zu beschreiben. Möglich ist das letztendlich mit der sogenannten Frontgeschwindigkeit [29]:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{fr}} = \lim_{k\mapsto\infty} \mathbf{v}_{\mathrm{ph}}(\mathbf{k}) = \lim_{k\mapsto\infty} \frac{\omega(\mathbf{k})}{k}\,\widehat{\mathbf{k}}\,. \tag{3.16}$$

Dabei handelt es sich um die Geschwindigkeit der ersten „Vorläufer“ eines Signals. Letzteres sind überaus schwache Oszillationen sehr hoher Frequenz, welche die Wellenfront eines Signals mit der Amplitude A bilden. Sofern $A(x>0,t=0)$ gilt, folgt daraus $A(x,t>0)=0$ für

$$x > \left(\lim_{k\mapsto\infty} \frac{\omega(k)}{k}\right) t = v_{\mathrm{fr}} t\,. \tag{3.17}$$

Somit ist die Frontgeschwindigkeit geeignet, um die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals zu beschreiben. Keine Bestandteile des Signals bewegen sich schneller als die ersten Vorläufer und alle Raumpunkte, welche von den Vorläufern noch nicht passiert wurden, werden auch in keiner Weise Auswirkungen des Signals spüren.

Für Voruntersuchungen zu Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien, was Aspekte wie die Mikrokausalität betrifft, ist es sinnvoll, die eingeführten Geschwindigkeiten zu berechnen und deren funktioneller Verlauf in Abhängigkeit von der Wellenzahl zu untersuchen. Natürlich darf man die Definition der Frontgeschwindigkeit aus Gl. (3.16) nur im Gültigkeitsbereich der effektiven Theorie ernst nehmen, also für Impulse unterhalb der Planck-Skala. Für den räumlich isotropen Fall wird diese Tatsache, wie wir sehen werden, keine Rolle spielen.

3.5. Der räumlich isotrope Fall

Hierbei handelt es sich um Fall 2 in [30]. Die Matrix $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ ist hier von der Form[5]

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left(\xi^{\mu}\xi^{\nu} - \eta^{\mu\nu}\frac{\xi^{\varrho}\xi_{\varrho}}{4}\right) = \widetilde{\kappa}_{00}\,\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\,, \tag{3.18}$$

[5] Wir schreiben den isotropen Koeffizienten $\widetilde{\kappa}_{00}$ aus Gründen der Lesbarkeit mit unteren Koeffizienten.

mit dem Vektor $(\xi^\mu) = (1,0,0,0)$. Von den neun nicht-doppelbrechenden Parametern verbleibt nur ein einziger: $\widetilde{\kappa}_{00}$. Es existiert also keine Vorzugsrichtung im dreidimensionalen Raum; man bezeichnet den vorliegenden Fall daher als räumlich isotrop und $\widetilde{\kappa}_{00}$ als den isotropen Parameter.

Die Berechnung der Feldgleichungen wird in der Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ durchgeführt, welche im Impulsraum durch $\mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = 0$ gegeben ist. Das ergibt Sinn, weil ebenso Pauli in dieser Eichung rechnete, als er die analogen Ergebnisse für die QED ableitete. Ein direkter Vergleich mit den allgemein bekannten Ergebnissen ist deshalb einfach möglich. Ohne Eichwahl sind die Feldgleichungen des räumlich isotropen Falles gegeben durch

$$M^{\alpha\beta}A_\beta = 0\,, \tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= k^\mu k_\mu \eta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - 2\kappa^{\alpha\mu\nu\beta}k_\mu k_\nu = \\ &= k^\mu k_\mu \eta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\Big\{\left[(k^\mu k_\mu)(\xi^\nu\xi_\nu) - 2(k^\mu\xi_\mu)^2\right]\eta^{\alpha\beta} \\ &\qquad + 2(k^\mu\xi_\mu)(k^\alpha\xi^\beta + \xi^\alpha k^\beta) - 2(k^\mu k_\mu)\xi^\alpha\xi^\beta - (\xi^\mu\xi_\mu)k^\alpha k^\beta\Big\}\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mittels Coulomb-Eichung folgt aus Gl. (3.20) für $\alpha = 0$:

$$A_0 = 0\,. \tag{3.21}$$

Die räumlichen Komponenten des Vektorpotentials ($\alpha = i \in \{1,2,3\}$) erfüllen unter Verwendung von (3.21) die Gleichung

$$\begin{aligned} M^{ij}A_j &= \left\{(k_0^2 - k^2)\delta^{ij} + k^i k^j + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left[(k_0^2 + k^2)\delta^{ij} - k^i k^j\right]\right\}A_j = \\ &= \left\{\left(1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k_0^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k^2\right\}A^i = 0\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Diese hat nur dann nicht-triviale Lösungen für $\mathbf{A}$, falls die Sekulärdeterminante $\det(M^{ij}) = 0$ ist. Das ist dann der Fall, wenn (k^μ) der Off-Shell-Dispersionsrelation

$$\left(1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k_0^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k^2 = 0\,, \tag{3.23}$$

genügt, woraus sich schließlich

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}|\mathbf{k}| = \left[1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\right]|\mathbf{k}|\,, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\,, \tag{3.24}$$

ergibt. Damit ist es möglich, die Winkelfunktion $\Theta(\widehat{\mathbf{k}})$ von Gleichung (5.2) in [30] zu identifi-

zieren:

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|\Big(1 - \Theta(\widehat{\mathbf{k}})\Big)\,, \quad \Theta(\widehat{\mathbf{k}}) = 1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} = \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\,. \tag{3.25}$$

Wegen der räumlichen Isotropie hängt Θ nicht von der Richtung von $\mathbf{k}$ ab, ist also konstant. Raumzeitschaum-Modelle mit einer räumlich isotropen Verteilung von Defekten führen zu Dispersionsrelationen von Photonen, welche die Form von Gl. (3.24) aufweisen [31]. In der Skaleninvarianz dieses Modells spiegelt sich auch die Skaleninvarianz der obigen Dispersionsrelation wider. Die erhaltenen Dispersionsgesetze in [31] für verschiedene Typen von Defekten weisen Korrekturen auf, die vom Verhältnis aus Defektradius b und mittlerem Defektabstand l abhängen, also invariant sind bezüglich einer Skalierung von b und l.

3.5.1. Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit im räumlich isotropen Fall

Aus der Dispersionsrelation ergeben sich direkt Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit:

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{ph}}|(\mathbf{k}) = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,, \tag{3.26a}$$

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{gr}}|(\mathbf{k}) = \left|\frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}\right| = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,, \tag{3.26b}$$

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{fr}}|(\mathbf{k}) = \lim_{|\mathbf{k}|\mapsto\infty} |\mathbf{v}_{\mathrm{ph}}|(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,, \tag{3.26c}$$

die somit gleich sind

$$v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{gr}} = v_{\mathrm{fr}}\,, \tag{3.27}$$

und außerdem nicht von $\mathbf{k}$, also der Wellenlänge, abhängen. Damit ist ebenso der Brechungsindex n eine Konstante und es tritt keine Dispersion auf. Wegen $v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{gr}}$ zerfließt ein durch Überlagerung ebener Wellen konstruiertes Wellenpaket nicht. Ebenso geraten wir mit der Frontgeschwindigkeit nicht außerhalb des Gültigkeitsbereich der Theorie, weil diese sowieso nicht vom Wellenvektor abhängt.

3.6. Räumlich anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Richtung

Dabei handelt es sich um Fall 3 in [30]. Die Darstellung der Matrix $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ für den nicht-doppelbrechenden Ansatz ist analog zum räumlich isotropen Falle[6]

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\left(\xi^\mu\xi^\nu - \eta^{\mu\nu}\frac{\xi^\varrho\xi_\varrho}{4}\right) = \widetilde{\kappa}_{33}\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\,, \tag{3.28}$$

mit dem Unterschied, dass diesmal für ξ^μ ein Vierervektor gewählt wird, welcher eine räumliche Richtung auszeichnet, also in diesem Falle $(\xi^\mu) = (0,0,0,1)^\intercal$. $\widetilde{\kappa}_{33}$ ist der zugehörige nicht-verschwindende Koeffizient, welcher diesen Fall parametrisiert.

Die Feldgleichungen sind hier analog zum räumlich isotropen Fall gegeben durch

$$M^{\alpha\beta}A_\beta = 0\,, \tag{3.29}$$

wobei die Matrix $M^{\alpha\beta}$ in kovarianter Schreibweise dieselbe Form wie im räumlich isotropen Fall aufweist, die explizite Struktur durch den anderen Vierervektor ξ^μ sich jedoch deutlich von letzterem unterscheidet:

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= k^\mu k_\mu\eta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - 2\kappa^{\alpha\mu\nu\beta}k_\mu k_\nu = \\ &= k^\mu k_\mu\eta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\Big\{\left[(k^\mu k_\mu)(\xi^\nu\xi_\nu) - 2(k^\mu\xi_\mu)^2\right]\eta^{\alpha\beta} \\ &\qquad + 2(k^\mu\xi_\mu)(k^\alpha\xi^\beta + \xi^\alpha k^\beta) - 2(k^\mu k_\mu)\xi^\alpha\xi^\beta - (\xi^\mu\xi_\mu)k^\alpha k^\beta\Big\}\,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

In Coulomb-Eichung $\mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = 0$ ergibt sich hier

$$A^0 = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{k}}{k^0}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A})\,, \tag{3.31}$$

wobei $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)^\intercal$. Somit verschwindet A^0 nicht im Vergleich zum räumlich isotropen Falle. Es gilt jedoch $A^0 \mapsto 0$ für $\widetilde{\kappa}_{33} \mapsto 0$ in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen QED. Eine Wahl des Viererimpulses in der Form

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix}\omega(\mathbf{k})\\ k_\perp\\ 0\\ k_\parallel\end{pmatrix}\,,\quad k_\parallel = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}\,,\quad k_\perp = |\mathbf{k} - k_\parallel\boldsymbol{\xi}|\,, \tag{3.32}$$

erweist sich für die weiteren Berechnungen als sehr geschickt; der räumliche Impuls wurde dabei in Komponenten orthogonal und parallel zu $\boldsymbol{\xi}$ zerlegt. Für die räumlichen Komponenten

[6] Wir schreiben den anisotropen Koeffizienten $\widetilde{\kappa}_{33}$ aus Gründen der Lesbarkeit mit unteren Koeffizienten.

A^i mit $i \in \{1,2,3\}$ gelten somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} M^{ij}A^j &= -k^\mu k_\mu A^i - k^i\omega A^0 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\Big\{(k^\mu k_\mu + 2k_\parallel^2)A^i \\ &\qquad + 2k_\parallel(-k^i A^3 + \xi^i\omega A^0) + 2(k^\mu k_\mu)\xi^i A^3 + k^i\omega A^0\Big\} = \\ &= \left\{-\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)k^i\omega + 2k_\parallel\omega\xi^i\right\}A^0 - \left\{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)k^\mu k_\mu + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}k_\parallel^2\right\}A^i \\ &\qquad - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}(2k_\parallel k^i - 2(k^\mu k_\mu)\xi^i)A^3 = 0\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Wie hier ersichtlich ist, unterscheidet sich die Struktur der Feldgleichungen sehr deutlich vom räumlich isotropen Falle. Das Auftreten des Impulskomponente $k_\parallel$ und die unterschiedlichen Koeffizienten vor A^i für $i = 1,\ 2$ bzw. A^3 verdeutlicht, dass die drei räumlichen Richtungen nicht gleichberechtigt sind. Unter Verwendung von (3.31) reduzieren sich diese Gleichungen auf den zweidimensionalen Unterraum, welcher von den Komponenten A^1 und A^2 aufgespannt wird:

$$M^{ij}A^j = -\left\{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)k^\mu k_\mu + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}k_\parallel^2\right\}A^i = 0\,. \tag{3.34}$$

Die Gleichartigkeit der Koeffizienten vor A^1 und A^2 zeugt von der bestehenden Rotationssymmetrie in der k_1-k_2-Ebene; die aktive Lorentzinvarianz liegt also noch in dieser Ebene vor. Somit ist SO(2,1) die verbleibende Invarianzgruppe. Nicht-triviale Lösungen von (3.34) existieren wiederum nur für verschwindende Sekulärdeterminante, also $\det(M^{ij}) = 0$. Daraus ergibt sich die Dispersionsrelation:

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{k_\perp^2 + \frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}k_\parallel^2}\,, \tag{3.35}$$

in welcher erneut die verbleibende Isotropie in der k_1-k_2-Ebene ersichtlich ist. Die Physik entlang der Richtung von $\boldsymbol{\xi}$ unterscheidet sich jedoch von der Physik gewöhnlicher Photonen aufgrund der Brechung der aktiven Lorentzinvarianz. Eine Entwicklung von (3.35) bezüglich $\widetilde{\kappa}_{33}$ führt auf

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= |\mathbf{k}|\left\{1 - \frac{2}{3}\frac{k_\parallel^2}{|\mathbf{k}|^2}\widetilde{\kappa}_{33} + \left(\frac{4}{9}\frac{k_\parallel^2 k_\perp^2}{|\mathbf{k}|^4} + \frac{2k_\parallel^4}{9|\mathbf{k}|^4}\right)\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right\} = \\ &= |\mathbf{k}|\left\{1 - \frac{2}{3}\cos^2\theta\,\widetilde{\kappa}_{33} + \left(\frac{4}{9}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{2}{9}\cos^4\theta\right)\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right\}\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und $\boldsymbol{\xi}$ ist: $\cos\theta \equiv (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi})/(|\mathbf{k}||\boldsymbol{\xi}|)$. Somit können wir auch hier $\Theta(\widehat{\mathbf{k}})$ von Gleichung (5.2) in [30] identifizieren:

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|(1 - \Theta(\widehat{\mathbf{k}}))\,, \tag{3.37}$$

mit

$$\Theta(\widehat{\mathbf{k}}) = 1 - \frac{1}{|\mathbf{k}|}\sqrt{k_\perp^2 + \frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}k_\parallel^2} = \\ = \frac{2}{3}\cos^2\theta\,\widetilde{\kappa}_{33} - \left(\frac{4}{9}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{2}{9}\cos^4\theta\right)\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\,. \tag{3.38}$$

$\Theta(\widehat{\mathbf{k}})$ ist nun winkelabhängig, was erneut eine Folge der räumlichen Anisotropie der Theorie ist. Eine weitere Untersuchung dieses Spezialfalls (ebenso, was die charakteristischen Geschwindigkeiten angeht) findet sich in Teil III der Dissertation.

3.7. Anisotroper Fall mit zwei Vorzugsrichtungen

Betrachten wir zu guter Letzt noch Fall 1 in [30]. Dieser ist charakterisiert durch zwei ausgezeichnete Richtungen in der vierdimensionalen Raumzeit und drei Parametern $\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$ und $\widetilde{\kappa}^{03}$. Schon die kovariante Struktur der Matrix $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ unterscheidet sich deutlich von den beiden vorherigen Fällen:

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\xi^\mu\zeta^\nu + \zeta^\mu\xi^\nu) - \eta^{\mu\nu}\frac{\xi^\varrho\zeta_\varrho}{4}\,, \quad (\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\kappa}^{01} & \widetilde{\kappa}^{02} & \widetilde{\kappa}^{03} \\ \widetilde{\kappa}^{01} & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\kappa}^{02} & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\kappa}^{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.39}$$

mit den Vierervektoren

$$(\xi^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\zeta^\mu) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\kappa}^{01} \\ \widetilde{\kappa}^{02} \\ \widetilde{\kappa}^{03} \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Der Vierervektor ξ^μ bewahrt die räumliche Isotropie, während diese von ζ^μ gebrochen wird. Aufgrund der Komplexität dieses Falls ist es sinnvoll, weitere Betrachtungen erst in Teil III der Dissertation folgen zu lassen.

Wahr ist nicht, was uns einleuchtet, wahr ist, was die Natur bestätigt.

D. Schönemann

Teil II.

Modifizierte teilchenphysikalische Prozesse

Kapitel 4.

Die Vakuum-Cherenkov-Strahlung

Bisher wurden die physikalischen Auswirkungen einer Verletzung der aktiven Lorentzinvarianz im Photonsektor untersucht. Dabei haben wir uns auf eine Betrachtung der klassischen Bewegungsgleichungen beschränkt und gesehen, dass erste phänomenologische Aussagen dadurch getroffen werden können, dass man das Vakuum im Rahmen der geometrischen Optik als effektives Medium behandelt und die klassischen Maxwell-Gleichungen dementsprechend anpasst [24, 26]. In diesem Kapitel wollen wir nun teilchenphysikalische Phänomene untersuchen, welche bei einer Verletzung der aktiven Lorentzinvarianz auftreten können. Dazu werden wir uns die quantenfeldtheoretische Beschreibung zunutze machen.

Uns ist bereits bekannt, dass die Phasengeschwindigkeit von Photonen beim isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie wie folgt modifiziert wird (wenn wir die Lichtgeschwindigkeit c wieder einsetzen):

$$v_{\mathrm{ph}} = c\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} = c\left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}+\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right) . \tag{4.1}$$

Für $0 < \widetilde{\kappa}_{00} \leq 3/2$ gilt $v_{\mathrm{ph}} < c$, also ist die Phasengeschwindigkeit des Lichts im Vakuum kleiner als die fixierte Geschwindigkeit c, die im Minkowski-Linienelement auftritt, oder – mit anderen Worten – kleiner als die maximale Geschwindigkeit für massive Teilchen, die ja immer noch bei der Lichtgeschwindigkeit c liegt. Ein massives Teilchen kann sich also mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichts, und kann unter diesen Umständen eine Cherenkov-artige Strahlung emittieren. Da diese Emission im Vakuum stattfindet, bezeichnet man sie treffend als Vakuum-Cherenkov-Strahlung [32, 33]. Bevor wir uns näher mit diesem neuartigen Phänomen beschäftigen, soll die klassische Cherenkov-Strahlung in effektiven Medien kurz abgehandelt werden.

4.1. Bemerkungen zur klassischen Cherenkov-Strahlung

Wir betrachten ein elektrisch geladenes Teilchen (beispielsweise ein Elektron), welches sich mit einer Geschwindigkeit v durch ein effektives Medium bewegt. Durch das elektrische Feld des Teilchens verschieben sich die negativ geladenen Atomorbitale innerhalb des Mediums,

sofern sie sich in der Nähe der Trajektorie des Teilchens befinden. Diese Atome besitzen dann ein induziertes Dipolmoment, welches durch Emission elektromagnetischer Strahlung wieder verschwindet. Sofern sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit bewegt, die kleiner ist als die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Medium ist, werden in der Umgebung eines jeden Punktes der Flugbahn des Teilchens zwar einige wenige Atome polarisiert, die jedoch schnell wieder ihr Dipolmoment durch Abstrahlung verlieren. Die Abstrahlung erfolgt in diesem Falle isotrop, also in alle Richtungen, da gleichzeitig immer nur sehr wenige Atome polarisiert sind, während die Dipolmomente in alle möglichen Richtungen zeigen (siehe dazu Abb. 4.1).

Anders verhält es sich in dem Falle, wenn sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit durch das Medium bewegt, welche größer als die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen ist. Dann werden über einen großen Bereich atomare Dipolmomente induziert. Das Teilchen bewegt sich dann so schnell, dass es schon wieder neue Dipolmomente erzeugt, während die zuvor erzeugten noch bestehen. Die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen entsteht dann von vielen Dipolen gleichzeitig mit hoher Intensität senkrecht zur Dipolachse und kann sich durch konstruktive Interferenz weiter verstärken. Dabei handelt es sich um die bereits von Cherenkov im Kühlwasser von atomaren Brennstäben als schwaches, blaues Schimmern wahrgenommene Strahlung [34]. Die Cherenkov-Strahlung ist somit nichts anderes als ein kollektiver Effekt der gleichzeitigen Abstrahlung vieler Dipole. Die Strahlung kann nur unter einem bestimmten Winkel bezüglich der Flugbahn des Teilchens gemessen werden, wo die Bedingung einer kohärenten Überlagerung der Strahlung erfüllt ist. Man bezeichnet diesen als Cherenkov-Winkel θ_c, wobei

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n}\,, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}\,, \tag{4.2}$$

gilt. Theoretisch wurde der Effekt von Frank und Tamm erklärt [35], die dafür zusammen mit

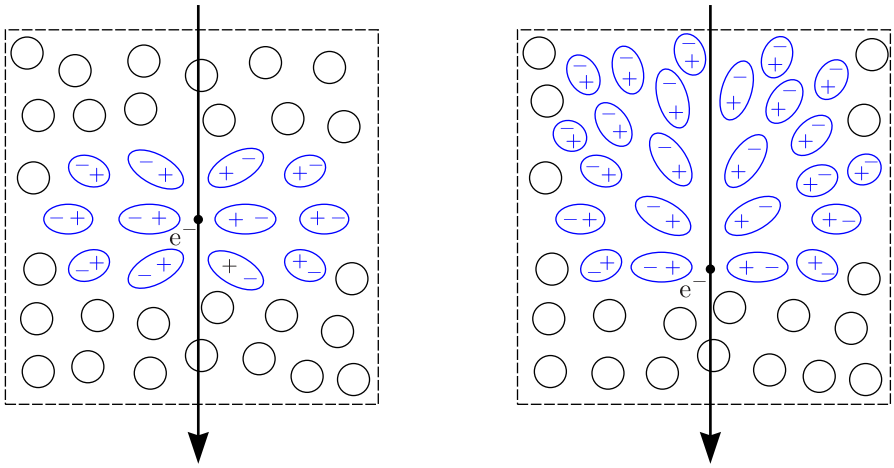


Abbildung 4.1.: Geladenes Teilchen, das sich mit $v < v_{\mathrm{ph}}$ (links) bzw. mit $v \geq v_{\mathrm{ph}}$ durch ein polarisierbares Medium bewegt. Im letzteren Falle entsteht Cherenkov-Strahlung.

Cherenkov für die Entdeckung der nach ihm benannten Strahlung den Nobelpreis erhielten. Die Frank-Tamm-Formel gibt die durch Cherenkov-Strahlung emittierte Energie pro zurückgelegter Weglänge l eines Teilchens der punktförmigen Ladung q an, wenn dieses mit Geschwindigkeit v ein Medium mit Brechungsindex n durchläuft:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{q^2}{c^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) . \tag{4.3}$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist in Abschnitt C.1 im Anhang skizziert. Für frequenzunabhängiges n wäre das auftretende Integral divergent. Jedoch muss man beachten, dass in realen Medien Dispersion auftritt, der Brechungsindex also eine Funktion der Frequenz ist: $n = n(\omega)$. Die zusätzliche Bedingung aus Gl. (4.2) für den Cherenkov-Winkel führt auf $\beta n \geq 1$ bzw. $n \geq 1/\beta$. (Das ist ebenso eine Folge von (4.3), weil ansonsten der Integrand negativ wird und $\mathrm{d}W/\mathrm{d}l < 0$ ergibt physikalisch keinen Sinn.) Ein realistischer Verlauf des Brechungsindex in

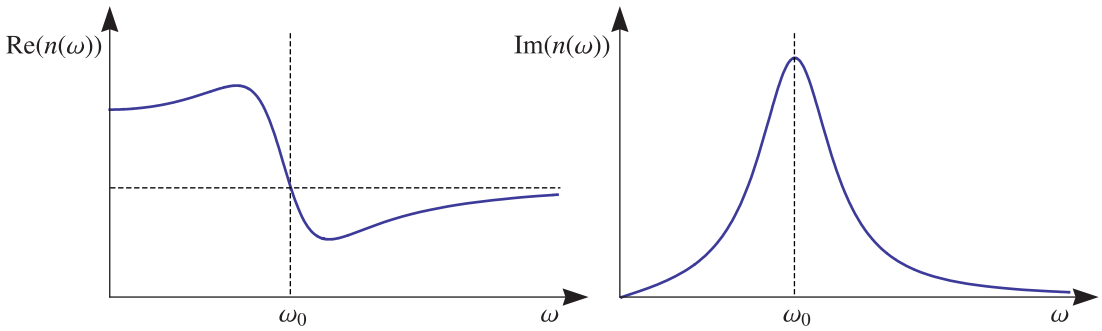


Abbildung 4.2.: Typischer Verlauf für Real- und Imaginärteil des Brechungsindex n in Abhängigkeit von der Frequenz im Bereich einer Resonanz.

Abhängigkeit von der Frequenz im Bereich einer Resonanz ist qualitativ in Abb. 4.2 skizziert. Im Bereich der hohen Absorption findet anomale Dispersion statt, der Brechungsindex nimmt also bei steigender Frequenz ab. Der Realteil von $n(\omega)$ is ab einer bestimmten Frequenz ω_0 kleiner als eins und der Verlauf nähert sich für $\omega \mapsto \infty$ der Asymptoten $n = 1$ von unten an. $n = 1$ ist jedoch eine untere Schranke dafür, dass Cherenkov-Strahlung stattfindet, und daher tritt in (4.3) eine Cut-Off-Frequenz auf, welche die Integration abschneidet, so dass die physikalische Größe $\mathrm{d}W/\mathrm{d}l$ endlich ist.

Zum Schluss soll noch angemerkt werden, dass Sommerfeld in einer Reihe von Veröffentlichungen [36] vor der Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie die abgestrahlte Energie eines Elektrons berechnet hatte, dass sich im Vakuum mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt. Dabei war er auf eine Beziehung analog zu Gl. (4.3) gekommen.

4.2. Berechnung der Schwellenenergie und der Zerfallsbreite der Vakuum-Cherenkov-Strahlung

Mit der klassischen Beschreibung der Cherenkov-Strahlung durch Frank und Tamm lässt die abgestrahlte Energie sowie der Cherenkov-Winkel in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment ermitteln. Vernachlässigt werden jedoch relativistische sowie quantenmechanische Effekte wie beispielsweise die Rückreaktion der emittierten Strahlung auf das geladene Teilchen. Aus diesem Grund wird eine quantenfeldtheoretische Betrachtung des Prozesses der Vakuum-Cherenkov-Strahlung notwendig.[1] Wir interessieren uns also für den Prozess $\mathrm{e}^{\pm} \to \mathrm{e}^{\pm}\widetilde{\gamma}$ bzw. $\mathrm{p}^{\pm} \to \mathrm{p}^{\pm}\widetilde{\gamma}$ mit einem modifizierten Photon $\widetilde{\gamma}$ und zunächst als punktförmig angenommene (Anti-)Protonen $\mathrm{p}^{\pm}$. In Abb. 4.3 ist der Beitrag in niedrigster Ordnung Störungstheorie zur

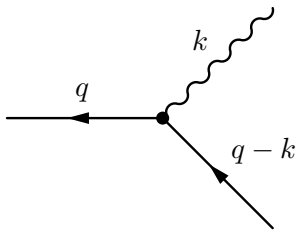


Abbildung 4.3.: Beitrag auf Baumgraphenniveau zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung $\mathrm{e}^{-} \to \mathrm{e}^{-}\widetilde{\gamma}$ bzw. $\mathrm{p}^{+} \to \mathrm{p}^{+}\widetilde{\gamma}$. Gezeigt ist ein einlaufendes (punktförmiges) Proton, das ein modifiziertes Photon $\widetilde{\gamma}$ abstrahlt. Das einlaufende Proton besitze den Viererimpuls q, das auslaufende Photon den Viererimpuls k.

Vakuum-Cherenkov-Strahlung dargestellt. In der gewöhnlichen QED ist ein solcher Prozess energetisch verboten, in der modifizierten Maxwell-Theorie aufgrund der veränderten Dispersionsrelation des Photons jedoch erlaubt und zwar oberhalb der Schwellenenergie

$$E_{\mathrm{th}}^{\mathrm{p}^{\pm}\to\mathrm{p}^{\pm}\widetilde{\gamma}} = \frac{Mc^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\widetilde{\kappa}_{00}}+2} = \frac{Mc^2}{2\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}/3}}\left(1+\frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{3}+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\right). \tag{4.4}$$

Diese ergibt sich direkt aus der Kinematik des Prozesses.

Zerfallsbreite und Abstrahlungsrate sollen nun mit quantenfeldtheoretischen Mitteln berechnet und mit dem klassischen Ergebnis von Frank und Tamm für die gewöhnliche Cherenkov-Strahlung verglichen werden. Dazu benötigen wir als erstes die zugehörigen Übergangsamplituden. Dabei möchten wir Protonen zunächst als punktförmige Spin-1/2-Teilchen betrachten, wobei ab Kapitel 6 zusätzlich der Partoninhalt des Protons berücksichtigt wird. Vakuum-Cherenkov-Strahlung könnte prinzipiell auch bei elektrisch geladenen Mesonen stattfinden, auch wenn diese instabil sind.[2] Darüber hinaus tragen klassische Berechnungen mit einem

[1] Ähnliche Berechnungen der Vakuum-Cherenkov-Strahlung wurden für die Maxwell-Chern-Simons-Theorie bereits in [37] getätigt.

[2] In Kapitel 8 werden wir sehen, dass zur Berechnung von Schranken an Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter sehr hochenergetische Mesonen nötig wären, die jedoch schon lange zerfallen wären, bevor sie die Erde

effektiven Brechungsindex wie die in Abschnitt 4.1 nicht dem Spin des Protons Rechnung. Aus diesen beiden Gründen führen wir einen Teil der Berechnungen (der Vakuum-Cherenkov-Strahlung und des Photonzerfalls betreffend) sowohl in der modifizierten QED von Gl. (3.1) als auch in einer QED mit massiven skalaren Teilchen und modifizierten Photonen durch. Die Wirkung dieser modifizierten skalaren QED lautet:

$$S^{\text{skalar}}_{\text{modQED}} = S_{\text{modMax}} + S^{\text{skalar}}_{\text{stand}}\,, \tag{4.5a}$$

mit S_{modMax} aus Gl. (3.1b) und

$$\begin{aligned} S^{\text{skalar}}_{\text{stand}} &= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, (D_\mu\phi)^*(x)(D^\mu\phi)(x) - m^2\phi^*(x)\phi(x) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, \phi^*(x)\big(-\Box + \mathrm{i}e\overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu(x) - \mathrm{i}eA_\mu(x)\overrightarrow{\partial}^\mu + e^2A_\mu(x)A^\mu(x) - m^2\big)\,\phi(x)\,, \end{aligned} \tag{4.5b}$$

wobei im letzten Schritt totale Ableitungen der Lagrangedichte, also Oberflächenterme der Wirkung, weggelassen wurden. Hierbei ist $\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu$ der d'Alembert-Operator, A_μ das Photonfeld und ϕ ein skalares Feld mit Ladung e und Masse m. Die zugehörigen Feynman-Regeln ergeben sich aus dieser Wirkung und können beispielsweise in [38] nachgeschlagen werden.

Berücksichtigt man zusätzlich, dass sowohl das einlaufende als auch das auslaufende Fermion des Prozesses aus Abb. 4.3 auf der Massenschale sitzt, gilt die kinematische Beziehung

$$q^\alpha q_\alpha = (q-k)^\alpha(q-k)_\alpha = q^\alpha q_\alpha - 2k^\alpha q_\alpha + k^\alpha k_\alpha\,, \tag{4.6}$$

und aus dieser ergibt sich

$$k^\alpha q_\alpha = \frac{k^\alpha k_\alpha}{2}\,, \tag{4.7}$$

was in den folgenden Rechnungen nützlich sein wird. Kommen wir nun zu den Übergangsamplituden:

1) QED mit modifizierten Photonen

   Das spinsummierte Betragsquadrat des Matrixelements ist hierbei gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{\text{spinor}}|^2 &= \frac{e^2}{2}\sum_{s_1,s_2}\overline{u}_\alpha(q-k)\gamma^\mu_{\alpha\beta}u_\beta(q)\overline{u}_\gamma(q)\gamma^\nu_{\gamma\delta}u_\delta(q-k)\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k) = \\ &= \frac{e^2}{2}\mathrm{Sp}[(\not{q}-\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{q}+m)\gamma^\nu]\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k)\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

   Berechnen wir die Spur und verwenden außerdem Gl. (4.7), so kann das Ergebnis auf die

erreichen.

folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{\text{spinor}}|^2 = 4e^2(q^\mu q^\nu - 2k^\mu q^\nu - 2k^\nu q^\mu + 2(k^\alpha q_\alpha)g^{\mu\nu})\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k)\,. \tag{4.9}$$

2) Skalare modifizierte QED:

Skalare sind Spin-0-Teilchen, weshalb die Summation über die Spins entfällt. Damit ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_{\text{Skalar}}|^2 &= e^2(2q-k)^\mu(2q-k)^\nu\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k) = \\ &= e^2(4q^\mu q^\nu - 2q^\mu k^\nu - 2k^\mu q^\nu + k^\mu k^\nu)\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k)\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Verletzung der Lorentzinvarianz steckt explizit in den Polarisationsvektoren.[3]

4.3. Die Modifikation der Polarisationsvektoren und der Polarisationssumme

Diesen Abschnitt wollen wir der Berechnung der Polarisationsvektoren des räumlich isotropen und des anisotropen Falls mit einer ausgezeichneten Raumrichtung widmen. Die Ergebnisse des Abschnitts werden zum Verständnis der Vakuum-Cherenkov-Strahlung benötigt.

4.3.1. Räumlich isotroper Fall

Zur Berechnung der Polarisationsvektoren und der Polarisationssumme für den räumlich isotropen Fall kann das Koordinatensystem so gewählt werden, dass der räumliche Impuls $\mathbf{k}$ des Photons entlang der ersten Koordinatenlinie liegt. Eine solche Wahl ist möglich, weil die passive Lorentzinvarianz weiterhin gilt. Dann sind der Viererimpuls k^μ des Photons und q^μ eines Protons der Masse M gegeben durch:

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix}\omega(\mathbf{k})\\ k\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\,,\quad (q^\mu) = \begin{pmatrix}\Omega(\mathbf{q})\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\,,\quad \Omega(\mathbf{q}) = \sqrt{q^2+M^2}\,,\quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}\,, \tag{4.11}$$

[3] und zusätzlich im Phasenraum, wozu wir später kommen werden

wobei $k = |\mathbf{k}|$ und $q = |\mathbf{q}|$. Die Polarisationsvektoren ergeben sich aus den Feldgleichungen für das Vektorpotential und zusätzlich aus dem Energie-Impuls-Tensor zu:

$$(\varepsilon^{(1),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon^{(2),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Damit lässt sich die Polarisationssumme, falls diese mit eichinvarianten Ausdrücken multipliziert wird, in der folgenden Form darstellen:

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \right) \xi^{\mu}\xi^{\nu} \right\}. \tag{4.13}$$

Die genaue Rechnung wird in Anhang A.2.1 präsentiert.

4.3.2. Räumlich anisotroper Fall

Beim räumlich anisotropen Fall erweist sich die Wahl eines Viererimpulses in der Form

$$(k^{\mu}) = \begin{pmatrix} \omega(\mathbf{k}) \\ k_{\perp} \\ 0 \\ k_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad k_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad k_{\perp} = |\mathbf{k} - k_{\parallel}\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

als geschickt. Die Berechnung der Polarisationsvektoren und der Polarisationssumme ist in A.2.2 explizit ausgeführt. Die Ergebnisse sind

$$(\varepsilon^{(1),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k_{\perp}^2}{\omega(\mathbf{k})^2}}} \begin{pmatrix} k_{\perp}/\omega(\mathbf{k}) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon^{(2),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

und

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \right) \xi^{\mu}\xi^{\nu} \right\}. \tag{4.16}$$

sofern die Polarisationssumme mit eichinvarianten Ausdrücken kombiniert wird. Die abweichende Struktur zum räumlich isotropen Fall zeigt sich dahingehend, dass einer der beiden Polarisationsvektoren vom Impulsanteil senkrecht zum ausgezeichneten Vektor ξ^{μ} abhängt. Die kovariante Gestalt der Polarisationssumme ist jedoch analog zu der von Fall 2. Das ist nicht verwunderlich, denn schließlich stehen zur Konstruktion der Tensorstruktur der Polarisationssumme nur der metrische Tensor $\eta^{\mu\nu}$ und die Vektoren k^{μ} bzw. ξ^{μ} zur Verfügung.

4.4. Berechnung der Zerfallsbreite

Die Zerfallsbreite eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{q}$ und Dispersionsrelation $\Omega(\mathbf{q})$, welches in N Teilchen mit den Impulsen $\mathbf{k}_i$ und Dispersionsrelationen $\omega_i(\mathbf{k}_i)$ zerfällt, ist gegeben durch:

$$\Gamma(\mathbf{q}) := \frac{1}{\sigma}\frac{1}{2\Omega(\mathbf{q})}\int\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i(\mathbf{k}_i)}\right) \times (2\pi)^4\delta\left(\mathbf{q}-\sum_{k=1}^{N}\mathbf{k}_j\right)\delta\left(\Omega(\mathbf{q})-\sum_{l=1}^{N}\omega_l(\mathbf{k}_l)\right)A(\mathbf{q},\Omega(\mathbf{q}),\mathbf{k}_i,\omega_i(\mathbf{k}_i))\,. \tag{4.17}$$

$\sigma = n!$ ist ein Symmetriefaktor, welcher bei n identischen Teilchen im Endzustand berücksichtigt werden muss. $A(\mathbf{q},\Omega(\mathbf{q}),\mathbf{k}_i,\omega_i(\mathbf{k}_i))$ steht für das Amplitudenquadrat, wobei über die Spins der Teilchen im Anfangszustand summiert und über die Spins im Endzustand gemittelt wird.

Im Falle der Vakuum-Cherenkov-Strahlung treten zwei Teilchen im Endzustand auf: ein Photon mit Impuls $\mathbf{k}_1 := \mathbf{k}$ und Dispersionsrelation $\omega_1(\mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k})$ und ein Proton mit Dispersionsrelation $\omega_2(\mathbf{k}_2) = \Omega(\mathbf{k}_2)$. Weil diese Teilchen nicht identisch sind, ist $\sigma = 1$ zu setzen. Berücksichtigt man die Erhaltung des räumlichen Impulses, welche als Argument der δ-Funktion festgelegt ist, kann die Integration über den Phasenraum des Protons einfach bewerkstelligt werden und man erhält einen Ausdruck für die Zerfallsbreite der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, nämlich

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\Omega(\mathbf{q})}\gamma(\mathbf{q})\,,\quad \gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int \mathcal{D}k\, A(\Omega(\mathbf{q}),\mathbf{q},\omega(\mathbf{k}),\mathbf{k})_{\text{Spinor/Skalar}}\,, \tag{4.18}$$

mit Phasenraummaß $\mathcal{D}k$, in welchem die Energieerhaltung in Form der verbleibenden eindimensionalen δ-Funktion steckt:

$$\mathcal{D}k \equiv \frac{\mathrm{d}^3k}{\omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k})}\delta(\omega(\mathbf{k})+\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k})-\Omega(\mathbf{q}))\,. \tag{4.19}$$

4.4.1. Räumlich isotroper Fall

Die Dispersionsrelation des Photons für den räumlich isotropen Fall und die des Protons sind gegeben durch

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(k) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}k\,,\quad \Omega(\mathbf{q}) = \Omega(q) = \sqrt{q^2+M^2}\,. \tag{4.20}$$

Von jetzt an werden wir die einfachere Schreibweise $A(\Omega(q),\omega(k),q,k)_{\text{Spinor/Skalar}} := A_{\text{Spinor/Skalar}}$ für die Amplitude verwenden. Das Amplitudenquadrat wird also sowohl für Spin-1/2-Fermionen als auch für skalare Teilchen benötigt, wobei wir jetzt zusätzlich über die Pho-

tonpolarisationen r summieren, um Gl. (4.13) verwenden zu können:

$$A_{\text{Spinor}} = \frac{1}{2}\sum_{r}\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{\text{Spinor}}|^2 = \\ = \frac{1}{N}\left(-4M^2 + (B-2)(\omega(k)^2 - k^2) - 4B\omega(k)\Omega(q) + 4B\Omega(q)^2\right), \tag{4.21a}$$

$$A_{\text{Skalar}} = \sum_{r}|\mathcal{M}_{\text{Skalar}}|^2 = \\ = \frac{1}{N}\left(-4M^2 + (\omega(k)^2 - k^2) + B\omega(k)^2 - 4B\omega(k)\Omega(q) + 4B\Omega(q)^2\right), \tag{4.21b}$$

mit

$$B = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}, \tag{4.21c}$$

und dem Normierungsfaktor N aus Gl. (A.19).

Da wir den räumlich isotropen Fall untersuchen, können wir die Integration über den räumlichen Photonimpuls geschickterweise in Kugelkoordinaten ausführen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Impuls $\mathbf{q}$ des Protons entlang der z-Achse zeigt: $\mathbf{q} = (0,0,q)^\intercal$. Dann nimmt die Gleichung für die Energieerhaltung (als Argument der δ-Funktion im Phasenraummaß) die Gestalt

$$f(k,\vartheta) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}k + \sqrt{q^2 - 2qk\cos\vartheta + k^2 + M^2} - \sqrt{q^2+M^2}, \tag{4.22}$$

an und das Integral lässt sich wie folgt schreiben (da die Amplitude nicht von φ abhängt):

$$\gamma(q) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\cdot 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\,\frac{k\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\sqrt{q^2-2kq\cos\vartheta+k^2+M^2}}\times \\ \times\,\delta\left(\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}k + \sqrt{q^2-2qk\cos\vartheta+k^2+M^2} - \sqrt{q^2+M^2}\right) A_{\text{Spinor/Skalar}}\,. \tag{4.23}$$

Die Integration über ϑ liefert einen Beitrag von

$$\vartheta_0 = \arccos\left(\frac{2\widetilde{\kappa}_{00}}{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}\frac{k}{q} + \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\frac{\sqrt{q^2+M^2}}{q}\right), \tag{4.24}$$

also der Nullstelle von $f(\vartheta,\varphi)$ in Bezug auf ϑ. Jedoch gibt es diesen Beitrag nur dann, wenn

ϑ_0 im Integrationsintervall $[0, \pi]$ liegt. Das ist wiederum der Fall, wenn sich k im Intervall

$$[0, k_{\max}], \quad k_{\max} = \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\right)\left[q - \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\sqrt{q^2 + M^2}\right], \tag{4.25}$$

befindet. Durch $k_{\max}$ wird somit ein Cut-Off für den Impuls des emittierten Photons geliefert. Damit ist die Zerfallsbreite (und die abgestrahlte Energie) endlich, auch für einen konstanten Brechungsindex. In Abschnitt 4.1 hatten wir gesehen, dass dies für die Frank-Tamm-Formel der klassischen Cherenkov-Strahlung nur gilt, wenn der Brechungsindex eine Funktion von ω ist und sein Realteil ab einem bestimmten ω_0 unter 1 fällt. Hier stellt der quantenmechanische Phasenraum automatisch einen Cut-Off bereit.

Um die δ-Funktion auszuwerten, benötigen wir folgende Beziehung für eine eindimensionale, differenzierbare Funktion $g(x)$:

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x)|_{x=x_n}}\,\delta(x - x_n), \tag{4.26}$$

wobei die Summe über alle einfachen Nullstellen x_n von $g(x)$ läuft mit $g'(x)|_{x=x_n} \neq 0$. Es ergibt sich (da $A_{\text{Spinor/Skalar}}$ nicht vom Winkel ϑ abhängt):

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{k_{\max}} \mathrm{d}k\, &\frac{k\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\sqrt{q^2 - 2kq\cos\vartheta + k^2 + M^2}} \\ &\times \left.\frac{\sqrt{q^2 - 2kq\cos\vartheta + k^2 + M^2}}{kq\sin\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} A_{\text{Spinor/Skalar}} = \\ = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\frac{1}{q}&\int_0^{k_{\max}} \mathrm{d}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}}\,.\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.4.2. Räumlich anisotroper Fall

Zur Berechnung der Zerfallsbreite für den räumlich anisotropen Fall ist es sinnvoll, aufgrund der bestehenden Isotropie in der k_1-k_2-Ebene, Zylinderkoordinaten $(k_\perp, \varphi, k_\parallel)$ einzuführen, wobei die folgenden Konventionen gelten sollen:

$$\mathbf{k}_\parallel = (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta}, \quad k_\parallel = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\zeta}, \tag{4.28a}$$

$$\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k} - k_\parallel\boldsymbol{\zeta}, \quad k_\perp = |\mathbf{k} - k_\parallel\boldsymbol{\zeta}|. \tag{4.28b}$$

Somit sind Integrale der folgenden Gestalt auszuwerten:

$$\gamma = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}k_\perp\, k_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_\parallel \frac{1}{\omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k})} \times \delta(\omega(\mathbf{k}) + \Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \Omega(\mathbf{q}))A_{\text{Spinor/Skalar}}\,. \tag{4.29}$$

Es ist dabei sinnvoll, als erstes die Integration über $k_\perp$ auszuführen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $q_\perp = 0$ setzen, weil die Impulskomponente senkrecht zum ausgezeichneten Vektor keine Auswirkungen der verletzten Lorentzsymmetrie spürt.[4] Somit wird auch die Zerfallsbreite nicht von $q_\perp$ abhängig sein. Darüber hinaus sei $q_\parallel \geq 0$.[5] $k_\perp$ kann dann immer abgespalten werden und alle Funktionen sind von folgender Form:

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_\parallel(k_\parallel)^2 + k_\perp^2}\,, \quad \omega_\parallel(k_\parallel) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}}k_\parallel\,, \tag{4.30}$$

und

$$\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) = \sqrt{\Omega_\parallel(k_\parallel)^2 + k_\perp^2}\,, \quad \Omega_\parallel(k_\parallel) = \sqrt{q^2 - 2q_\parallel k_\parallel + k_\parallel^2 + M^2}\,. \tag{4.31}$$

Sei $f(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) + \Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \Omega(\mathbf{q})$ das Argument der δ-Funktion. Die positive Nullstelle dieser Funktion bezüglich $k_\perp$ kann als

$$k_{\perp,0} = \frac{\Lambda(\omega_\parallel(k_\parallel)^2, \Omega_\parallel(k_\parallel)^2, \Omega(\mathbf{q})^2)}{2\Omega(\mathbf{q})}\,, \tag{4.32}$$

geschrieben werden, wobei Λ die sogenannte Källén-Funktion ist:

$$\Lambda(a,b,c) = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc}\,. \tag{4.33}$$

Das gilt immer für Dispersionsrelationen der Form $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_\parallel(k_\parallel)^2 + k_\perp^2}$. Um die δ-Funktion auszuwerten, wird auch hier die Regel

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x)|_{x=x_n}}\delta(x-x_n)\,, \tag{4.34}$$

für eine differenzierbare eindimensionale Funktion $g(x)$ verwendet, wobei die Summe über alle Nullstellen von $g(x)$ mit $g'(x)|_{x=x_n} \neq 0$ läuft. Darüber hinaus benötigen wir:

$$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{k})}{\mathrm{d}k_\perp} = k_\perp\left(\frac{\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k})}\right)\,. \tag{4.35}$$

[4] Eine Analogie dazu ist die Doppelbrechung in der gewöhnlichen Optik. Ein Lichtstrahl, dessen Polarisation senkrecht auf der optischen Achse steht, spürt diese nicht.

[5] Im Falle $q_\parallel < 0$ führt eine Variablentransformation $k_\parallel \mapsto -k_\parallel$ bei der Integration zum selben Ergebnis.

Die Integration über $k_\perp$ liefert nur einen Beitrag von

$$k_{\perp,0} = \frac{\Lambda(\omega_\parallel(k_\parallel)^2, \Omega_\parallel(k_\parallel)^2, \Omega(\mathbf{q})^2)}{2\Omega(\mathbf{q})}\,, \tag{4.36}$$

also der Nullstelle des Arguments der δ-Funktion bezüglich $k_\perp$. Dieser Beitrag existiert aber nur dann, falls $k_{\perp,0}(k_\parallel)$ im Integrationsintervall $[0,\infty)$ liegt. Das Schaubild der Funktion $k_{\perp,0}(k_\parallel)$ in Abhängigkeit von $k_\parallel$ ist in Abb. 4.4 dargestellt. Somit gilt $k_{\perp,0}(k_\parallel) \geq 0$ nur zwischen den

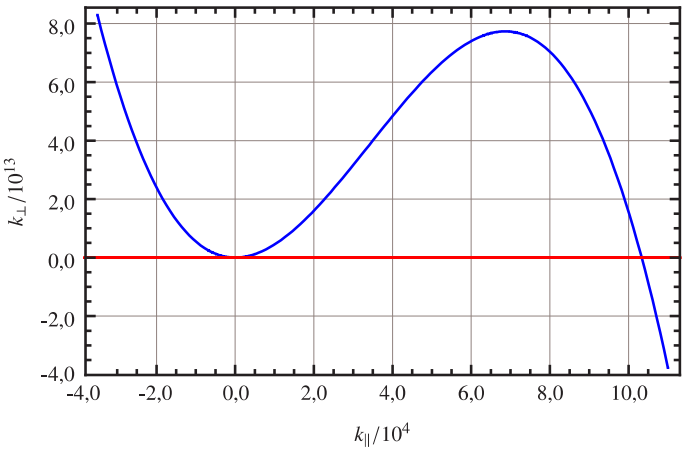


Abbildung 4.4.: Schaubild der Funktion $4\Omega(\mathbf{q})^2 k_{\perp,0}^2$ in Abhängigkeit von $k_\parallel$ für die Werte $M = 10$, $q = q_\parallel = 10^5$ und $\widetilde{\kappa}_{33} = 1/10$.

beiden Nullstellen der Funktion. Der Fall $k_\parallel < 0$ kann ausgeschlossen werden, weil für diesen die Bedingung der Energieerhaltung $f(\mathbf{k}) = 0$ nicht erfüllt werden kann. Diese ergeben sich aus $k_{\perp,0}(k_\parallel) = 0$. Äquivalent dazu – und auch einfacher – ist es, $f(k_\perp = 0, k_\parallel) = 0$ nach $k_\parallel$ aufzulösen. Dabei handelt es sich um die Energieerhaltungsgleichung. Das Ergebnis davon ist, dass $k_\parallel$ im Intervall

$$[0, k_{\max}]\,, \quad k_{\max} = \left(1 + \frac{3}{2\widetilde{\kappa}_{33}}\right)\left[q_\parallel - \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}}\sqrt{q_\parallel^2 + M^2}\right]\,, \tag{4.37}$$

liegen muss und es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{k_{\max}} \frac{\mathrm{d}k_\parallel}{\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k})} A_{\text{Spinor/Skalar}}\Big|_{k_\perp = k_{\perp,0}} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{k_{\max}} \frac{\mathrm{d}k_\parallel}{\Omega(\mathbf{q})} A_{\text{Spinor/Skalar}}\Big|_{k_\perp = k_{\perp,0}}\,.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Da $A_{\text{Spinor/Skalar}}$ nicht von φ abhängt, kann sofort über φ integriert werden:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{8\pi} \int_0^{k_{\max}} \frac{\mathrm{d}k_\parallel}{\Omega(\mathbf{q})} A_{\text{Spinor/Skalar}} \Big|_{k_\perp = k_{\perp,0}}} \,. \tag{4.39}$$

Zur letztlichen Berechnung der Zerfallsbreite wird noch das Amplitudenquadrat sowohl für Spin-1/2-Fermionen als auch skalare Teilchen benötigt. Diese ergeben sich aus Gl. (4.8) bzw. (4.10) durch zusätzliche Summation über die Photonpolarisationen r und mittels Gl. (4.16):

$$\begin{aligned} A_{\text{Spinor}} &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_{s_1, s_2} |\mathcal{M}_{\text{Spinor}}|^2 = \\ &= \frac{1}{N'} \left(-4M^2 - (B'+2)(\omega(\mathbf{k})^2 - k_\perp^2 - k_\parallel^2) + 4B'(q_\parallel^2 - k_\parallel q_\parallel) \right) , \end{aligned} \tag{4.40a}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Skalar}} &= \sum_r |\mathcal{M}_{\text{Skalar}}|^2 = \\ &= \frac{1}{N'} \left(-4M^2 + \omega(\mathbf{k})^2 - k_\perp^2 - k_\parallel^2 + B'(4q_\parallel^2 - 4k_\parallel q_\parallel + k_\parallel^2) \right) , \end{aligned} \tag{4.40b}$$

mit

$$B' = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \,, \tag{4.40c}$$

und dem Normierungsfaktor N' aus Gl. (A.35).

4.5. Verlustrate des Viererimpulses

4.5.1. Räumlich isotroper Fall

Die Verlustrate des Viererimpulses kann durch folgenden Ausdruck berechnet werden:

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = \int \mathcal{D}k \, A_{\text{Spinor/Skalar}} \, k^\mu = \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \right) , \tag{4.41}$$

wobei k^μ der Viererimpuls des Photons ist. Dieses Vektorintegral kann natürlich direkt ausgewertet werden. Eine andere Möglichkeit ist, für das Ergebnis den folgenden Ansatz zu machen (siehe beispielsweise [30]):

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = K \, q^\mu + L \, \xi^\mu = \mathcal{I}(k^\mu) \,, \tag{4.42}$$

mit der Notation

$$\mathcal{I}(f) \equiv \int \mathcal{D}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}} f\,, \quad (\xi^\mu) = (1,0,0,0)^\intercal\,. \tag{4.43}$$

Das Ergebnis des Integrals kann also nur von den Vektoren q^μ und ξ^μ abhängen, da keine anderen Vektoren auftreten. Kontrahieren wir diesen Ansatz mit q_μ und ξ_μ, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten K und L:

$$\mathcal{I}(k^\mu q_\mu) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\mu k_\mu\right) = Kq^\mu q_\mu + Lq^\mu \xi_\mu = KM^2 + Lq^0 = KM^2 + L\sqrt{q^2+M^2}\,, \tag{4.44}$$

$$\mathcal{I}(k^\mu \xi_\mu) = \mathcal{I}(\omega(k)) = Kq^\mu \xi_\mu + L\xi^\mu \xi_\mu = Kq^0 + L = K\sqrt{q^2+M^2} + L\,. \tag{4.45}$$

Die Lösung des Systems ist gegeben durch

$$K = \frac{\mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\alpha k_\alpha\right) - \mathcal{I}(\omega(k))\Omega(q)}{M^2 - \Omega(q)^2}\,, \quad L = \frac{\mathcal{I}(\omega(k))M^2 - \mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\alpha k_\alpha\right)\Omega(q)}{M^2 - \Omega(q)^2}\,, \tag{4.46}$$

und damit beträgt die zeitlich abgestrahlte Energie:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}t} = \int \mathcal{D}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}}\, k^0 = Kq^0 + L\xi^0 = K\sqrt{q^2+M^2} + L\,. \tag{4.47}$$

Analog ergibt sich der Impuls, welchen das Proton in Abhängigkeit von der Zeit durch Abstrahlung verliert:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \int \mathcal{D}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}}\, \mathbf{k} = K\,\mathbf{q}\,, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k\sin\vartheta\cos\varphi \\ k\sin\vartheta\sin\varphi \\ k\cos\vartheta \end{pmatrix}\,. \tag{4.48}$$

Die ersten beiden Komponenten von $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$ verschwinden wegen der azimutalen Symmetrie. Mit $\mathbf{q} = q\,\mathbf{e}_3$ trägt nur die dritte Komponente bei:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = Kq\,. \tag{4.49}$$

4.5.2. Räumlich anisotroper Fall

Wir berechnen die Verlustrate erneut mittels Gl. (4.41) und machen dazu einen ähnlichen Ansatz wie beim räumlich isotropen Fall und zwar

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = K\,q^\mu + L\,\xi^\mu = \mathcal{I}(k^\mu)\,, \quad \mathcal{I}(f) \equiv \int \mathcal{D}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}} f\,, \tag{4.50}$$

mit $(\xi^\mu) = (1,0,0,0)^\intercal$. Die Kontraktion dieses Ansatzes mit q_μ und ξ_μ führt zu einem linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten K und L:

$$\mathcal{I}(k^\mu q_\mu) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\mu k_\mu\right) = Kq^\mu q_\mu + Lq^\mu \xi_\mu = KM^2 - Lq_\parallel\,, \tag{4.51a}$$

$$\mathcal{I}(k^\mu \xi_\mu) = \mathcal{I}(-k_\parallel) = Kq^\mu \xi_\mu + L\xi^\mu \xi_\mu = -Kq_\parallel - L\,. \tag{4.51b}$$

Dieses System besitzt die Lösung

$$K = \frac{\mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\alpha k_\alpha\right) - \mathcal{I}(-k_\parallel)q_\parallel}{M^2 + q_\parallel^2}\,, \quad L = -\frac{\mathcal{I}(-k_\parallel)M^2 + \mathcal{I}\left(\frac{1}{2}k^\alpha k_\alpha\right) q_\parallel}{M^2 + q_\parallel^2}\,. \tag{4.52}$$

Somit ist die abgestrahlte Energie gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}t} = \int \mathcal{D}k\, A_{\text{Spinor/Skalar}}\, k^0 = Kq^0 + L\xi^0 = K\sqrt{q_\parallel^2 + M^2}\,, \tag{4.53}$$

und der räumliche Impuls, welcher das Proton verliert, kann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}P_\parallel}{\mathrm{d}t} = Kq_\parallel + L\,. \tag{4.54}$$

Da die Ergebnisse nur von $q_\parallel$ und nicht von $q_\perp$ abhängen, verliert das Proton nur den Impuls parallel zum ausgezeichneten Vektor. Der Impulsanteil senkrecht dazu bleibt erhalten. Das ist ein grundlegender Unterschied zum räumlich isotropen Fall, in dem das Proton immer Energie durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verliert, sofern diese oberhalb der Schwelle liegt und zwar unabhängig davon, wie dessen Flugbahn im Raum verläuft. Bei beiden Fällen verbleibt zwar die Restsymmetrie SO(2,1) senkrecht zur ausgezeichneten Richtung, jedoch ist beim räumlich isotropen Fall das Teilchen immer von der Lorentzsymmetrieverletzung betroffen, da der ausgezeichnete Vektor zeitartig ist. Beim räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten raumartigen Richtung ξ^μ verbleibt die räumliche Restsymmetrie in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)^\intercal$. Sofern sich das geladene Teilchen in dieser Ebene bewirkt, kann sich eine Verletzung der Lorentzsymmetrie nicht auswirken. Dasselbe gilt für die Impulskomponente, welche in dieser Ebene liegt, also senkrecht auf $\boldsymbol{\xi}$ steht.

4.6. Diskussion der Ergebnisse

4.6.1. Räumlich isotroper Fall

Die Vakuum-Cherenkov-Strahlung ist ein schwellenartiger Prozess. Das bedeutet, dass er erst ab einer bestimmten Energie des Teilchens im Anfangszustand energetisch erlaubt ist. Diese Schwellenenergie ergibt sich beispielsweise aus der Forderung $k_{\max} = 0$ mit $k_{\max}$ aus Gl. (4.25). Dann verschwindet nämlich der Bereich des Phasenraums, in welchem der Prozess energetisch

möglich ist. Es ergibt sich also

$$E_{\mathrm{th}} = \frac{Mc^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\widetilde{\kappa}_{00}} + 2}\,, \tag{4.55}$$

mit der folgenden Entwicklung für kleine $\widetilde{\kappa}_{00}$:

$$E_{\mathrm{th}} = \frac{Mc^2}{2\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}/3}}\left(1 + \frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{3} - \frac{\widetilde{\kappa}_{00}^2}{18} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\,. \tag{4.56}$$

Die Schwelle besitzt bei $\widetilde{\kappa}_{00} = 0$ einen Pol. Das deutet darauf hin, dass der Prozess bei Lorentzinvarianz energetisch nicht erlaubt ist, da dann die Schwellenenergie unendlich groß wird.

Die expliziten (exakten) Ausdrücke für die Zerfallsbreite und die abgestrahlte Energie (bzw. die Koeffizienten K und L) sind im Artikel [39] angegeben; diese ergeben nur für Energien $E \geq E_{\mathrm{th}}$ Sinn. Es sollen im Folgenden die physikalisch wichtigen Ergebnisse veranschaulicht und diskutiert werden. Die entwickelten Ausdrücke für Zerfallsbreite und Energierate für große Energien und kleine Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter lauten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\Gamma_{\mathrm{Spinor}}^{\mathrm{modM}} = &\left(\frac{8}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{2}{27}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)E \\ &+ \left(-\frac{3}{2} - \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{23}{54}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{M^2}{E} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{00}E^3}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.57a}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\Gamma_{\mathrm{Skalar}}^{\mathrm{modM}} = &\left(\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{4}{27}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)E \\ &+ \left(-1 - \frac{8}{27}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{M^2}{E} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{00}E^3}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.57b}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{Spinor}}^{\mathrm{modM}}}{\mathrm{d}t}\right) = &\left(\frac{7}{18}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)E^2 \\ &+ \left(-1 + \frac{1}{36}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{1}{6}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)M^2 + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{00}E^2}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.58a}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{Skalar}}^{\mathrm{modM}}}{\mathrm{d}t}\right) = &\left(\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)E^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)M^2 + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{00}E^2}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.58b}$$

mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$. Der nächste Term jenseits zur führenden Ordnung in diesen Entwicklungen enthält zwar kein $\widetilde{\kappa}_{00}$, ist jedoch trotzdem klein, da die Entwicklungen nur Sinn ergeben, wenn die Energie größer ist als die Schwellenenergie. Gl. (5.5) in [30] sagt

die Energieabhängigkeit in führender Ordnung aus allgemeinen Überlegungen wie folgt vorher:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}}{\mathrm{d}t}\right) \sim (\xi_0 + \xi_1(\widehat{\mathbf{q}}))\frac{E^2}{\hbar}\bigg|_{E\gg E_{\mathrm{th}}}, \tag{4.59}$$

wobei die Richtungsabhängigkeit im Koeffizienten ξ_1 steckt und ξ_0 eine einfache Konstante ist. Setzen wir $\hbar$ wieder ein, so lässt sich ξ_0 und ξ_1 aus Gl. (4.58a) bzw. (4.58b) ablesen zu

$$\boxed{\xi_0 = \frac{7}{18}\widetilde{\kappa}_{00}\,, \quad \xi_1(\widehat{\mathbf{q}}) = 0\,,} \tag{4.60a}$$

für Spin-1/2-Fermionen und

$$\boxed{\xi_0 = \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00}\,, \quad \xi_1(\widehat{\mathbf{q}}) = 0\,,} \tag{4.60b}$$

für skalare Teilchen. Die Richtungsabhängigkeit verschwindet also, was auch nicht verwunderlich ist, da es sich um den räumlich isotropen Fall handelt. In Abb. 4.5 ist die Zerfallsbreite

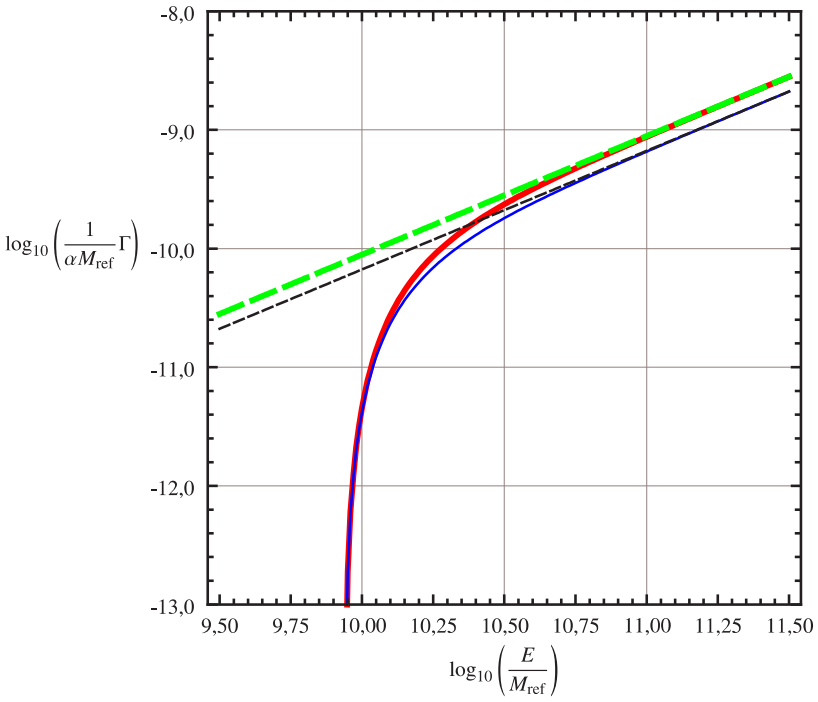


Abbildung 4.5.: Zerfallsbreite Γ für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung. $\Gamma_{\mathrm{Spinor}}|_{M=M_{\mathrm{ref}}}$ ist dargestellt als durchgezogene dicke (rote) Kurve, $\Gamma_{\mathrm{Spinor}}|_{M=0}$ als gestrichene dicke (grüne) Kurve, $\Gamma_{\mathrm{Skalar}}|_{M=M_{\mathrm{ref}}}$ als durchgezogene dünne (blaue) Kurve und $\Gamma_{\mathrm{Skalar}}|_{M=0}$ als gestrichene dünne (schwarze) Kurve. Für den Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter wurde $\widetilde{\kappa}_{00} = 10^{-20}$ gewählt.

der Vakuum-Cherenkov-Strahlung in Einheiten von αM_{ref} als Funktion von E/M_{ref} sowohl für Spin-1/2-Fermionen als auch für skalare Teilchen der Masse M doppelt-logarithmisch aufgetragen. Gewählt wurde zum einen die Masse $M = M_{\mathrm{ref}}$ und $M = 0$. Für große Energien

nähert sich die Zerfallsbreite Γ_{Spinor} für $M = M_{\text{ref}}$ dem masselosen Fall an, wobei in dieser doppelt-logarithmischen Darstellung dann beide Kurven linear verlaufen. Für Energien in der Nähe der Schwelle, also bei $E \gtrsim E_{\text{th}}$ weichen die Kurven für massive Teilchen sehr stark von den masselosen Kurven ab; die Zerfallsbreite fällt im massiven Falle auf null ab. Im masselosen Fall existiert diese Schwelle nicht. Das zeigt erneut die direkte Abhängigkeit der Schwelle von der Masse. Die Zerfallsbreite von Spin-1/2-Fermionen und skalaren Teilchen sind für große Energien gegeneinander verschoben und gehen für Energien nahe bei der Schwelle ineinander über. Die Schwelle hängt nicht vom Spin der Teilchen ab; sie ist ausschließlich eine Folge der Kinematik. Die Kinematik ergibt sich aus den freien Termen der Lagrangedichte, die für fermionische und skalare QED gleich sind. Nur die Wechselwirkungen sind verschieden, was zu unterschiedlichen Matrixelementen und verschiedenen Zerfallsbreiten führt, je nach Spin der Teilchen.

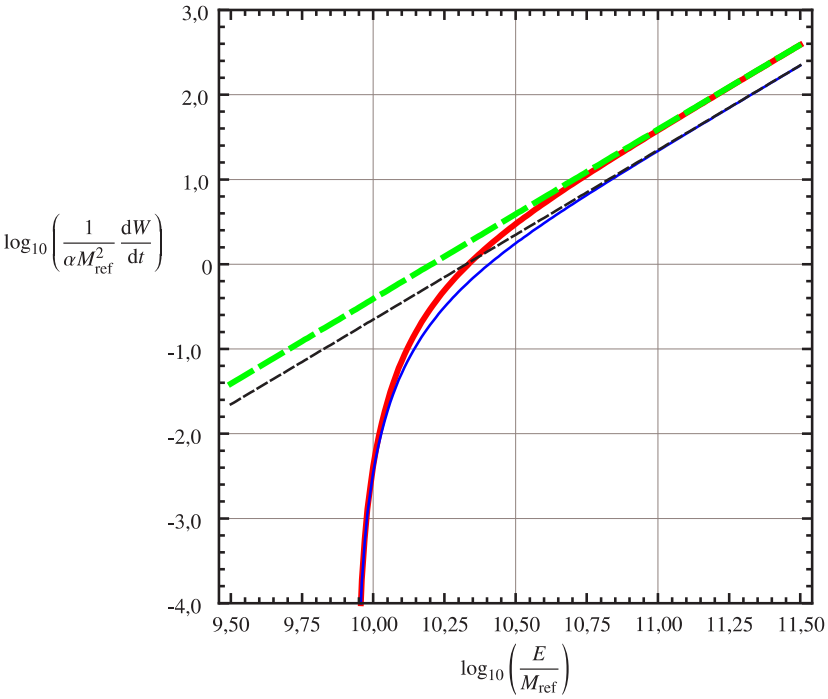


Abbildung 4.6.: Energieverlust $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ des Protons durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung. $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)_{\text{Spinor}}|_{M=M_{\text{ref}}}$ ist dargestellt als durchgezogene dicke (rote) Kurve, $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)_{\text{Spinor}}|_{M=0}$ als gestrichene dicke (grüne) Kurve, $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)_{\text{Skalar}}|_{M=M_{\text{ref}}}$ als durchgezogene dünne (blaue) Kurve und $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)_{\text{Skalar}}|_{M=0}$ als gestrichene dünne (schwarze) Kurve. Für den Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter wurde $\widetilde{\kappa}_{00} = 10^{-20}$ gewählt.

In Schaubild 4.6 ist der Energieverlust eines Protons durch Photonabstrahlung infolge des Vakuum-Cherenkov-Prozesses doppelt-logarithmisch aufgetragen in Einheiten von αM_{ref}^2 als Funktion von E/M_{ref} aufgetragen. Berechnet wurde $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ sowohl für Spin-1/2-Fermionen als auch skalare Teilchen und ebenso für den massiven bzw. masselosen Fall. Die Kurven ähneln qualitativ denen für die Zerfallsbreite. Auch hier ist der Abfall der Kurven für $M = M_{\text{ref}}$ bei der Schwellenenergie deutlich erkennbar. Unterhalb der Schwellenenergie ist der Prozess ener-

getisch verboten und das Proton verliert keine Energie durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung. Diese Tatsache ist für die Bestimmung von Schranken aus experimentellen Daten von ultrahochenergetischer kosmischer Strahlung (UHECRs[6]) wesentlich. Auf diese Tatsache werden wir in Abschnitt 8 zurückkommen.

4.6.2. Räumlich anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung

Für den räumlich anisotropen Fall ergibt sich die Schwellenenergie ebenso aus der Kinematik, zum Beispiel aus Gl. (4.37) zu

$$E_{\text{th}} = \frac{Mc^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\widetilde{\kappa}_{33}} + 2}\,, \tag{4.61}$$

mit folgender Entwicklung bezüglich kleiner $\widetilde{\kappa}_{33}$:

$$E_{\text{th}} = \frac{Mc^2}{2\sqrt{\widetilde{\kappa}_{33}/3}}\left(1 + \frac{\widetilde{\kappa}_{33}}{3} - \frac{\widetilde{\kappa}_{33}^2}{18} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\,. \tag{4.62}$$

Der Term führender Ordnung stimmt mit der Abschätzung (5.6) in [30] überein:

$$E_{\text{th}} \sim \frac{Mc^2}{\sqrt{\kappa}}\,, \tag{4.63}$$

wobei κ eine symbolische Schreibweise für geeignete Kontraktionen des vierstufigen Tensors $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ ist. Auch hier gilt Gl. (4.61) sowohl für Spin-1/2-Fermionen als auch für skalare Teilchen.

Eine Entwicklung der Zerfallsbreite von Spin-1/2-Fermionen und skalaren Teilchen bezüglich $q_\parallel$ und $\widetilde{\kappa}_{33}$ führt auf

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\Gamma^{\text{modM}}_{\text{Spinor}} = &\left(\frac{8}{9}\widetilde{\kappa}_{33} + \frac{2}{27}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) q_\parallel \\ &+ \left(-\frac{3}{2} - \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33} - \frac{25}{54}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{M^2}{q_\parallel} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{33}q_\parallel^3}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.64}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\Gamma^{\text{modM}}_{\text{Skalar}} = &\left(\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33} + \frac{4}{27}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) q_\parallel \\ &+ \left(-1 - \frac{1}{3}\widetilde{\kappa}_{33} - \frac{10}{27}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{M^2}{q_\parallel} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{33}q_\parallel^3}\right)\,.\end{aligned} \tag{4.65}$$

[6] Abkürzung für engl. ultra-high-energy cosmic rays

Für die abgestrahlte Energierate folgt entsprechend:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Spinor}}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{7}{18}\widetilde{\kappa}_{33} - \frac{7}{135}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) q_\parallel^2 + \left(-1 + \frac{5}{36}\widetilde{\kappa}_{33} - \frac{89}{270}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) M^2 + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{\widetilde{\kappa}_{33} q_\parallel^2}\right), \tag{4.66}$$

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33} + \frac{1}{27}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) q_\parallel^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{33} - \frac{5}{27}\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right) M^2 + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{33} q_\parallel^2}\right). \tag{4.67}$$

Wir identifizieren bei Gl. (5.5) in [30] (für $q_\parallel = q\cos\theta \sim E\cos\theta$ für $E \gg M$ und mit wiedereingesetztem $\hbar$):

$$\boxed{\xi_0 = 0\,, \quad \xi_1(\widehat{\mathbf{q}}) = \frac{7}{18}\,\widetilde{\kappa}_{33}\cos^2\theta\,,} \tag{4.68a}$$

für Spin-1/2-Fermionen und

$$\boxed{\xi_0 = 0\,, \quad \xi_1(\widehat{\mathbf{q}}) = \frac{2}{9}\,\widetilde{\kappa}_{33}\cos^2\theta\,,} \tag{4.68b}$$

für skalare Teilchen. Der isotrope Koeffizient ξ_0 verschwindet und der nicht-verschwindende Koeffizient $\xi_1(\widehat{\mathbf{q}})$ spiegelt die Anisotropie des betrachteten Falles wider. Von der Gestalt sind die Ergebnisse für die Entwicklungen der Zerfallsbreite und der Abstrahlungsrate von derselben Form wie beim räumlich isotropen Fall. Beispielsweise sind die führenden Terme der Entwicklungen aus Gl. (4.64), (4.65), (4.66) und (4.67) linear im Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter, wobei sogar die Koeffizienten dieser Terme mit denen des räumlich isotropen Falls übereinstimmen. Die Zerfallsbreite verläuft in führender Ordnung linear bezüglich der Energie und die Abstrahlungsrate quadratisch. Dennoch besteht ein grundlegender Unterschied. Die Ergebnisse für den räumlich anisotropen Fall hängen vom Kosinus des Winkels zwischen dem räumlichen Impuls und dem ausgezeichneten räumlichen Vektor $\boldsymbol{\xi} = (1,0,0)^\intercal$ ab. Aus diesem Grund kann sich das Teilchen in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\xi}$ bewegen, ohne dass überhaupt Vakuum-Cherenkov-Strahlung stattfindet. In Abschnitt 4.5.2 wurde bereits auf diese Tatsache eingegangen.

4.7. Abschätzung für die Strahlungslänge eines ultra-hochenergetischen Teilchens

Um Schranken für Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter aus experimentellen Daten ultra-hochenergetischer Teilchen zu gewinnen, ist es notwendig zu wissen, wie schnell ein Teilchen seine Energie durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verliert, sofern dessen Energie oberhalb der Schwelle liegt. Dies lässt sich durch folgende einfache Überlegung abschätzen, wobei wir uns auf den räumlich isotropen Fall beschränken.

Die Änderung der Energie E des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit entspricht dem Negativen der Energie, die es durch Abstrahlung verliert:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Spinor/Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{4.69}$$

Die Energieverlustrate wurde im vorigen Abschnitt exakt auf Baumgraphenniveau berechnet. Für eine grobe Abschätzung bei sehr hochenergetischen Teilchen (und kleiner Lorentzsymmetrieverletzung) reicht es aus, die Entwicklungen der zuvor in Abschnitt 4.5 bestimmten Ergebnisse in führender Ordnung bezüglich E und $\widetilde{\kappa}_{00}$ zu verwenden. Auf diese Weise kann aus der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx -\xi_0'\alpha\widetilde{\kappa}_{00}\frac{E^2}{\hbar}, \tag{4.70}$$

die Energie $E(t)$ des Teilchens bestimmt werden. Die Konstante ξ_0' hängt mit dem bereits zuvor[7] bestimmten ξ_0 über $\xi_0' = \xi_0/\widetilde{\kappa}_{00}$ zusammen. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich zu

$$E(t) \approx \frac{\hbar}{\xi_0'\alpha\widetilde{\kappa}_{00}t + \frac{\hbar}{E_0}}, \tag{4.71}$$

wobei $E_0 = E(t=0)$ die Energie des Teilchens ist, direkt nachdem es produziert wurde und noch keine Energie durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verloren hat. Wir betrachten zur Veranschaulichung das Beispiel, in welchem $E_0 = 2E_{\mathrm{th}}$ ist, wobei E_{th} in führender Ordnung aus Gl. (4.56) abgelesen werden kann. Bei dieser hohen Energie ist $M \ll E$ und das Teilchen fliegt fast mit seiner maximal erlaubten Geschwindigkeit.[8] Die zurückgelegte Weglänge, nach der die Energie des Teilchens unterhalb die Schwellenenergie gefallen ist, liegt dann bei:

$$\Delta s \approx \frac{1}{\xi_0'\alpha\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}}\frac{\hbar}{Mc}. \tag{4.72}$$

Typische Werte für die Konstanten ($c = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, $\xi_0' = 7/18$ und, um sicher zu gehen, $\widetilde{\kappa}_{00} = 10^{-24}$) führen für Elektronen auf Weglängen in der Größenordnung von einigen Metern und

[7] beispielsweise in Gl. (4.60a) für Spin-1/2-Fermionen bzw. Gl. (4.60b) für skalare Teilchen

[8] Diese entspricht der festgelegten Geschwindigkeit c des Minkowski-Linienelements.

für Protonen sogar nur von wenigen Zentimetern, auch wenn die Energie E_0 des Teilchens bei großen Vielfachen der Schwellenenergie liegt. Dies zeigt, dass ein Proton seinen Energiebetrag oberhalb der Schwelle in überaus kurzer Zeit bzw. nach kurzer Weglänge durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verlieren würde. Man kann deshalb davon ausgehen, dass die Energie E_p eines hochenergetisches Protons, welches Weglängen von einigen Lichtjahren geflogen ist, auf jeden Fall unterhalb der Schwellenenergie liegt, also $E_\mathrm{p} < E_\mathrm{th}$. Das gilt erst recht für ultrahochenergetische Protonen, von denen man annimmt, dass sie extragalaktischen Ursprungs sind und damit Weglängen im Bereich von Millionen von Lichtjahren zurückgelegt haben.

4.8. Das Spektrum der Vakuum-Cherenkov-Strahlung

Zum Schluss wollen wir uns noch das Frequenzspektrum der Vakuum-Cherenkov-Strahlung anschauen. Dabei handelt es sich um den Integranden der Abstrahlungsrate:

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{Spinor/Skalar}} = \int_0^{\omega_\mathrm{max}} \varrho_{\text{Spinor/Skalar}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{4.73a}$$

mit

$$\varrho_{\text{Spinor/Skalar}}(\omega) = \frac{\omega}{16\pi q\Omega(q)}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\;A_{\text{Spinor/Skalar}}\,, \tag{4.73b}$$

für Spin-1/2-Fermionen bzw. skalare Teilchen, wobei A_Spinor durch Gl. (4.21a) und A_Skalar durch Gl. (4.21b) gegeben ist. Die Größe $\varrho_{\text{Spinor/Skalar}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ nennt sich spektrale Energiedichte und ist die Energie, welche im Frequenzintervall $[\omega, \omega+\mathrm{d}\omega]$ abgestrahlt wird. Weiterhin gilt

$$\omega_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\;k_\mathrm{max}\,, \tag{4.74}$$

mit k_max aus Gl. (4.25). Die analytischen Ergebnisse für die spektrale Energiedichte für Spin-1/2-Fermionen und skalare Teilchen lauten:

$$\begin{aligned}\varrho_\mathrm{Spinor}(\omega) = \frac{3\alpha}{(9-4\widetilde{\kappa}_{00}^2)^{3/2}}\frac{\omega}{E\sqrt{E^2-M^2}}\big\{&4\widetilde{\kappa}_{00}(3-2\widetilde{\kappa}_{00})E^2 - (9-4\widetilde{\kappa}_{00}^2)M^2\\ &- 4\widetilde{\kappa}_{00}(3-2\widetilde{\kappa}_{00})E\omega + 6\widetilde{\kappa}_{00}\omega^2\big\}\,,\end{aligned} \tag{4.75a}$$

$$\begin{aligned}\varrho_\mathrm{Skalar}(\omega) = \frac{3\alpha}{(9-4\widetilde{\kappa}_{00}^2)^{3/2}}\frac{\omega}{E\sqrt{E^2-M^2}}\big\{&4\widetilde{\kappa}_{00}(3-2\widetilde{\kappa}_{00})E^2 - (9-4\widetilde{\kappa}_{00}^2)M^2\\ &- 4\widetilde{\kappa}_{00}(3-2\widetilde{\kappa}_{00})E\omega - 4\widetilde{\kappa}_{00}^2\omega^2\big\}\,.\end{aligned} \tag{4.75b}$$

Der Verlauf dieser Kurven ist in Abb. 4.7 veranschaulicht. Beide Spektren unterscheiden sich

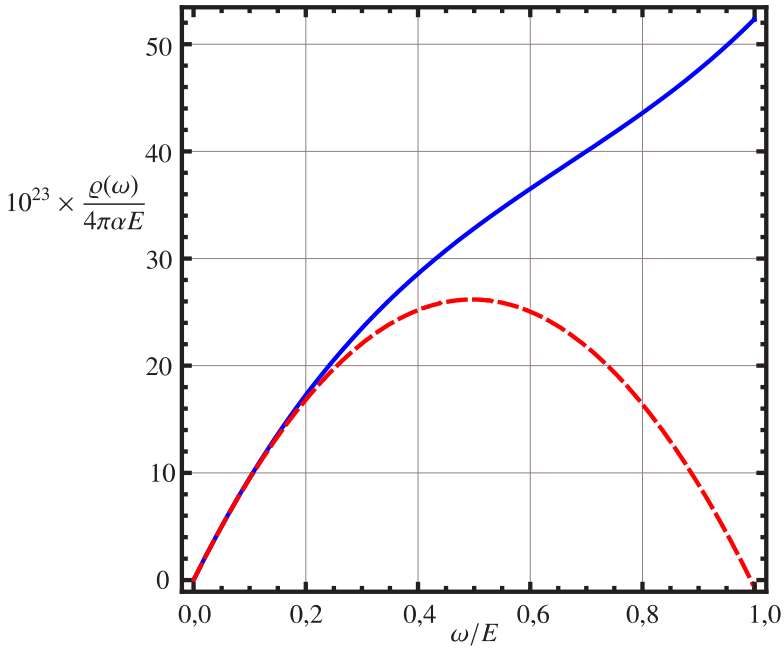


Abbildung 4.7.: Normierte spektrale Dichte $\varrho(\omega)/(4\pi\alpha E)$ der Vakuum-Cherenkov-Strahlung $\mathrm{p}^+ \to \mathrm{p}^+\widetilde{\gamma}$ für den räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie aufgetragen über der dimensionslosen Größe ω/E. Hierbei ist ω die Frequenz des emittierten Photons. Die durchgezogene (blaue) Kurve stellt den Verlauf für Spin-1/2-Fermionen aus Gl. (4.75a) und die gestrichene (rote) Kurve den für skalare Teilchen aus Gl. (4.75b) dar. Die Protonen besitzen elektrische Ladung $e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}$ und zusätzlich wurden die numerischen Werte $M = 0,938\,\mathrm{GeV}$ für die Protonmasse, $E = 10^{20}\,\mathrm{eV}$ für die Energie der Protonen und $\widetilde{\kappa}_{00} = 10^{-20}$ verwendet.

für $\omega/E \gtrsim 0,2$ merklich voneinander. Die Kurve für skalare Teilchen besitzt bei $\omega/E \approx 0,5$ ein Maximum, während die Kurve für Spin-1/2-Fermionen monoton steigt und ihr Maximum bei $\omega/E = 1$ annimmt. Physikalisch bedeutet dies, dass die Energie eines skalaren Teilchens am wahrscheinlichsten über zwei Photonen abgestrahlt wird, während Fermionen ihre Energie instantan durch Emission eines Photons verlieren.

4.9. Vergleich mit semiklassischen Ergebnissen

4.9.1. Räumlich isotroper Fall

Wir möchten unsere Ergebnisse aus Abschnitt 4.5, die wir über den quantenfeldtheoretischen Zugang erhalten haben, mit den Ergebnissen vergleichen, die aus einer semiklassischen Rechnung folgen (vgl. Anhang C.2 in [37]). In dieser wird das Vakuum als effektives Medium betrachtet und die Vakuum-Cherenkov-Strahlung in Analogie zur gewöhnlichen Cherenkov-Strahlung mittels der klassischen Elektrodynamik beschrieben. Die semiklassische Rechnung berücksichtigt nicht die Quantisierung des Strahlungsfeldes und die Rückreaktion auf das elek-

trisch geladene Teilchen durch Emission von Photonen. Für den semiklassischen Zugang kann man aus der Dispersionsrelation einen Brechungsindex definieren, der gegeben ist durch:

$$n \equiv \frac{k}{\omega(k)} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} = 1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\,. \tag{4.76}$$

Damit lässt sich der Cherenkov-Winkel $\cos\theta_c = 1/(n\beta)$ für große Energien und kleine $\widetilde{\kappa}_{00}$ angeben als

$$\theta_c = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}} - \frac{2}{9\sqrt{3}}\widetilde{\kappa}_{00}^{3/2} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^{5/2})\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar\omega}{E}\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}, \frac{(Mc^2)^2}{E^2\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}}\right)\,. \tag{4.77}$$

Der Term führender Ordnung hängt nicht von der Energie des einlaufenden Teilchens ab, sondern nur vom Lorentzsymmetrie-verletzenden Koeffizienten $\widetilde{\kappa}_{00}$. Da dieser sehr klein ist, verläuft der Cherenkov-Kegel fast kollinear mit der Flugbahn des Teilchens. Wir werden θ_c für die folgenden Betrachtungen nicht weiter benötigen.

Die semiklassische emittierte Energierate aus [40] berücksichtigt nicht den Spincharakter der Teilchen. Damit handelt es sich prinzipiell um die Abstrahlungsrate für spinlose, also skalare Teilchen.

$$\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\alpha}{48\widetilde{\kappa}_{00}^2}\frac{1}{\beta}(9-4\widetilde{\kappa}_{00}^2)\left(\beta - \sqrt{\frac{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}}\right)^3\left(3\beta + \sqrt{\frac{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}}\right)\frac{E^2}{\hbar}\,, \tag{4.78a}$$

mit

$$\beta = \sqrt{1-\frac{(Mc^2)^2}{E^2}}\,, \tag{4.78b}$$

wobei die Schwelle als größte Nullstelle des Ausdrucks mit dem quantenfeldtheoretischen Ergebnis (4.55) übereinstimmt.

Entwickelt man Gl. (4.78a) für große Energie und kleinen Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$, führt dies auf

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right) = &\left(\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{7}{27}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{E^2}{\hbar}\\ &+\left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - \frac{5}{27}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{(Mc^2)^2}{\hbar} + \mathcal{O}\left(\frac{(Mc^2)^4}{\widetilde{\kappa}_{00}E^2}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.79}$$

was in führender Ordnung E und $\widetilde{\kappa}_{00}$ auch mit Gl. (4.58b), also dem skalaren Beitrag, übereinstimmt. Der zusätzliche Spinorbeitrag kann mittels

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Spinor}}}{\mathrm{d}t}\right) = 2\,\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{E/\hbar}\mathrm{d}\omega\,\hbar\omega\left(\frac{\hbar^2\omega^2}{4E^2}(n(\omega)^2-1)\right)\,, \tag{4.80}$$

berechnet werden [40, 30]. Der Faktor 2 rührt von den beiden beitragenden Polarisationen her.

Betrachten wir auch hier die Entwicklung für große Energien und kleine Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$:

$$\frac{1}{\alpha}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Spinor}}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{1}{6}\widetilde{\kappa}_{00} + \frac{1}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{E^2}{\hbar} + \left(\frac{1}{12}\widetilde{\kappa}_{00} + \frac{1}{18}\widetilde{\kappa}_{00}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^3)\right)\frac{(Mc^2)^2}{\hbar} + \mathcal{O}\left(\frac{(Mc^2)^4}{E^2}\widetilde{\kappa}_{00}\right). \quad (4.81)$$

Mit $2/9 + 1/6 = 7/18$ stimmt der führende Term mit dem Ergebnis (4.58a) überein.

Wir sehen also, dass die semiklassische Näherung für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung des räumlich isotropen Falles vernünftige Ergebnisse liefert. Die Schwellenenergie stimmt exakt und die abgestrahlte Energierate sowohl für Skalare als auch Spinoren in führender Ordnung überein, also für den Bereich, welcher in der Praxis sowieso relevant ist. Korrekturen weisen die höheren Terme in der Entwicklung auf, die energetisch oder durch die kleine Lorentzsymmetrieverletzung unterdrückt sind.

4.9.2. Räumlich anisotroper Fall

Wir können den effektiven Brechungsindex analog zum räumlich isotropen Fall berechnen:

$$n \equiv \frac{k}{\omega(k)} = \left(\sin^2\theta + \frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\cos^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.82)$$

Im Gegensatz zum räumlich isotropen Fall ist dieser winkelabhängig. Kommen wir nun zur Berechnung der semiklassischen Abstrahlungsrate:

$$\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\alpha}{48\widetilde{\kappa}_{33}^2}\frac{1}{\beta}(3-2\widetilde{\kappa}_{33}\cos(2\theta))\left(\beta - \sqrt{\frac{3-2\widetilde{\kappa}_{33}}{3+2\widetilde{\kappa}_{33}}}\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2 \times \left(-3 + (9+6\widetilde{\kappa}_{33})\beta^2 + 2\widetilde{\kappa}_{33}\cos(2\theta) - 2\beta\sqrt{(3+2\widetilde{\kappa}_{33})(3-2\widetilde{\kappa}_{33}\cos(2\theta))}\right)\frac{E^2}{\hbar}. \quad (4.83)$$

Wie beim räumlich isotropen Fall stimmt hier die größte Nullstelle von Gl. (4.83) bezüglich der Energie E, also

$$E_0 = \frac{Mc^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\widetilde{\kappa}_{33}} + 2}, \quad (4.84)$$

mit der Schwellenenergie aus Gl. (4.61) überein. Die Entwicklung von Gl. (4.83) für große Energie und kleinen Parameter $\widetilde{\kappa}_{33}$ führt auf

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{modM}}_{\mathrm{Skalar}}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33} + \frac{1}{27}(-1+3\cos(2\theta))\widetilde{\kappa}_{33}^2 + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{E^2}{\hbar}\cos^2\theta$$

$$+\left(\frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33}+\frac{1}{27}(-1+3\cos(2\theta))\widetilde{\kappa}_{33}^2+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{(Mc^2)^2}{\hbar}\cos^2\theta$$
$$+\mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\widetilde{\kappa}_{33}E^2}\right). \tag{4.85}$$

Die führenden Terme der Entwicklung stimmen mit dem quantenfeldtheoretischen Ergebnis aus Gl. (4.67) überein. Der zusätzlichen Beitrag für Spin-1/2-Fermionen kann analog zum räumlich isotropen Fall berechnet werden:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}W_{\text{Spinor}}^{\text{modM}}}{\mathrm{d}t}\right)=2\,\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{E/\hbar}\mathrm{d}\omega\,\hbar\omega\left(\frac{\hbar^2\omega^2}{4E^2}(n(\omega)^2-1)\right)=$$
$$=\frac{\alpha}{2\beta}\frac{\widetilde{\kappa}_{33}\cos^2\theta}{3-2\widetilde{\kappa}_{33}\cos(2\theta)}\frac{E^2}{\hbar}. \tag{4.86}$$

Führen wir auch hier eine entsprechende Entwicklung durch, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\alpha}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}W_{\text{Spinor}}^{\text{modM}}}{\mathrm{d}t}\right)=\left(\frac{1}{6}\widetilde{\kappa}_{33}+\frac{1}{9}\cos(2\theta)\widetilde{\kappa}_{33}^2+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{E^2}{\hbar}\cos^2\theta$$
$$+\left(\frac{1}{12}\widetilde{\kappa}_{33}+\frac{1}{18}\cos(2\theta)\widetilde{\kappa}_{33}^2+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\right)\frac{(Mc^2)^2}{\hbar}\cos^2\theta$$
$$+\mathcal{O}\left(\frac{(Mc^2)^4}{E^2}\widetilde{\kappa}_{33}\right) \tag{4.87}$$

Mit $2/9+1/6=7/18$ kann auch hier der führende Term von Gl. (4.67) reproduziert werden. Damit stellt auch hier die semiklassische Berechnung der Abstrahlungsrate eine gute Näherung für die quantenfeldtheoretische Herangehensweise dar. Das gilt vor allem für den interessanten Fall hoher Energien und eines kleinen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters.

Kapitel 5.

Der Photonzerfall

Als nächstes Beispiel für einen wichtigen Prozess in Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien betrachten wir den Zerfall eines modifizierten Photons $\widetilde{\gamma}$ in ein Fermion-Antifermion-Paar (beispielsweise ein Proton-Antiproton-Paar oder Elektron-Positron-Paar) [32].[1] Der Beitrag auf Baumgraphenniveau ist in Abb. 5.1 dargestellt. In der gewöhnlichen QED ist auch dieser

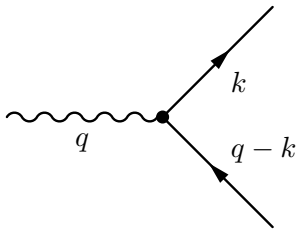


Abbildung 5.1.: Photonzerfall $\widetilde{\gamma} \to e^- e^+$ oder $\widetilde{\gamma} \to p^+ p^-$ auf Baumgraphenniveau. Das Photon trage den Viererimpuls q, der Viererimpuls des auslaufenden Elektrons sei k. Der räumliche Impuls des Photons wird als einlaufend und die räumlichen Impulse des Elektrons bzw. Positrons im Endzustand als auslaufend gewählt.

Prozess energetisch verboten, das Photon also stabil. Im räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie ist er aufgrund der veränderten Dispersionsrelation des Photons oberhalb einer Schwellenenergie E_{th} erlaubt. Der Prozess ist kinematisch dann am günstigsten, wenn das Fermion und Antifermion den Impuls im Endzustand gleichberechtigt teilen. Sei $\omega(q)$ die Dispersionsrelation des modifizierten Photons und $\Omega(q)$ die Dispersionsrelation eines Fermions der Masse M. Aus der Energiebilanz

$$\omega(q) = 2\Omega\left(\frac{q}{2}\right), \quad \omega(q) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\, q, \quad \Omega(q) = \sqrt{q^2+M^2}, \tag{5.1}$$

[1] Die Zerstrahlung eines gemäß der Maxwell-Chern-Simons-Theorie modifizierten Photons in drei modifizierte Photonen über eine Fermion-Schleife (das sogenannte Photon-Triple-Splitting) wurde bereits in [41, 42] betrachtet.

ergibt sich dann

$$E_{\text{th}} = Mc^2\sqrt{\frac{3}{-\widetilde{\kappa}_{00}}+2} = Mc^2\sqrt{\frac{3}{-\widetilde{\kappa}_{00}}} + \mathcal{O}\left(\widetilde{\kappa}_{00}^{1/2}\right) . \tag{5.2}$$

Da der Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter sehr klein ist, ergibt diese Formel physikalisch nur Sinn für negative $\widetilde{\kappa}_{00}$. An der Gleichung ist sofort erkennbar, dass beim Photonzerfall im Vergleich zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung energetisch ein grundlegender Unterschied besteht. Dieser hängt damit zusammen, dass sich bei der Vakuum-Cherenkov-Strahlung das modifizierte Photon $\widetilde{\gamma}$ im Endzustand befand, wohingegen $\widetilde{\gamma}$ hier den Anfangszustand ausmacht.

5.1. Das Amplitudenquadrat für Spin-1/2-Fermionen und skalare Teilchen

Wir beschränken uns im Folgenden auf den räumlich isotropen Fall. Summation über die Spins s_1, s_2 des Elektrons bzw. Positrons im Endzustand und Mittelung über die Polarisationen r des einlaufenden modifizierten Photons liefert das Amplitudenquadrat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_r\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{\text{Spinor}}|^2 &= \frac{e^2}{2}\text{Sp}[(\not{k}+m)\gamma_\mu(\not{q}-\not{k}-m)\gamma_\nu]\Pi^{\nu\mu} = \\ &= e^2[-4k_\mu k_\nu + 2k_\mu q_\nu + 2k_\nu q_\mu - \eta_{\mu\nu}(q^\alpha q_\alpha)]\Pi^{\mu\nu} ,\end{aligned} \tag{5.3}$$

mit der Polarisationssumme aus Gl. (4.13). Weiterhin folgt aus

$$M^2 = (q-k)_\alpha(q-k)^\alpha = q_\alpha q^\alpha - 2q_\alpha k^\alpha + k_\alpha k^\alpha , \tag{5.4}$$

die nützliche Relation[2]

$$q_\alpha k^\alpha = \frac{q_\alpha q^\alpha}{2} . \tag{5.5}$$

Führen wir die Kontraktionen aus und verwenden Gl. (5.5), ergibt sich als Endergebnis für Spin-1/2-Fermionen

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{\text{Spinor}}|^2 = \frac{1}{N}\left(4M^2 - (B-2)(\omega(q)^2-q^2) + 4B\Omega(k)\omega(q) - 4B\Omega(k)^2\right) , \tag{5.6a}$$

bzw. für skalare Teilchen

$$\frac{1}{2}\sum_r|\mathcal{M}_{\text{Skalar}}|^2 = \frac{1}{N}\left(-4M^2 + (B+1)\omega(q)^2 - q^2 - 4B\Omega(k)\omega(q) + 4B\Omega(k)^2\right) , \tag{5.6b}$$

[2] analog zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung

mit

$$B = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\,. \tag{5.6c}$$

5.2. Berechnung der Zerfallsbreite

Zur Berechnung der Zerfallsbreite verwenden wir auch hier Gl. (4.17) aus Abschnitt 4.4. Beim Photonzerfall besteht der Endzustand aus zwei Teilchen: einem Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}_1 := \mathbf{k}$ und Dispersionsrelation $\omega_1(\mathbf{k}_1) = \Omega(\mathbf{k})$ und dem entsprechenden Antiteilchen mit Dispersionsrelation $\omega_2(\mathbf{k}_2) = \Omega(\mathbf{k}_2)$. Da diese Teilchen nicht identisch sind, gilt $\sigma = 1$.

Berücksichtigt man die Erhaltung des räumlichen Impulses, so ist die Integration über den Phasenraum eines der Teilchen im Endzustand einfach zu bewerkstelligen. Auf diese Weise ergibt sich der folgende Ausdruck für die Zerfallsbreite des Photons:

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{q})}\gamma(\mathbf{q})\,, \quad \gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int \mathcal{D}k\, A(\Omega(\mathbf{q}), \mathbf{q}, \omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})_{\text{Spinor/Skalar}}\,, \tag{5.7}$$

mit Phasenraummaß $\mathcal{D}k$, in welchem die Energieerhaltung steckt:

$$\mathcal{D}k \equiv \frac{\mathrm{d}^3k}{\Omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k})}\delta(\omega(\mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{k}) - \Omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}))\,, \tag{5.8}$$

wobei das Argument der δ-Funktion explizit durch

$$\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}q - \sqrt{k^2+M^2} - \sqrt{k^2 - 2kq\cos\vartheta + q^2 + M^2}\,. \tag{5.9}$$

gegeben ist. Mit Kugelkoordinaten (k, ϑ, φ) ergibt sich nach der Integration über φ und ϑ:

$$\gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi q}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \mathrm{d}k\, \frac{k}{\sqrt{k^2+M^2}} A(\Omega(\mathbf{q}), \mathbf{q}, \omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})_{\text{Spinor/Skalar}}\,. \tag{5.10}$$

Ein kinematischer Unterschied zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung ist, dass ein minimaler Elektronimpuls $k_{\min} \neq 0$ bei der Phasenraumintegration auftritt. Dabei sind $k_{\min}$ und die obere Integrationsgrenze $k_{\max}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} k_{\min} &= -\frac{q}{2} - \frac{1}{2\widetilde{\kappa}_{00}}\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}[(3+2\widetilde{\kappa}_{00})M^2 + \widetilde{\kappa}_{00}q^2]\frac{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}} = \\ &= -\frac{q}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{q\widetilde{\kappa}_{00}}\right)\,, \end{aligned} \tag{5.11a}$$

$$k_{\max} = \frac{q}{2} - \frac{1}{2\widetilde{\kappa}_{00}}\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}[(3+2\widetilde{\kappa}_{00})M^2 + \widetilde{\kappa}_{00}q^2]\frac{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}} =$$
$$= q\left(1 - \frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{q\widetilde{\kappa}_{00}}\right), \tag{5.11b}$$

wobei die letzten beiden Formeln nur oberhalb der Schwelle gelten.

5.3. Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse für die Zerfallsbreite des Zerfalls eines modifizierten Photons $\widetilde{\gamma}$ lassen sich übersichtlicher in Abhängigkeit des Parameters $\xi = (4/3)\widetilde{\kappa}_{00}$ schreiben. Es sei außerdem

$$\mathcal{A} \equiv \sqrt{\frac{2+\xi}{2-\xi}}\,. \tag{5.12}$$

Die Zerfallsbreite in Teilchen-Antiteilchen Paar von Spin-1/2-Fermionen ergibt sich dann zu:

$$\Gamma^{\widetilde{\gamma}\to f\overline{f}}_{\text{Spinor}} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{2-\xi}{6\,(2+\xi)^{7/2}\,\sqrt{(1-\xi/2)}\,E^2}$$
$$\times\left\{\mathcal{C}_4\left(\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2\right) + 2\,\mathcal{A}\,E\,\mathcal{C}_3\left(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2\right) + \mathcal{C}_5\left(\mathcal{C}_1^2-\mathcal{C}_2^2\right)\right\}, \tag{5.13}$$

mit

$$\mathcal{C}_1 \equiv \sqrt{\frac{(2+\xi)^2\,M^2 + \mathcal{A}\,E\left(2\,\mathcal{A}\,\xi\,E - \mathcal{C}_3\right)}{\xi\,(2+\xi)}}, \tag{5.14a}$$

$$\mathcal{C}_2 \equiv \sqrt{\frac{(2+\xi)^2\,M^2 + \mathcal{A}\,E\left(2\,\mathcal{A}\,\xi\,E + \mathcal{C}_3\right)}{\xi\,(2+\xi)}}, \tag{5.14b}$$

$$\mathcal{C}_3 \equiv \sqrt{\xi\,(4-\xi^2)\left[\,2\,(2+\xi)\,M^2 + \mathcal{A}^2\,\xi\,E^2\,\right]}, \tag{5.14c}$$

$$\mathcal{C}_4 \equiv 16\left[\,(1+\xi)\,M^2 - \mathcal{A}^2\,\xi\,E^2\,\right] + 4\,\xi^2\,M^2\,, \tag{5.14d}$$

$$\mathcal{C}_5 \equiv 3\sqrt{2}\,\xi\,(2+\xi)\,E\,. \tag{5.14e}$$

Entsprechend lautet die Zerfallsbreite in ein Teilchen-Antiteilchen-Paar von Spin-0-Bosonen:

$$\Gamma^{\widetilde{\gamma}\to b\overline{b}}_{\text{Skalar}} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{1}{3\sqrt{2-\xi}(2+\xi)^{\frac{5}{2}}E^2}\left\{12\xi E^3 - \sqrt{2}\xi\left((2-3\xi)\mathcal{D}_1 + 8\mathcal{D}_2\right)E^2\right.$$
$$-(\xi-2)\left(6(\xi+2)M^2 + \sqrt{2}(\mathcal{D}_2-\mathcal{D}_1)\mathcal{D}_3\right)E$$
$$\left.-2\sqrt{2}(\xi^2-4)(\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2)M^2\right\}, \tag{5.15}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &\equiv \sqrt{\left(1+\frac{2}{\xi}\right)M^2 + \left(\frac{\mathcal{D}_3}{\xi} + \frac{2}{2-\xi}E\right)E}\,,\\
\mathcal{D}_2 &\equiv \sqrt{\left(1+\frac{2}{\xi}\right)M^2 - \left(\frac{\mathcal{D}_3}{\xi} - \frac{2}{2-\xi}E\right)E}\,,\\
\mathcal{D}_3 &\equiv \sqrt{\mathcal{A}^2\xi(\xi E^2 + 2(2-\xi)M^2)}\,.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Schwellenenergie liegt bei

$$E_{\mathrm{th}} = 2M\sqrt{\frac{1-\xi/2}{-\xi}}\,. \tag{5.17}$$

Zusätzlich geben wir die Entwicklungen der Zerfallsbreiten für $E \gg M^2$ und $-\xi \ll 1$ an:

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma^{\widetilde{\gamma}\to\mathrm{f}\overline{\mathrm{f}}}_{\mathrm{Spinor}} = \left(-\frac{\xi}{3} - \frac{\xi^3}{12}\right)E + \left(-2 + \xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)\right)\frac{M^4}{E^3} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\xi E^3}\right)\,, \tag{5.18a}$$

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma^{\widetilde{\gamma}\to\mathrm{b}\overline{\mathrm{b}}}_{\mathrm{Skalar}} = \left(-\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{8}\right)E + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)\frac{M^2}{E} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\xi E^3}\right)\,. \tag{5.18b}$$

Die Zerfallsbreiten verhalten sich hier analog zu denen der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, weshalb wir hier auf weitere Schaubilder verzichten wollen.

Kapitel 6.

Der Proton-Breakup-Prozess

In diesem Kapitel möchten wir einen Prozess betrachten, bei dem ein Proton über ein modifiziertes virtuelles Photon ein Proton-Antiproton-Paar oder ein Elektron-Positron-Paar abstrahlt. Die zugehörigen Feynman-Diagramme dieser Zerfälle, die wir im Folgenden als Proton-Breakup-Prozesse bezeichnen möchten, sind auf Baumgraphenniveau in Abb. 6.1 dargestellt.

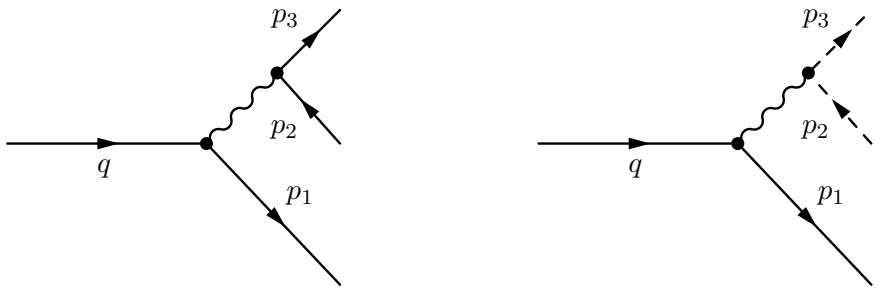


Abbildung 6.1.: Proton-Breakup-Prozesse $p \to p\overline{p}p$ und $p \to pe^+e^-$. Durchgezogene Linien sollen (Anti-)protonen darstellen und gestrichene Linien Elektronen/ Positronen. Das einlaufende Proton trägt den Viererimpuls q. Beim ersten Prozess tragen die auslaufende Protonen die Impulse p_1 bzw. p_3 und das auslaufende Antiproton den Impuls p_2. Beim zweiten Prozess wird das Proton-Antiproton-Paar im Endzustand durch ein Elektron-Positron-Paar ersetzt. Das virtuelle Photon ist durch die Verletzung der Lorentzsymmetrie als modifiziert zu betrachten.

Allgemein handelt es sich bei einem Proton-Breakup-Prozess also um einen $(1 \to 3)$-Zerfall. Dieser wurde beispielsweise in [43] aufgeführt, dort jedoch nicht sehr ausführlich untersucht. Da er sich für die Bestimmung von Schranken an Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter als sehr nützlich erweisen könnte, soll der Prozess im Folgenden detailliert untersucht werden. Dazu führen wir die Analyse zunächst in der Näherung punktförmiger Protonen durch, um die Berechnungen zu vereinfachen. Sofern sich diese Näherung als unbrauchbar herausstellt, muss in die Betrachtungen zusätzlich die Struktur des Protons einfließen.

6.1. Das Proton als punktförmiges Teilchen

6.1.1. Der Proton-Breakup-Prozess in der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik

In der Standard-QED sind die beiden Prozesse $\mathrm{p} \to \mathrm{p}\overline{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ und $\mathrm{p} \to \mathrm{p}\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ kinematisch verboten. Die Energiebilanz führt nämlich auf

$$m_\mathrm{p} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_\mathrm{p}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_\mathrm{p}^2} + \sqrt{(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2)^2 + m_\mathrm{p}^2}\,, \tag{6.1}$$

wobei m_p die Protonmasse und $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ die räumlichen Impulse der auslaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem des einlaufenden Protons ist. Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (6.1) ist immer größer als m_p, so dass die Energiebilanz nicht erfüllt sein kann und die Zerfallsbreite des Prozesses verschwindet. Analog lässt sich die Argumentation für den zweiten der oben dargestellten Prozesse mit der Energiebilanz

$$m_\mathrm{p} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_\mathrm{p}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_\mathrm{e}^2} + \sqrt{(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2)^2 + m_\mathrm{e}^2}\,, \tag{6.2}$$

führen, wobei m_e die Elektronmasse ist.

6.2. Der Proton-Breakup-Prozess in der modifizierten Quantenelektrodynamik

6.2.1. Verletzung der Lorentzsymmetrie im Photonsektor

Die Lorentzsymmetrieverletzung im Photonsektor führt zu einer modifizierten Dispersionsrelation von Photonen, welche im räumlich isotropen Falle durch Gl. (3.24) gegeben ist. Darüber hinaus ändert sich der Photonpropagator, wie wir in Teil IV der Dissertation sehen werden. Jedoch bleibt die Dispersionsrelation für massive Teilchen unberührt und somit auch die Energiebilanz in den Gln. (6.1), (6.2), so dass die beiden Prozesse weiterhin kinematisch nicht erlaubt sind.

6.2.2. Verletzung der Lorentzsymmetrie im Materiesektor

Durch die Koordinatentransformation

$$x'^\mu = x^\mu - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\mu{}_\nu x^\nu\,, \tag{6.3}$$

kann die Lorentzsymmetrieverletzung vom Photonsektor in den Materiesektor übertragen werden und zwar in führender Ordnung bezüglich der Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter [27]. Nach dieser Transformation ist die Dispersionsrelation der Photonen frei von jeglicher

Lorentzsymmetrieverletzung,[1] wohingegen die Energie-Impuls-Beziehung für massive Teilchen die folgende Form annimmt:

$$p_0 = |\beta|\sqrt{\mathbf{p}^2 + \widetilde{m}^2}\,, \quad \widetilde{m} = \frac{m}{\beta^2}\,, \quad \beta^2 = \frac{1 - \frac{1}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \widetilde{\kappa}_{00}}\,. \tag{6.4}$$

Die ausführliche Rechnung wird in Anhang B präsentiert. Somit ist die Energiebilanz im Schwerpunktsystem des einlaufenden Protons für beide Prozesse von der folgenden Form:

$$\widetilde{m}_\mathrm{p} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + \widetilde{m}_\mathrm{p}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + \widetilde{m}_\mathrm{p}^2} + \sqrt{(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2)^2 + \widetilde{m}_\mathrm{p}^2}\,, \tag{6.5}$$

und

$$\widetilde{m}_\mathrm{p} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + \widetilde{m}_\mathrm{p}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + \widetilde{m}_\mathrm{e}^2} + \sqrt{(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2)^2 + \widetilde{m}_\mathrm{e}^2}\,. \tag{6.6}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass sich durch eine Redefinition nicht die Form der Energiebilanz ändert, sondern nur die Massen m_p bzw. m_e durch $\widetilde{m}_\mathrm{p}$ bzw. $\widetilde{m}_\mathrm{e}$ ersetzt werden. Damit ist der Proton-Breakup-Prozess auch in der modifizierten Theorie energetisch verboten. Die Näherung, das Proton als punktförmiges Teilchen zu betrachten, hat sich bei der Vakuum-Cherenkov-Strahlung und beim Photonzerfall als ausreichend herausgestellt. Behalten wir jedoch diese Näherung bei, so sind speziell mittels des Proton-Breakup-Prozesses aus physikalischer Sicht keinerlei Fortschritte zu erwarten. Das sogenannte Partonmodell ist eine Erweiterung des punktförmigen Modells des Protons und wir werden sehen, dass dieses benötigt wird, um den Proton-Breakup-Prozess im räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie zu ermöglichen.

6.3. Das Proton als ausgedehntes Teilchen

6.3.1. Quantenchromodynamik

Die klassische Chromodynamik (QCD) ist invariant unter Skalentransformationen.[2] Diese Invarianz, die nur ein Coulomb-Potential zwischen Teilchen erlaubt, welches invers mit dem Abstand abfällt, ist jedoch durch die konforme Anomalie, also durch Quanteneffekte, gebrochen: Quantenkorrekturen des Gluonfeldes führen zum Laufen der starken Kopplungskonstanten α_s in Abhängigkeit von der Energie. Um diesem Laufen eine physikalische Bedeutung zu geben, muss der Wert der Kopplung bei einer Energie Q^2 in Bezug auf die Kopplung bei einer festgelegten Energieskala gemessen werden. Für diese Skala wählt man den Wert Λ_QCD, bei welcher die Kopplungskonstante groß wird und nicht-störungstheoretische Effekte in der QCD auftreten. Die konforme Anomalie führt also dazu, dass in die skalenlose klassische Theorie eine Energies-

[1] in führender Ordnung des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters

[2] Die umfassende Invarianzgruppe der klassischen QCD ist die konforme Lorentz-Gruppe, von der die Skalentransformationen eine Untergruppe bilden.

kala Λ_{QCD} eingeführt wird, bei der das Confinement der Quarks auftritt. Der linear mit dem Abstand ansteigende Anteil des QCD-Potentials kann also klassisch nicht erklärt werden und ist eine Folge dieser Anomalie. Die Masse der stark gebundenen Hadronen, wie beispielsweise die des Protons, wird zum großen Teil nicht durch die Masse der Valenzquarks bestimmt, sondern durch Λ_{QCD}. Physikalisch handelt es sich dabei um Energie des Gluonfeldes, die von virtuellen Gluonen und Quarks (Seequarks) herrührt. Das Proton ist somit nicht punktförmig,

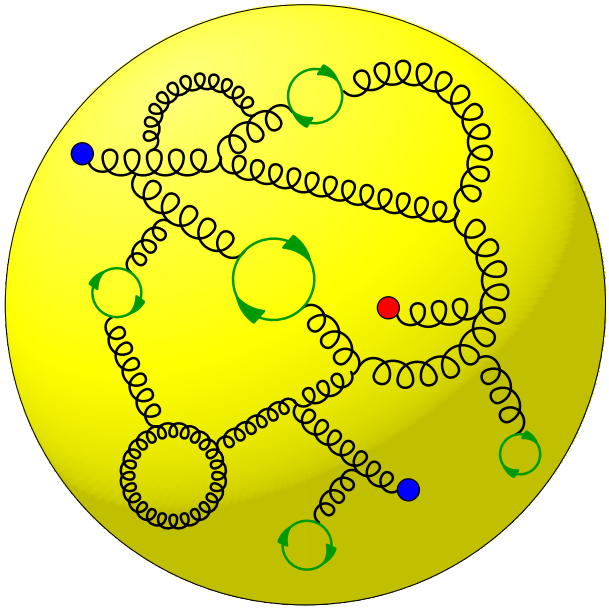


Abbildung 6.2.: Innere Struktur eines Protons. Die drei farbigen ausgefüllten Kreise sollen die Valenzquarks veranschaulichen. Gluonen werden als geschwungene Linien und virtuelle Quark-Antiquark-Paare als durchgezogene Linien dargestellt.

sondern es handelt sich um ein ausgedehntes Teilchen, in dem Valenzquarks über ein Gluonfeld stark gebunden sind (siehe dazu als Abb. 6.2 als Veranschaulichung). Dieses wichtige Teilchen ist immer noch nicht vollständig verstanden, da es bei kleinen Impulsüberträgen perturbativ nicht zugänglich ist.

6.3.2. Das Partonmodell

Schon in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts war durch tief-inelastische Streuexperimente bekannt, dass das Proton kein punktförmiges Teilchen ist, sondern eine innere Struktur aufweist und aus weiteren Konstituenten besteht, für welche Feynman den Begriff „Parton“ einführte [44, 45]. 1971 und 1972 hielt Feynman einige Vorlesungen in Caltech, in denen er anmerkte, dass es sich bei Partonen um die von Gell-Mann [46] und Zweig [47] postulierten Quarks handeln könnte. In der Tat ist das Proton ein sehr komplexes Objekt, welches aus Konstituenten besteht, die sich wie punktförmige Teilchen verhalten. Es setzt sich zusammen aus drei Valenzquarks (zwei Up- und ein Down-Quark), welche über das Gluonfeld stark gebunden

sind. Zusätzlich treten Quantenfluktuationen des Gluonfeldes, also virtuelle Quark-Antiquark-Paare (und weitere virtuelle Teilchen) auf.

Da das Proton als nicht-elementares Teilchen sehr kompliziert ist, müssen einige Vereinfachungen gemacht werden, um dessen innere Struktur beschreiben zu können; ein solches leistet das Partonmodell bei großen Impulsüberträgen. In diesem Modell trägt jeder Konstituent i einen Impuls $p_i = x_i p$, wobei x_i der Bruchteil des Gesamtimpulses p des Protons ist. Eine weitere Annahme ist, dass sich das Proton unendlich schnell bewegt („infinite momentum frame“), so dass man die Transversalimpulse der Partonen vernachlässigen kann. Das naive Partonmodell schreibt darüber hinaus vor, dass die Partonen nicht miteinander wechselwirken sollen. Wechselwirkungen sind durch Potenzen der jeweiligen Kopplungskonstanten unterdrückt und werden im naiven Partonmodell nicht betrachtet. Weiterhin führt man eine Partonverteilungsfunktion $f_{i,h}(x_i)$ des Hadrons h ein, welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die Partonspezies i einen Impulsbruchteil $0 \leq x_i \leq 1$ ($\sum_i x_i = 1$) des Hadronimpulses p besitzt. Die Verteilungen $f_{i,h}(x_i)$ sind bei großen Impulsüberträgen nur Funktionen der jeweiligen x_i (Bjorken scaling). QCD-Korrekturen liefern jedoch eine zusätzliche Energieabhängigkeit, wobei ihre Entwicklung bezüglich der Energie durch die DGLAP-Gleichungen (benannt nach Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi) beschrieben werden [48, 49, 50]. Dabei handelt es sich um einen Satz gekoppelter linearer, partieller Differentialgleichungen. Für unsere Berechnungen benötigen wir die sogenannten Integralverteilungen

$$\chi_{i,h} \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x\, x f_{i,h}(x)\,, \tag{6.7}$$

welche den Impulsanteil angeben, den Partonspezies i trägt. Diese Verteilungen genügen einem Satz von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen [43] und sind somit mathematisch einfacher zu handhaben als die ursprünglichen Partonverteilungsfunktionen $f_{i,h}(x_i)$. In den Gleichungen treten die laufenden Kopplungskonstanten $g_s(q)$ (die starke Kopplung), $g(q)$, $g'(q)$ (die schwachen Kopplungen) und $g_y(q)$ (die Top-Quark-Yukawa-Kopplung) auf. Diese können für gegebene Anfangsbedingungen numerisch gelöst werden.

6.4. Der Proton-Breakup-Prozess im Partonmodell

Die Diskussion in [43] soll als Basis dieses Abschnitts dienen. Alle Berechnungen werden zu führender Ordnung in den Lorentzsymmetrie-verletzenden Parametern durchgeführt, was diese vereinfacht und die physikalische Interpretation erleichtert. Wir wollen uns außerdem auf den räumlich isotropen Fall beschränken. Die maximale Geschwindigkeit c_A für das Photonfeld und c_ψ für Spinorfelder sind dann gegeben durch:

$$c_A = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}} = 1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\,, \quad c_\psi = 1\,. \tag{6.8}$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, den dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon = \frac{c_A - c_\psi}{c_A} = -\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\,, \tag{6.9}$$

einzuführen. Bisher blieb die Energiebilanz des Proton-Breakup-Prozesses von einer Verletzung der Lorentzsymmetrie unberührt. Jedoch wird sich dies ändern, wenn wir den Partoninhalt des Protons einführen. Der Erwartungswert des Operators $\mathcal{O}_D$ bezüglich des Hadronzustands $|h, \mathbf{p}\rangle$ ist im Partonmodell gegeben durch

$$\langle h, \mathbf{p}|\mathcal{O}_D|h, \mathbf{p}\rangle = \sum_i \langle O_D\rangle_i \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{D-3} f_{i,h}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)\,. \tag{6.10}$$

Hierbei ist D die Massendimension des Operators und $\langle O_D\rangle_i = \langle i, \mathbf{p}|\mathcal{O}_D|i, \mathbf{p}\rangle$ der Erwartungswert des Operators $\mathcal{O}_D$ in Bezug auf einen Zustand $|i, \mathbf{p}\rangle$, in dem die Partonspezies i den Impuls $\mathbf{p}$ trägt. Zusätzlich ist $f_{i,h}(x)$ die Partonverteilungsfunktion der Spezies i im Hadron h. Die maximale Geschwindigkeit c_h dieses Hadrons beträgt dann

$$c_h = \sum_i c_i \int_0^1 \mathrm{d}x\, x f_{i,h}(x)\,, \tag{6.11}$$

mit der maximalen Geschwindigkeit c_i der Spezies i. Wir wollen nun beliebige Teilchen im Partonmodell beschreiben; auch solche, die man zunächst naiv als punktförmig betrachtet wie beispielsweise das Elektron. Der Eichbosoninhalt $\chi_{\mathrm{gauge},h}$ eines solchen Teilchens h sei

$$\chi_{\mathrm{gauge},h} := \int_0^1 \mathrm{d}x\, x[f_{\mathrm{U}(1),h}(x) + f_{\mathrm{SU}(2),h}(x) + f_{\mathrm{SU}(3),h}(x)]\,, \tag{6.12}$$

wobei $f_{\mathrm{U}(1),h}(x)$ die Partonverteilungsfunktion eines Photons, $f_{\mathrm{SU}(2),h}(x)$ die der schwachen Eichbosonen und $f_{\mathrm{SU}(3),h}(x)$ die der Gluonen ist. $\chi_{\mathrm{gauge},h}$ kann Werte zwischen null und eins annehmen. In der modifizierten QED ist die maximale Geschwindigkeit eines massiven Spin-1/2-Fermions (mit gewissem Eichbosoninhalt) gegeben durch

$$c_h = \chi_{\mathrm{U}(1),h} c_A + (1 - \chi_{\mathrm{U}(1),h}) c_\psi = \chi_{\mathrm{U}(1),h}(c_A - c_\psi) + c_\psi = \chi_{\mathrm{U}(1),h}\varepsilon c_A + c_\psi\,, \tag{6.13}$$

woraus sich

$$c_h = 1 + \chi_{\mathrm{U}(1),h}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \tag{6.14}$$

ergibt. Korrekturen sind von höherer Ordnung im Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter. Zur Vereinfachung werden wir von jetzt an die Schreibweise $\chi_{\mathrm{gauge},h} := \chi_h$ benutzen; wir betrachten von jetzt an also nur noch den Eichbosoninhalt. Somit kann die Dispersionsrelation

massiver Teilchen in der Form[3]

$$p_0 = \sqrt{(1+\chi_h\varepsilon)^2 p^2 + (1+\chi_h\varepsilon)^4 m^2} = \\ = p(1+\chi_h\varepsilon) + \frac{m^2}{2p} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2, \frac{m^4}{p^3}, \varepsilon\frac{m^2}{p}\right), \tag{6.15}$$

geschrieben werden, wobei Entwicklungen sowohl in m^2/p als auch ε durchgeführt wurden, da experimentelle Schranken auf UHECRs basieren, deren Energie viel größer als deren Masse ist. In den folgenden Betrachtungen seien ξ_p und ξ_e die Eichbosoninhalte des Protons bzw. Elektrons (Positrons). Wenn im Proton-Breakup-Prozess ausschließlich Protonen (und Antiprotonen) beteiligt sind, hat die geänderte Dispersionsrelation (6.15) keinen Einfluss auf die Energiebilanz (6.5), da χ_p sich für Protonen und Antiprotonen nicht unterscheidet, wenn man CPT-Invarianz zugrunde legt. Somit ist der Prozess $\mathrm{p} \to \mathrm{p}\overline{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ weiterhin verboten, sogar im Partonmodell. Jedoch ändert sich das Bild, sobald Elektronen beteiligt sind, da dann eine analoge Redefinition wie in (6.5) nicht länger möglich ist, sofern der Eichbosoninhalt des Protons sich von dem des Elektrons unterscheidet. Betrachten wir also den Prozess $\mathrm{p} \to \mathrm{pe^+e^-}$, so ergibt sich für den Energieunterschied zwischen dem Proton im Anfangszustand und den Teilchen im Endzustand, wenn der Öffnungswinkel zwischen den Teilchenimpulsen verschwindet:

$$\Delta E = (1+\chi_\mathrm{p}\varepsilon)p + \frac{m_\mathrm{p}^2}{2p} - (1+\chi_\mathrm{p}\varepsilon)(1-x_1-x_2)p - \frac{m_\mathrm{p}^2}{2p(1-x_1-x_2)} \\ - (1+\chi_\mathrm{e}\varepsilon)x_1 p - \frac{m_\mathrm{e}^2}{2px_1} - (1+\chi_\mathrm{e}\varepsilon)x_2 p - \frac{m_\mathrm{e}^2}{2px_2} = \\ = (x_1+x_2)\left\{(\chi_\mathrm{p}-\chi_\mathrm{e})\varepsilon p - \frac{m_\mathrm{p}^2}{2p(1-x_1-x_2)}\right\}, \tag{6.16}$$

wobei p der Impuls des einlaufenden Protons, $x_1 p$ der des Elektrons und $x_2 p$ der des Positrons ist (mit $x_1 + x_2 \in [0,1]$). m_p und m_e seien die Massen des Protons bzw. Elektrons (Positrons). Der Proton-Breakup-Prozess ist bei $\Delta E = 0$ gerade energetisch erlaubt. Für $\Delta E > 0$ kann der Prozess mit einem endlichen Öffnungswinkel der Impulse der Teilchen im Endzustand stattfinden, wozu die zusätzliche Energie benötigt wird. Die Schwellenenergie ergibt sich aus (für $x_1 = x_2 = 0$):

$$E_\mathrm{th} = \sqrt{p_\mathrm{th}^2 + m_\mathrm{p}^2}, \quad p_\mathrm{th}^2 = \frac{m_\mathrm{p}^2}{2(\chi_\mathrm{p}-\chi_\mathrm{e})\varepsilon}, \tag{6.17}$$

und in führender Ordnung in ε gilt

$$E_\mathrm{th} = \frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{2(\chi_\mathrm{p}-\chi_\mathrm{e})}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{6.18}$$

[3]Man beachte, dass $p_0 = \sqrt{c^2p^2 + c^4m^2}$ in der gewöhnlichen QED gilt, sofern man c wieder einsetzt.

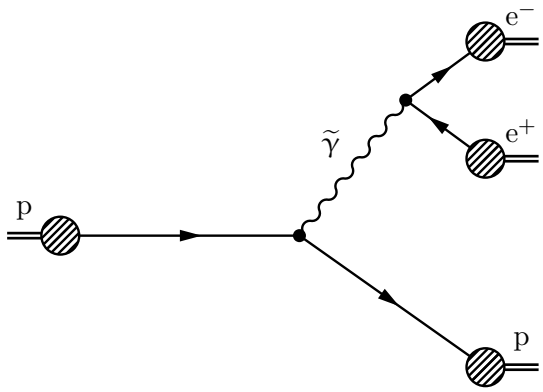


Abbildung 6.3.: Proton-Breakup-Prozess im Partonmodell. Sowohl das Proton als auch das Elektron/Positron werden als Teilchen mit einem gewissen Partoninhalt betrachtet. Das virtuelle Photon werde von einem elektrisch geladenen Parton emittiert.

Für $\varepsilon = -(2/3)\widetilde{\kappa}_{00}$ folgt

$$E_{\mathrm{th}} = \frac{m_{\mathrm{p}}}{2} \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\dfrac{3}{\chi_{\mathrm{e}} - \chi_{\mathrm{p}}}} \dfrac{1}{\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}} & \text{für} \quad \widetilde{\kappa}_{00} > 0 \\ \sqrt{\dfrac{3}{\chi_{\mathrm{p}} - \chi_{\mathrm{e}}}} \dfrac{1}{\sqrt{-\widetilde{\kappa}_{00}}} & \text{für} \quad \widetilde{\kappa}_{00} < 0 \end{array} \right\} + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\widetilde{\kappa}_{00}|}\right) . \tag{6.19}$$

Aus Gl. (6.19) ist ersichtlich, dass der Prozess für positive $\widetilde{\kappa}_{00}$ nur dann stattfindet, wenn der Eichbosoninhalt des Elektrons größer ist als der des Protons und umgekehrt für negative $\widetilde{\kappa}_{00}$. Der Unterschied im Partoninhalt zwischen den Teilchen im Anfangs- und im Endzustand geht in die Schwellenenergie ein. Als punktförmige Teilchen unterscheidet sich das Proton vom Elektron bei hohen Energien nur in der Ladung, weil die Massen in diesem Fall sowieso vernachlässigbar sind. Dann ist $\chi_{\mathrm{p}} = \chi_{\mathrm{e}} = 0$ und die Schwelle liegt im Unendlichen; der Prozess ist also energetisch verboten. Da sich jedoch die Partonstruktur beider Teilchen stark unterscheidet, kann der Prozess im Partonmodell ab einer endlichen Schwelle stattfinden.

6.5. Auswirkungen der Lorentzsymmetrieverletzung im Eichsektor der Partonen

Nun wollen wir uns ausschauen, was die Verletzung der Lorentzsymmetrie im Eichsektor der Partonen für das entsprechende Teilchen (beispielsweise ein Proton oder Elektron) zur Folge hat. Zur Veranschaulichung soll das Feynman-Diagramm in Abb. 6.4 betrachtet werden. Im Partonmodell trägt ein massives Teilchen – auch wenn es naiv ein strukturloses Teilchen wie das Elektron ist – eine Wolke von virtuellen Eichbosonen, die emittiert und wieder absorbiert werden; das Teilchen wechselwirkt also mit seinem eigenen Strahlungsfeld. Der erste Gedanke könnte sein, dass sich die Verletzung der Lorentzsymmetrie im Eichsektor der Partonen nicht

auf das Teilchen auswirkt, weil die Eichbosonen in der Wolke virtuell sind und somit nicht ihrer Dispersionsrelation genügen.

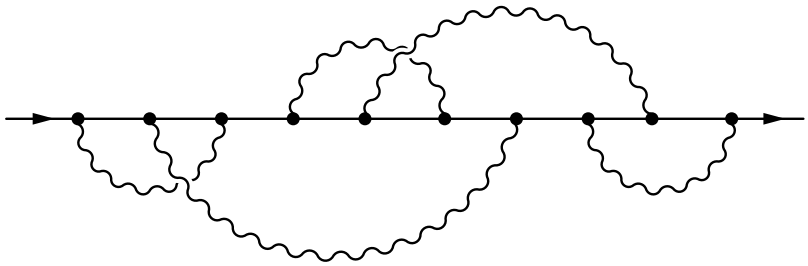
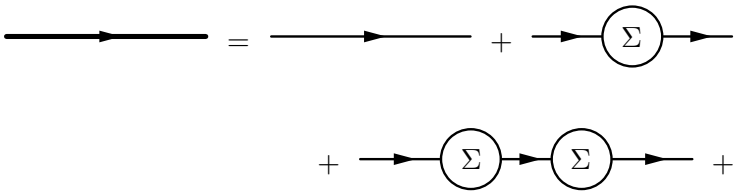


Abbildung 6.4.: Massives Fermion, das mit seinem eigenen Strahlungsfeld wechselwirkt. Die durchgezogene Linie stellt das Fermion dar und die geschlängelten Linien die virtuellen Eichbosonen, die im Einklang mit der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation emittiert und wieder absorbiert werden.

Das ist in der Tat jedoch nicht so. Ein Ein-Schleifen-Selbstenergie-Beitrag mit einem Lorentzsymmetrie-verletzenden Photon ist in Abb. 6.5 dargestellt. Das Diagramm in Abb. 6.5 (und andere Selbstenergie-Beiträge höherer Ordnung Störungstheorie) gehören zu einer Menge von ein-Teilchen-irreduziblen Diagrammen, welche in Abb. 6.6 symbolisiert sind. Eine Dyson-Resummation führt zum vollen Propagator, welcher als dicke durchgezogene Linie dargestellt wird:



$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_0} + \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}\right) + \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}\right)^2 + \ldots = \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}\,. \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

Durch den Selbstenergiebeitrag wird die nackte Masse, welche in der Lagrangedichte als Pa-

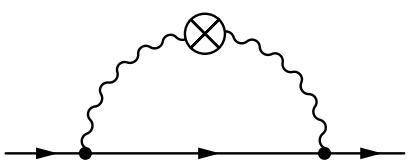


Abbildung 6.5.: Selbstenergie eines Fermions. Die geschlängelte Linie mit dem Kreuz symbolisiert einen Lorentzsymmetrie-verletzenden Propagator.

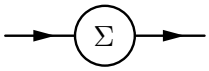


Abbildung 6.6.: Die Menge aller ein-Teilchen-irreduziblen Graphen.

rameter auftaucht, renormiert. Die physikalische Masse ist nämlich als Pol des Propagators definiert:

$$[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})]_{\not{p}=m} = 0\,. \tag{6.21}$$

Zu führender Ordnung in $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$ ist die Renormierung der Masse gegeben durch:

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma(\not{p} = m) \approx \Sigma(\not{p} = m_0)\,, \tag{6.22}$$

also

$$\delta m = \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right)\,, \tag{6.23}$$

wobei die auftretende Divergenz mittels des Pauli-Villars-Regulators Λ behandelt wurde [38]. Im Allgemeinen wird das Ergebnis der skalaren Beiträge eines Schleifenintegrals nur von Lorentzinvarianten (also Lorentzskalaren) abhängen, welche aus den Skalen[4] gebildet werden, die im Integranden auftreten. (Dabei muss die Massendimension des Ergebnisses mit der Massendimension des Integrals übereinstimmen.) Diese Skalen können Teilchenmasse oder externe Impulse sein. Treten beispielsweise zwei Skalen – eine Masse m und ein externer Vierimpuls p – auf, wird das Ergebnis von der Form

$$A \cdot f(m, p_\alpha p^\alpha) \cdot g\left(\frac{m^2}{p_\alpha p^\alpha}\right)\,, \tag{6.24}$$

sein, wobei A ein Vorfaktor ist, welcher nicht von m und p abhängt. f ist eine Funktion, welche die richtige Massenskala im Ergebnis festlegt, und g hängt von dimensionslosen Quotienten aus Invarianten zusammen, also in diesem Falle von Potenzen von $m^2/(p_\alpha p^\alpha)$. Im QED-Diagramm in Abb. 6.5 sind die Skalen durch $p_\alpha p^\alpha$ und m_0^2 gegeben, wobei p^μ der äußere Impuls und m_0 die nackte Masse des Fermions ist. Da das äußere Teilchen sich auf der Massenschale befindet, hängt die Massenverschiebung δm nur von m_0 ab. Soviel zu einer Theorie, welche die Lorentzsymmetrie erhält.

Die Situation ist jedoch anders, sofern die Lorentzsymmetrie verletzt ist. Der isotrope Fall der modifizierten Maxwell-Theorie ist durch einen bevorzugten Vierervektor ξ^α (und einen Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$) charakterisiert. Somit ist es möglich, eine weitere dimensionsbehaftete Invariante[5] zu konstruieren, nämlich $p_\alpha \xi^\alpha$ mit der Folge, dass δm auch von dieser Invarianten abhängt. Somit fließt eine direkte Abhängigkeit der Selbstenergie vom äußeren Impuls ein, und diese

[4] Dies können physikalische Skalen wie äußere Impulse oder unphysikalische Skalen wie die nackte Masse sein.
[5] unter passiven Lorentztransformationen

Beiträge werden die Dispersionsrelation des zugrunde liegenden Fermions ändern. Dies geschieht also, obwohl die Eichbosonen virtuell sind. Es handelt sich dabei gewissermaßen um einen Schleifen-induzierten Prozess. Der Eichbosoneninhalt ist ein Maß dafür, inwieweit sich die Dispersionsrelation des Fermions ändert. Diese mehr qualitative Betrachtung wird in Teil V der Dissertation durch quantitative Berechnungen von Quantenkorrekturen untermauert.

6.6. Berechnung der Zerfallsbreite des Prozesses

In einer ersten Betrachtung wurde der modifizierte Photonpropagator berücksichtigt, jedoch Auswirkungen auf die Spinsummen der Fermionen zunächst vernachlässigt. Man erhält dann folgendes Ergebnis im Grenzfall großer Impulse und kleiner Lorentzsymmetrieverletzung:

$$\Gamma^{(\text{Spezialfall})} = \frac{\varepsilon}{72\pi^3}\left\{32\frac{p^5}{m_\text{p}^4} - 46\frac{p^3}{m_\text{p}^2} + p\left[29 + 12\ln(2) + 12\ln\left(\frac{p^2}{m_\text{p}^2}\right)\right]\right\} + \mathcal{O}\left(\frac{m_\text{p}^2}{p}, \varepsilon^2\right). \tag{6.25}$$

Die genaue Berechnung findet sich in A.3. Das Ergebnis (6.25) wurde für eine spezielle, einfache Wahl der Parameter ermittelt, nämlich für einen Eichbosoninhalt[6] des Protons bei 1/2 und dem des Elektrons bei 3/20. Das Endergebnis ist linear zum Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter ε und verschwindet im Grenzfall gewöhnlicher QED. Weiterhin hängt die Zerfallsbreite sehr stark vom einlaufenden Impuls ab und zwar in fünfter Potenz! Da m_p im Nenner auftaucht, ist es ersichtlich, dass die Teilchenmassen zur Regularisierung beibehalten werden müssen und nicht vernachlässigt werden dürfen. Somit wird die Zerfallsbreite für ein ultra-hochenergetisches Proton sehr hoch sein, was eine sehr kurze „Lebensdauer“ des Teilchens oberhalb der Schwelle zur Folge hat. Das Proton wird seine Energie unmittelbar nach seiner Produktion verlieren und eine Kaskade von Elektron-Positron-Paaren abstrahlen, bis die Energie unterhalb die Schwelle fällt.

Die starke Abhängigkeit der Zerfallsbreite vom Impuls des Protons hat einen tieferen physikalischen Ursprung. Ein kleiner Lorentzsymmetrie-verletzender Parameter sorgt dafür, dass der Proton-Breakup-Prozess energetisch erlaubt ist, sogar für nicht-verschwindende Teilchenmassen. Dies steht im engen Zusammenhang mit dem Fall gewöhnlicher QED, wenn alle Teilchenmassen verschwinden.[7] Der Prozess ist dann prinzipiell erlaubt und wird so stattfinden, dass das Elektron-Positron-Paar kollinear zum Proton emittiert wird. Das führt zu einem virtuellen Photon, das sich auf dem Lichtkegel befindet, und damit zu einer Divergenz der Zerfallsbreite. Der entscheidende Unterschied zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung bzw. zum Photonzerfall – wo dieses Verhalten nicht auftritt – ist, dass hier der Prozess über ein virtuelles Photon stattfindet.

[6] Diese Wahl lehnt sich an Tabelle I aus [43] an, wo die entsprechenden Eichbosoninhalte verschiedener Teilchen bis zu einer Skala von 10^{11} GeV skaliert wurden.

[7] siehe dazu die Diskussion in Abschnitt A.3.4 im Anhang

Kapitel 7.

Die Schwellenenergie und Abstrahlungsrate des (Vakuum-)Cherenkov-Prozesses für eine Ladungsverteilung

7.1. Klassischer Zugang

In Abschnitt 4.1 haben wir die Frank-Tamm-Formel zur Bestimmung der abgestrahlten Energie bei der klassischen Cherenkov-Strahlung kennengelernt. Diese gilt zunächst für eine einzelne Punktladung, kann jedoch wie folgt auf eine Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x})$ wie in Abb. 7.1 mit der Gesamtladung Q und dem Dipolmomentvektor $\mathbf{P}$

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, \varrho(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{P} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathbf{x}\varrho(\mathbf{x})\,. \tag{7.1}$$

verallgemeinert werden:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{Q^2}{c^2}\Bigg\{ &\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) + \frac{P_z^2}{Q^2}\left(\frac{1-\beta^2}{c^2\beta^2}\right)\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \\ &+ \frac{(\mathbf{P} - P_z\mathbf{e}_z)^2}{Q^2}\frac{1}{2c^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, n^2\omega^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{|\mathbf{P}|}{Q}\right)^4\right]\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

In Abschnitt C.2 des Anhangs wird diese Formel hergeleitet. Es wird angenommen, dass die Ladungsverteilung im Unendlichen genügend schnell abfällt; die mittlere Ausdehnung der Verteilung sei $D \simeq |\mathbf{P}|/Q$. Der führende Term mit dem größten Beitrag zur abgestrahlten Energie ist analog zur Frank-Tamm-Formel, wobei die Punktladung durch die Gesamtladung der Verteilung ersetzt wurde. Für eine Ladungsverteilung, deren Gesamtladung verschwindet, tragen also erst verschiedene Komponenten des Dipolmoments zur abgestrahlten Energie bei. Diese sind jedoch für eine Verteilung, die im Unendlichen genügend schnell abfällt, stark unterdrückt und zwar mit der Längenskala D^2. Dies führt für ein Neutron der Ausdehnung $D \approx 1\,\mathrm{fm}$ zu einem Abschwächungsfaktor der Größenordnung $(10^{-15})^2 = 10^{-30}$. Damit ist die abgestrahlte Energie solcher neutraler Teilchen vernachlässigbar zur abgestrahlten Energie eines geladenen

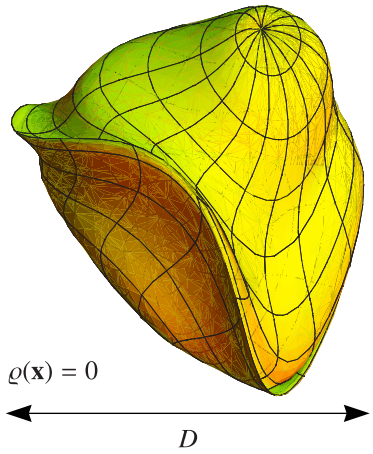


Abbildung 7.1.: Klassische Ladungsverteilung der Ausdehnung D, die am Rand auf null abfällt.

Teilchens wie beispielsweise des Protons. In den Integralen über ω dieser beiden durch das Dipolmoment unterdrückten Terme in Gl. (7.2) tritt außerdem ein Faktor ω^3 anstelle nur eines Faktor ω wie beim ersten Term auf. Physikalisch steckt dahinter die größere Bedeutung von hohen Frequenzen, für die eine Ladungsverteilung kleiner Ausdehnung eine bessere Antenne darstellt. Außerdem ist der Beitrag proportional zu P_z^2 durch einen Faktor $1-\beta^2$ unterdrückt, dessen Ursache in der Längenkontraktion der Ladungsverteilung im Laborsystem liegt, sofern diese sich in z-Richtung bewegt. Im Wesentlichen handelt es sich bei Gl. (7.2) um eine Entwicklung der abgestrahlten Energie nach den Multipolmomenten der Ladungsverteilung. Der nächste Term der Entwicklung beinhaltet deren Quadrupolmomente.

7.2. Quantenfeldtheoretischer Zugang

Betrachtet man ein nicht-elementares Teilchen, wie zum Beispiel das Proton, ist eine zusätzliche Beschreibung von dessen Struktur notwendig. Dafür gibt es zwei Ansätze, nämlich erstens das Quark-Modell von Gell-Mann und Zweig und zweitens das schon in Abschnitt 6.3.2 eingeführte Partonmodell. Beide Modelle beschreiben das Proton in unterschiedlichen Grenzfällen. Das Quarkmodell ist für ein ruhendes oder sich langsam bewegendes Proton geeignet, wohingegen das Partonmodell verwendet wird, sofern Teilchen an einem Proton mit großen Impulsübertrag streuen, wenn sich also das Proton gegenüber den streuenden Teilchen in einem sehr stark geboosteten Bezugssystem befindet. Letztere Streuexperimente bezeichnet man auch als tiefinelastische Streuung.

7.2.1. Zerfallsbreiten im Partonmodell

Wir werden zunächst auf das Partonmodell eingehen. Dieses weist dekohärente Eigenschaften auf, welche sich in der Berechnung von physikalischen Observablen zeigen. Untersucht werden

soll die Streuung zweier nicht elementarer Teilchen h_1 und h_2 (beispielsweise Hadronen), wobei deren innere Struktur im Rahmen des Partonmodells beschrieben wird, also durch Partonverteilungsfunktionen $f_{a/h_1}(x_1)$ und $f_{b/h_2}(x_2)$. Diese geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, ein Parton „a“ mit Impulsanteil px_1 in h_1 bzw. ein Parton „b“ mit Impulsanteil px_2 in h_2 zu finden, wobei man für p den Schwerpunktsimpuls der streuenden Teilchen wählen kann. Infrarot- und kollinear-sichere Observablen H lassen sich dann aus

$$H = \sum_{a,b} \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \, f_{a/h_1}(x_1) H_{ab}(x_1, x_2) f_{b/h_2}(x_2) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2}{Q^2}\right), \tag{7.3}$$

ermitteln. Die Summe läuft hier über alle beitragenden Partonen. H_{ab} ist der sogenannte harte Streuungskern. Dieser kann störungstheoretisch berechnet werden und hängt nicht von der Struktur der Hadronen h_1 und h_2 ab; Informationen über selbige stecken vollständig in den Partonverteilungsfunktionen. Q^2 ist die charakteristische Impulsskala, bei welcher der Streuprozess stattfindet, und Λ_{QCD} die Skala, unterhalb welcher die QCD nicht mehr störungstheoretisch behandelt werden kann. Λ_{QCD} liegt im Bereich der Pionmasse. Für niedrige Q^2 treten zusätzliche nicht-perturbative Korrekturen zu Gl. (7.3) auf.

Wenden wir diese Gleichung beispielsweise auf die Streuung eines Elektrons und eines Protons an. Dazu sei σ der volle Wirkungsquerschnitt für den Prozess $\mathrm{e}^-(k)+\mathrm{p}(P) \to \mathrm{e}^-(k')+\mathrm{X}$, welcher in einem Collider-Experiment gemessen wird. $\widehat{\sigma}$ sei der partonische Wirkungsquerschnitt für den Teilprozess $\mathrm{e}^-(k) + q_i(xP) \to \mathrm{e}^-(k') + q_f(p')$ für die Streuung an einem einzelnen Parton q_i:

$$\sigma(P) = \sum_i \int_0^1 \mathrm{d}x \, f_{i,\mathrm{p}}(x) \widehat{\sigma}(xP) \,. \tag{7.4}$$

Hierbei wird keine kohärente Summation über Amplituden durchgeführt, sondern es wird inkohärent über Wirkungsquerschnitte summiert, was physikalisch soviel bedeutet, dass die Streuung an einzelnen Partonen stattfindet und die Amplituden der Streuprozesse nicht interferieren. Für Berechnungen in Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien werden Hadronen oft als Punktteilchen betrachtet. Die Frage stellt sich, ob sich Observablen solcher Prozesse ebenso im Partonmodell berechnen lassen. Für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung eines Protons mit Impuls p und Masse M wäre die Zerfallsbreite dann

$$\Gamma_{\mathrm{p}\to\mathrm{p}\tilde{\gamma}}(P, M) = \sum_i \int_0^1 \mathrm{d}x \, f_{i,\mathrm{p}}(x) \widehat{\Gamma}(xP) \,, \tag{7.5}$$

wobei die Summe über alle Partonen q_i des Protons läuft, welche an Photonen koppeln und somit zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung beitragen können. $\widehat{\Gamma}$ ist die Zerfallsbreite, welche dem Prozess entspricht, in dem ein einzelnes Parton ein Photon abstrahlt; xP ist der Impulsbruchteil des betreffenden Partons. Eine analoge Gleichung muss dann prinzipiell ebenso für ein Neutron

gelten:

$$\Gamma_{\mathrm{n}\to\mathrm{n}\tilde{\gamma}}(P,M) = \sum_i \int_0^1 \mathrm{d}x\, f_{i,\mathrm{n}}(x)\widehat{\Gamma}(xP)\,, \tag{7.6}$$

wobei der einzige Unterschied in den Partonverteilungsfunktionen liegt. Die Zerfallsbreite $\widehat{\Gamma}$ eines einzelnen Partons ist jedoch unabhängig vom Hadron, dessen Bestandteil das Parton ist. Der Schluss daraus wäre, dass die Zerfallsbreite (und ebenso die abgestrahlte Energierate) eines Neutrons von derselben Größenordnung wie die des Protons ist. Jedoch ist ein Neutron in der Tat ein elektrisch neutrales Teilchen, obwohl es aus geladenen Partonen besteht. Behandelt man das Neutron als klassische Ladungsverteilung, ist die abgestrahlte Energie mit dem Quadrat der Ausdehnung des Teilchens unterdrückt. Der physikalische Grund dafür ist, dass Wellenfronten verschiedener Konstituenten destruktiv interferieren. In der Herleitung der abgestrahlten Energie, also Gl. (7.2), werden klassische Feldstärken (und nicht abgestrahlte Energien) kohärent addiert. Das Partonmodell weist jedoch dekohärente Eigenschaften auf und berücksichtigt keine Interferenz. Es sollte daher am Besten zur Analyse von Streuprozessen zweier Teilchen gebraucht werden, sofern der Impulsübertrag zwischen den streuenden Teilchen groß ist. Beispielsweise ist dies bei der tief inelastischen Streuung eines Elektrons an einem Proton der Fall. Ungeeignet hat es sich jedoch zur Beschreibung der Vakuum-Cherenkov-Strahlung erwiesen, da das abgestrahlte Photon ein reelles Teilchen ist, dessen Bezugssystem gegenüber dem des Protons nicht stark geboostet ist. Ein analoges Argument gilt für den Photonzerfall. Jedoch ist eine partonische Berechnung besser geeignet für den Proton-Breakup-Prozess, da das intermediäre Photon zumindest eine bestimmte Virtualität aufweist.

7.2.2. Zerfallsbreite im Quarkmodell

Zur Beschreibung der Vakuum-Cherenkov-Strahlung und des Photonzerfalls könnte möglicherweise das Quarkmodell von Gell-Mann und Zweig besser geeignet sein als das Partonmodell. Das Quarkmodell ist dessen Gegenstück für kleine Impulsüberträge zwischen den Teilchen. Für ausgedehnte Ladungsverteilungen (wie dem Proton oder dem Neutron) muss die Ladung im Matrixelement (analog zu kernphysikalischen Untersuchungen) durch einen Formfaktor $F(\mathbf{k})$ ersetzt werden, welcher in Bornscher Näherung durch die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung gegeben ist:

$$F(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3 r\, \varrho(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,. \tag{7.7}$$

Das Betragsquadrat des Matrixelements wird somit mit einem Faktor $|F(\mathbf{k})|^2$ multipliziert, anstelle des Ladungsquadrats des jeweiligen Konstituenten. Dieses Vorgehen berücksichtigt Interferenzeffekte zwischen den abgestrahlten elektromagnetischen Wellen, welche möglicherweise die Zerfallsbreite sowie die abgestrahlte Energie dämpfen. Ein solches Verhalten würde man für ein neutrales Teilchen wie dem Neutron erwarten.

Wie betrachten ein Proton, dessen Energie bei der Schwellenenergie E_{th} liegt. Wir erinnern uns daran, dass für den räumlich isotropen Fall

$$E_{\mathrm{th}} = \frac{Mc^2}{2}\sqrt{\frac{3}{\widetilde{\kappa}_{00}} + 2}\,, \tag{7.8}$$

gilt mit der Protonmasse M. Das Proton wird also zumindest einen Teil seiner Energie über Vakuum-Cherenkov-Strahlung verlieren. Es wird angenommen, dass dabei ein Photon mit einer Energie $E_\gamma \approx E_{\mathrm{th}}$ emittiert wird. Die mittlere Ausdehnung, also gewissermaßen der mittlere Abstand der Konstituenten des Protons, ist durch das Inverse der Skala Mc^2 gegeben, die Wellenlänge der emittierten Strahlung durch das Inverse von $Mc^2/\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}$. Die Wellenlänge der Strahlung ist somit um einen Faktor $\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}$ kleiner als der mittlere Abstand der Valenzquarks des Protons bzw. Neutrons. Für einen realistischen Wert von $\widetilde{\kappa}_{00} = 10^{-20}$ ist das ein sehr kleiner Wert von 10^{-10}. Infolgedessen stellt das Proton für die emittierte Strahlung gewissermaßen eine Ansammlung von drei weit voneinander entfernten und unabhängigen einzelnen Quarks dar. Dies hat wiederum eine starke Unterdrückung von Interferenzeffekten elektromagnetischer Strahlung, welche von einzelnen Valenzquarks ausgeht, zur Folge, so wie dies bereits beim Partonmodell der Fall war. Somit ist der Schluss berechtigt, dass die Zerfallsbreite der Vakuum-Cherenkov-Strahlung beim Neutron von derselben Größenordnung wie beim Proton sein könnte, obwohl es sich beim Neutron seinerseits um ein elektrisch neutrales Teilchen handelt.

7.3. Klassische Cherenkov-Strahlung und Vakuum-Cherenkov-Strahlung

Wir untersuchen die Unterschiede zwischen klassischer Cherenkov-Strahlung einer Ladungsverteilung und der Vakuum-Cherenkov-Strahlung eines Teilchens mit einem nichttrivialen Partoninhalt. Eine klassische Ladungsverteilung mit der Dichtefunktion $\varrho(\mathbf{r})$ können wir uns für die folgende Betrachtung aus infinitesimal kleinen Ladungen $\mathrm{d}q_1 = \varrho(\mathbf{r}_1)\,\mathrm{d}^3r$, $\mathrm{d}q_2 = \varrho(\mathbf{r}_2)\,\mathrm{d}^3r$ usw. bestehend vorstellen. Falls sich die Verteilung mit einer Geschwindigkeit v durch ein Medium bewegt, welche größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichts in diesem Medium, so wird sie gewöhnliche Cherenkov-Strahlung emittieren. Dann bewegt sich jede Teilladung $\mathrm{d}q_1$, $\mathrm{d}q_2$ usw. mit derselben Geschwindigkeit durch das Medium und kann somit als Quelle von Cherenkov-Strahlung aufgefasst werden. Die Geometrie der Ladungsverteilung, also die Anordnung der Teilladungen, ist für die Schwelle der klassischen Cherenkov-Strahlung nicht wichtig.

Jedoch unterscheidet sich die Vakuum-Cherenkov-Strahlung einer Ladungsverteilung von der klassischen Cherenkov-Strahlung in einem Medium. Der Unterschied tritt dann zu Tage, wenn wir ein Proton nicht als punktförmiges Teilchen betrachten, sondern als ausgedehntes Objekt mit einem Partoninhalt. Eine Gemeinsamkeit ist, dass nicht jedes Parton ein Cherenkov-Photon abstrahlen kann. Dies ist beispielsweise möglich für die drei Valenzquarks (u, u, d) oder für See-

quarks wie in Abb. 7.2 gezeigt. (Jedoch ist der letztere Prozess durch mindestens eine Ordnung in einer Kopplungskonstanten unterdrückt.) Virtuelle Eichbosonen oder ein virtuelles Higgs-Boson können keine Cherenkov-Strahlung emittieren, weil sie wegen der fehlenden elektrischen Ladung nicht an Photonen koppeln. Diese Partonen tragen zur Energie und Masse des Protons bei, jedoch nicht zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung.[1] Solche Partonen entsprechen Nullstellen der Ladungsdichte bei der klassischen Cherenkov-Strahlung.

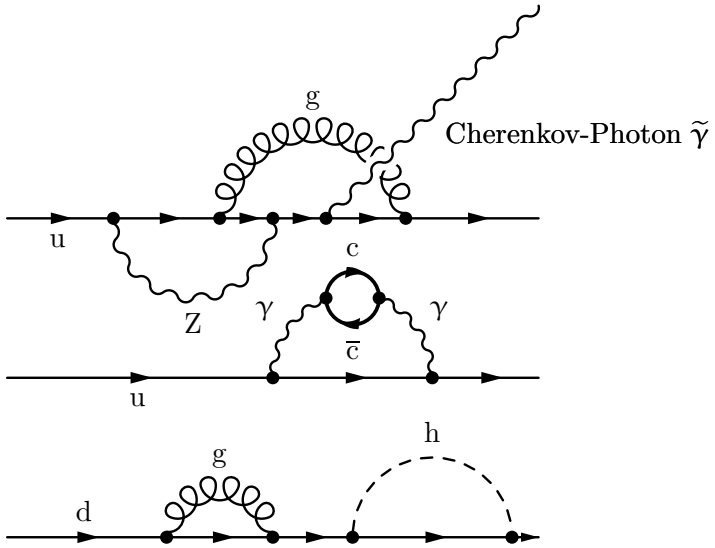


Abbildung 7.2.: Proton, welches ein Cherenkov-Photon abstrahlt. Das Proton besteht aus drei Valenzquarks (u, u, d), Seequarks (beispielsweise c-$\overline{c}$-Paaren), virtuellen Eichbosonen (γ, Z, g, ...) und anderen virtuellen Teilchen (h, ...). (Dabei handelt es sich um Korrekturen zum naiven Partonmodell.) Hier wird das Cherenkov-Photon von einem der Valenzquarks abgestrahlt.

Der wichtige Unterschied zwischen der klassischen Cherenkov-Strahlung einer Ladungsverteilung und der Vakuum-Cherenkov-Strahlung eines ausgedehnten Teilchens im Partonmodell soll im Folgenden erläutert werden. Jede Teilladung $\mathrm{d}q_1$, $\mathrm{d}q_2$ etc. der Verteilung bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit. Dagegen unterscheiden sich die Dispersionsrelationen unterschiedlicher Arten von Partonen. Ist die Lorentzsymmetrie des Eichbosonsektors verletzt, so wirkt sich das nur auf die Dispersionsrelation der Eichbosonen aus, die der Fermionen ist konventionell. Dies führt ebenso dazu, dass sich Eichbosonen mit einer unterschiedlichen Geschwindigkeit als Fermionen bewegen. Wir haben schon gesehen, dass beim räumlich isotropen Fall der modifizierten QED für $\widetilde{\kappa}_{00} > 0$ die Grenzgeschwindigkeit für Photonen bei einem Wert $< c$ liegt, wobei c die unveränderte Maximalgeschwindigkeit der Fermionen ist. Im Partonmodell (bei einer Skala von 10^{20} eV) sind Eichboson- und Fermioninhalt des Protons etwa gleich groß, während das Photon einen Eichbosoninhalt von 85% und einen Fermioninhalt von 15% besitzt. Infolgedessen tritt der Nettoeffekt auf, dass ein Proton eine höhere Maximalgeschwindigkeit besitzt als ein Photon und deshalb Vakuum-Cherenkov-Strahlung emittieren kann. (Sogar virtuelle Partonen

[1] Diese Beschreibung findet nicht mehr im Bereich des naiven Partonmodells statt, sondern enthält bereits Korrekturen.

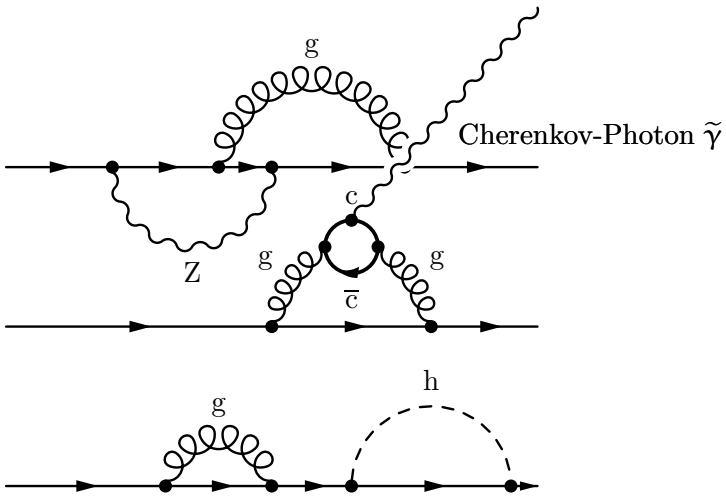


Abbildung 7.3.: Proton im Partonmodell zuzüglich QCD-Korrekturen. Hier wird das Cherenkov-Photon von einem der Seequarks emittiert.

beeinflussen die Dispersionsrelation durch Quanteneffekte.[2]) Die Bedingung $\Delta E > 0$ mit

$$\begin{aligned}\Delta E &= (1+\chi_{\mathrm{p}}\varepsilon)p + \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2p} - (1+\chi_\gamma\varepsilon)xp - (1+\chi_{\mathrm{p}}\varepsilon)(1-x)p - \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2(1-x)p} = \\ &= \frac{x}{2p(1-x)}(2p^2(1-x)\varepsilon(\chi_{\mathrm{p}}-\chi_\gamma) - m_{\mathrm{p}}^2)\,, \end{aligned} \tag{7.9}$$

führt zur Schwellenenergie

$$E_{\mathrm{th}}^{\mathrm{Cherenkov,Parton}} = \frac{\sqrt{3}m_{\mathrm{p}}}{2}\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{\chi_\gamma-\chi_{\mathrm{p}}}}\dfrac{1}{\sqrt{\widetilde{\kappa}_{00}}} & \text{für} \quad \widetilde{\kappa}_{00} > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\chi_{\mathrm{p}}-\chi_\gamma}}\dfrac{1}{\sqrt{-\widetilde{\kappa}_{00}}} & \text{für} \quad \widetilde{\kappa}_{00} < 0 \end{array}\right\} + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\widetilde{\kappa}_{00}|}\right)\,. \tag{7.10}$$

Je größer der Unterschied zwischen den Eichbosoninhalten der beiden Teilchen ist, umso kleiner ist die Schwellenenergie für den Prozess. Sind die Eichbosoninhalte gleich, so liegt die Schwelle im Unendlichen und die Vakuum-Cherenkov-Strahlung ist energetisch verboten. Für $\chi_{\mathrm{p}} = 0$, $\chi_\gamma = 1$ ergibt sich die Schwellenenergie $E_{\mathrm{th}}^{\mathrm{Cherenkov}}$ aus Gl. (4.55) für den Fall, dass sowohl Proton als auch Photon als punktförmig und ohne Partoninhalt betrachtet werden. Dann ist der Prozess nur für $\widetilde{\kappa}_{00} > 0$ energetisch erlaubt. Berücksichtigt man den Partoninhalt beider Teilchen, so liegt die Schwelle energetisch höher. Leider ist diese Argumentation unvollständig und inkonsistent, denn sie beachtet folgende wichtige Tatsache nicht. Mit $E_{\mathrm{th}}^{\mathrm{Cherenkov}} < E_{\mathrm{p}} < E_{\mathrm{th}}^{\mathrm{Cherenkov,Parton}}$, wobei E_{p} die Energie des Protons ist, wäre die Vakuum-Cherenkov-Strahlung nach den eben geführten Betrachtungen energetisch verboten. Jedoch ist es durchaus möglich, dass ein einzelnes elektrisch geladenes Parton, beispielsweise eines der Valenzquarks, für einen kurzen Zeitraum fast die vollständige Energie des Protons trägt; die

[2] siehe dazu die Diskussion in Abschnitt 6.5

Wahrscheinlichkeit dafür ist zwar klein, aber auch in der Praxis ungleich null. Dann wäre die Energie dieses Partons höher als die Schwellenenergie E_{th} und es könnte ein Cherenkov-Photon emittieren, obwohl die Energie des Protons an sich kleiner als die Schwelle aus Gl. (7.10) ist, welche sich aus einer naiven Betrachtung des Partoninhalts der beteiligten Teilchen ergab. Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch, der sich jedoch ohne Probleme mit den zuvor geführten Betrachtungen auflösen lässt. Zum einen kann man davon ausgehen, dass Gl. (7.10) nicht gilt, weil das Partonmodell ungeeignet ist, um die Vakuum-Cherenkov-Strahlung zu beschreiben. Andererseits ist die emittierte Cherenkov-Strahlung so kurzwellig, dass das Proton für diese Strahlung mehr als ein loser Verbund von Valenzquarks erscheint und damit die Schwellenenergie an die Masse des leichtesten Valenzquarks angepasst werden muss. Die Schwellenenergie wäre dann erneut durch Gl. (4.55) gegeben, wobei die Protonmasse durch die Masse des leichtesten Valenzquarks ersetzt werden müsste. Der große Gluonanteil des Protons spielt hierfür keine Rolle, da Gluonen keine elektrische Ladung tragen.

Kapitel 8.

Bestimmung experimenteller Schranken

8.1. Klassifikation experimenteller Schranken

Bisher konnte man keine Effekte beobachten wie sie von einer Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorie vorhergesagt werden, also beispielsweise Vakuum-Cherenkov-Strahlung oder Photonzerfall. Infolgedessen ist es bisher nur möglich, den Parameterraum der Theorien unter Zuhilfenahme experimenteller Daten einzuschränken. Man klassifiziert hierbei folgende Schranken:

1) Als **direkte Schranken** werden solche bezeichnet, die sich in aus der direkten Messung von Abweichungen von der speziellen Relativitätstheorie ergeben. Eine Vielzahl dieser Messungen sind inspiriert von den klassischen Experimenten:

   a) Im Ives-Stillwell-Experiment [51] wurde die Doppler-Verschiebung von Licht gemessen, das von angeregten Ionen oder Atomen emittiert wird, die in entgegengesetzte Richtungen fliegen.

   b) Messungen zur Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit durch moderne Umsetzungen des Michelson-Morley- [52] bzw. Kennedy-Thorndike-Experiments [53], wie diese beispielsweise in [54, 55, 56] durchgeführt wurden.

2) **Indirekte Schranken** ergeben sich aus Messungen experimenteller Größen, auf die eine Verletzung der Lorentzinvarianz indirekten Einfluss haben kann, zum Beispiel durch Quanteneffekte. Hier unterscheidet man noch zwischen

   a) Schranken aus Laborexperimenten: Dazu gehören beispielsweise die Messung von Abweichungen des anomalen magnetischen Moments des Elektrons [57] oder Colliderexperimente [58, 59, 60].

   b) Astrophysikalische Schranken: Diese werden aus der Untersuchung von kosmischer Strahlung, Neutrinos oder Licht entfernter Sterne, Galaxien sowie Gamma-Strahlen-Ausbrüche gewonnen [61, 62, 63, 64, 65].

Zwar sind die Schranken aus astrophysikalischen Messungen strenger, jedoch fließen in diese Unsicherheiten ein, beispielsweise in Bezug auf das Verständnis der Quellen von UHECRs.

Dahingegen sind die Schranken aus Laborexperimenten auf der Erde zuverlässiger, da man solche Experimente unter kontrollierten Bedingungen ablaufen lassen kann.

8.2. Ursprung ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung

Bisher sind die Quellen von UHECRs nicht eindeutig identifiziert. Man nimmt jedoch an, dass unter anderem folgende Mechanismen für die Beschleunigung der geladenen komischen Strahlung verantwortlich sind:

1) Aktive Galaxienkerne (Active Galactic Nuclei, AGN):

   Die astrophysikalischen Beobachtungen bis zur jüngsten Zeit legen den Schluss nahe, dass sich im Zentrum der meisten Galaxien ein massereiches schwarzes Loch befindet. Die sehr präzise Vermessung der Bewegung von Sternen in den letzten Jahren im Zentrum unserer Milchstraße legt ebenso nahe, dass es sich bei der Radioquelle SgrA* um ein schwarzes Loch handelt, das mehrere Millionen Sonnenmassen schwer ist. Andere Konfigurationen wie beispielsweise ein dichter Haufen von braunen Zwergen, konnte durch weitere Untersuchungen ausgeschlossen werden. Die sogenannte Akkretion, also der Einfall von Materie in das schwarze Loch, führt zu einer Umwandlung von Gravitationsenergie in Strahlung und zwar mit einer unvergleichbar hohen Effizienz, wie sie nicht bei anderen bekannten physikalischen Prozessen auftritt [66].

2) Supernova-Überreste (Supernova Remnants, SNR):

   Wenn ein massereicher Stern am Ende seiner Lebensdauer angelangt, also der Prozess der Kernfusion soweit fortgeschritten ist, dass sich im Kernbereich des Sterns bereits das stabilste chemische Element Eisen gebildet hat, so kann der Strahlungsdruck dem Gravitationsdruck von außen nicht mehr standhalten und der Stern fällt in sich zusammen. Diese Implosion schreitet soweit voran, bis der Paulidruck der Elektronen wirksam wird. Sofern der gravitative Druck dann noch stark genug ist, findet die Reaktion $\mathrm{p}+\mathrm{e} \rightarrow \mathrm{n}+\nu_\mathrm{e}$ statt, was einen sehr großen Fluss von Neutrinos freisetzt und zu einer mächtigen Explosion führt – der Supernova. Ein kleiner Teil der Neutrinos liefert die kinetische Energie, um die äußere Hülle ins Weltall zu schleudern. Zurück bleibt ein Neutronenstern oder sogar ein schwarzes Loch. Die sich nach außen bewegende Hülle[1] bezeichnet man als Supernova-Überrest (Supernova remnant, SNR). Das ausgestoßene Material breitet sich mit einem Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit[2] in das interstellare Medium hinein aus und schiebt wie ein Schneepflug eine Schockfront vor sich her. Elektrisch geladene Teilchen können durch Magnetfelder in die Schockfront gelenkt, in dieser beschleunigt werden und danach die Front wieder verlassen. Der Prozess ist nicht sehr effizient und muss sich viele Male wiederholen, damit das Teilchen einen hohen Energiezuwachs bekommt. Da Teilchen der Front entweichen können, ohne zwangsläufig wieder in diese zurückzukehren, führt dies

[1] mit dem verbleibenden Neutronenstern oder schwarzen Loch
[2] Die Expansionsgeschwindigkeit vieler Supernova-Überreste liegt bei etwa 10 000 km/s.

zu einem breiten Spektrum an verschiedenen Energien, welche Teilchen der kosmischen Strahlung aufweisen können.

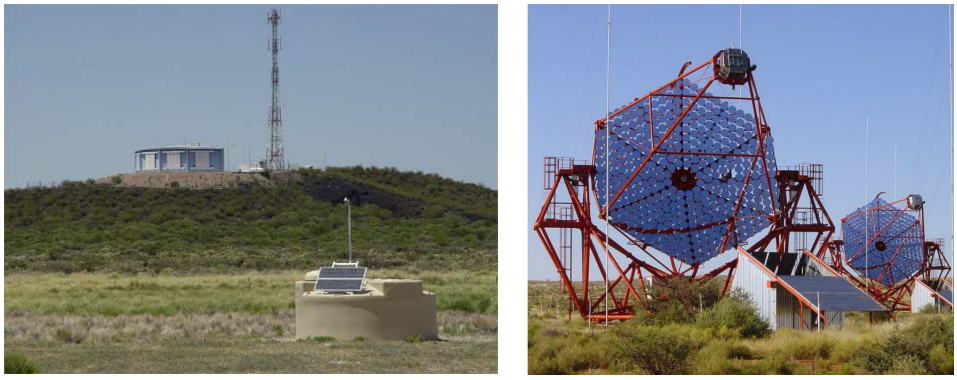
Ultrahochenergetische Photonen entstehen durch verschiedene Prozesse, zum Beispiel in Supernova-Überresten. Dazu gehört die Synchrotronstrahlung geladener Teilchen in Magnetfeldern oder die inverse Compton-Streuung, bei der Energie von Elektronen auf niederenergetische Photonen übertragen wird. Weiterhin können Photonen hadronisch erzeugt werden, beispielsweise über den Zerfall eines elektrisch neutralen Pions.

8.3. Experimente zur Detektion und Vermessung ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung

8.3.1. Pierre-Auger-Observatorium

Das Pierre-Auger-Observatorium – genauer Auger-Süd – stellt eine Anordnung aus 1600 Teilchendetektoren und 24 Fluoreszenz-Teleskopen dar, die einen Bereich von $3000\,\mathrm{km}^2$ in der argentinischen Pampa abdecken [67]. Die Teilchendetektoren sind nichts anderes als Wassertanks, in denen Teilchen von Luftschauern Cherenkov-Licht abstrahlen, das dann nachgewiesen wird. Zusätzlich wird mit den Teleskopen der Himmel nach Fluoreszenzlicht abgetastet, welches von Schauern ausgeht; man spricht daher von einem sogenannten Hybrid-Detektor. Mittels des Observatoriums soll eine volle Himmelsabdeckung erreicht werden, und man hofft, Quellen der UHECRs zu identifizieren.

8.3.2. High Energy Stereoscopic System (H.E.S.S.)



(a) Einzelner Cherenkov-Tank des Pierre-Auger-Observatoriums mit einem der Fluoreszenzteleskope im Hintergrund.

(b) Zwei der vier Teleskope von H.E.S.S.

Abbildung 8.1.: Die astrophysikalischen Meßstationen Pierre-Auger und H.E.S.S.

Das High Energy Stereoscopic System (H.E.S.S.), in der Nähe der namibischen Stadt Windhuk gelegen, ist ein System aus vier großen Spiegelteleskopen, welche den Nachthimmel nach hochenergetischen Gammastrahlen im GeV- und sogar TeV-Bereich absuchen [68]. Der Standort eignet sich hervorragend für die Gamma-Astronomie wegen der klaren Nächte, der geringen Lichtverschmutzung durch benachbarte Städte und des milden Klimas, welches erlaubt, die Teleskope ohne teure Schutzgebäude zu betreiben. Experimente, die auf Flugzeugen oder gar Satelliten montiert sind, haben den Nachteil, dass sie aufgrund ihrer sehr kleinen Spiegelfläche die relativ seltenen Ereignisse in diesem Energiebereich nicht aufnehmen. Im Gegensatz dazu kann jedoch H.E.S.S. einen Winkelabschnitt des Himmels abdecken, welcher größer ist als der Vollmond, und somit effizient nach hochenergetischen Gammastrahlen suchen. Um dies zu bewerkstelligen, detektiert H.E.S.S. Cherenkov-Strahlung der elektromagnetischen Kaskade aus Elektronen und Positronen, die entsteht, wenn ein primäres Photon auf Luftmoleküle der Atmosphäre trifft. Dadurch, dass es sich um ein System von vier Teleskopen handelt, kann der entstehende Luftschauer räumlich sehr gut aufgelöst werden, wobei man an der Form des Schauers auf das Primärteilchen schließen kann.

8.4. Neue Schranke an den Parameter der isotropen modifizierten Maxwell-Theorie

Zur Bestimmung experimenteller Schranken an die Parameter der modifizierten Maxwell-Theorie ist es geschickt, diese gemäß [24] in Gruppen einzuteilen. Dabei parametrisiert die erste Klasse den paritätserhaltenden und die zweite Klasse den paritätsverletzenden Sektor der Theorie. Der paritätserhaltende Sektor enthält den Koeffizienten, welcher die räumlich isotrope modifizierte Maxwell-Theorie charakterisiert. Dieser wird im Folgenden als $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}$ bezeichnet, wobei der Zusammenhang $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} = (2/3)\widetilde{\kappa}_{00}$ gilt mit dem bisher verwendeten Koeffizienten $\widetilde{\kappa}_{00}$.

$\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}$ ist in Laborexperimenten schwierig zu messen. Die beste Schranke auf 2σ-Niveau, welche in einem solchen Experiment ermittelt wurde, lag im Jahr 2008 bei $|\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}| < 2 \cdot 10^{-7}$ [69]. Mittlerweile gibt es verbesserte Messungen, wie beispielsweise in [54] mit $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} > -0,3 \pm 3 \cdot 10^{-7}$, wobei diese Schranke im Vergleich zu der vorherigen jedoch einseitig ist. Die Schwierigkeit, diesen Koeffizienten in Laborexperimenten einzuschränken, besteht darin, dass dieser immer mit einem quadratischen Dopplerfaktor v^2/c^2 auftritt, was sehr präzise Messungen erfordert. Eine einseitige indirekte astrophysikalische Schranke wurde in [70] ermittelt und zwar $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 1,4 \cdot 10^{-19}$; diese ist um viele Größenordnungen besser als derzeitige Schranken aus dem Labor. Mit unseren bisherigen Betrachtungen zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung, Photonzerfall und zum Proton-Breakup-Prozess ist es sogar möglich, eine zweiseitige Schranke zu bestimmen. Dies liegt daran, dass diese Prozesse in unterschiedlichen Parameterbereichen erlaubt sind:

a) Vakuum-Cherenkov-Strahlung $\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^-\widetilde{\gamma}$ bzw. $\mathrm{p}^+ \to \mathrm{p}^+\widetilde{\gamma}$ für $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} > 0$

b) Photonzerfall $\widetilde{\gamma} \to \mathrm{e}^-\mathrm{e}^+$ bzw. $\widetilde{\gamma} \to \mathrm{p}^-\mathrm{p}^+$ für $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 0$

c) Proton-Breakup-Prozess $\widetilde{\mathrm{p}} \to \widetilde{\mathrm{p}}\widetilde{\mathrm{e}}^+\widetilde{\mathrm{e}}^-$ für $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 0$

Die Prozesse (a), (b) sind möglich sowohl für Elektronen/Positronen $\mathrm{e}^{\pm}$ oder vereinfacht betrachtete punktförmige Protonen/Antiprotonen $\mathrm{p}^{\pm}$, bei denen die Partonstruktur vernachlässigt wird. Mit $\widetilde{\gamma}$ wird das modifizierte Photon bezeichnet, wohingegen der Materiesektor nicht von der Lorentzsymmetrieverletzung betroffen ist. In Kapitel 6 haben wir gesehen, dass der Proton-Breakup-Prozess nur für einen nichttrivialen (modifizierten) Eichbosoninhalt möglich ist, der sich für Proton und Elektron unterscheidet. Wir bezeichnen deshalb mit $\widetilde{\mathrm{p}}$ als in diesem Sinne modifizierte Protonen und mit $\widetilde{\mathrm{e}}^{\pm}$ modifizierte Elektronen bzw. Positronen.

Um die Ergebnisse in kompakter Form zu schreiben, definieren wir

$$\xi \equiv 2\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}\,, \quad \mathcal{A} \equiv \frac{1}{\mathcal{B}} \equiv \sqrt{\frac{2+\xi}{2-\xi}}\,. \tag{8.1}$$

Für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung eines geladenen Spin-1/2-Fermions der Masse M und Energie E ist die Energieverlustrate im Artikel [39] angegeben und muss auf die neuen Konventionen umgerechnet werden. Dies führt für $\xi > 0$ auf:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W^{(\mathrm{a})}}{\mathrm{d}t}\right|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{1}{3\,\xi^3\,E\,\sqrt{E^2-M^2}}\,\Big(\mathcal{B}\,E-\sqrt{E^2-M^2}\Big)^2 \\ \times\Bigg\{2\Big(\xi^2+4\,\xi+6\Big)E^2-\big(2+\xi\big)\big(3\,\big(1+\xi\big)M^2 \\ +2\,\big(3+2\,\xi\big)\,\mathcal{B}\,E\,\sqrt{E^2-M^2}\Big)\Bigg\}\,,\end{aligned} \tag{8.2}$$

mit der Entwicklung

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W^{(\mathrm{a})}}{\mathrm{d}t}\right|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}} = \frac{e^2}{4\pi}\Bigg\{\frac{4}{3}\xi\Bigg(\frac{\Big(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^3}{E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}}-\frac{\Big(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^4}{\Big(E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^2} \\ +\mathcal{O}\left(\frac{\Big(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^5}{\Big(E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^3}\right)\Bigg)+\mathcal{O}\left(\xi^2\frac{\Big(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}\Big)^3}{E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}}\right)\Bigg\}\,,\end{aligned} \tag{8.3}$$

für Energien direkt oberhalb der Schwellenenergie

$$E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})} = M\,\sqrt{\frac{1+\xi/2}{\xi}} = \frac{M}{\sqrt{\xi}}+\mathcal{O}\Big(M\,\sqrt{\xi}\Big)\,. \tag{8.4}$$

Zusätzlich soll die asymptotische Entwicklung für große Energien bei fester Teilchenmasse M

und festem Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter $0 < \xi \ll 1$ angegeben werden:

$$\left.\frac{\mathrm{d}W^{(\mathrm{a})}}{\mathrm{d}t}\right|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{a})}} = \frac{e^2}{4\pi}E^2\left\{\left(\frac{7}{24}\,\xi - \frac{1}{16}\,\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)\right)\right.$$
$$\left. + \left(-1 + \frac{1}{48}\,\xi - \frac{3}{32}\,\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)\right)\frac{M^2}{E^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\xi\,E^4}\right)\right\}, \tag{8.5}$$

Für die Zerfallsbreite $\Gamma^{(b)}|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}}$ des Photonzerfalls gilt mit der Energie E des Photons und für $\xi < 0$ bereits die in Abschnitt 5.3 angegebene Gleichung (5.13). Die entsprechende Energieschwelle ist

$$E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})} = 2\,M\,\sqrt{\frac{1-\xi/2}{-\xi}} = \frac{2\,M}{\sqrt{-\xi}} + \mathcal{O}\Big(M\,\sqrt{-\xi}\Big), \tag{8.6}$$

welche dieselbe Struktur wie die Schwelle der Vakuum-Cherenkov-Strahlung (8.4) besitzt mit einem zusätzlichen Faktor 2. Die Entwicklung der Zerfallsbreite für Energien direkt oberhalb der Schwelle lautet

$$\Gamma^{(b)}\Big|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}} = \frac{e^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\left(-\sqrt{E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}}\sqrt{E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}} + \frac{5}{12}\frac{1}{\sqrt{E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}}}\left(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}\right)^{\frac{3}{2}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathcal{O}\left(\frac{\left(E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) + \mathcal{O}\left(\xi^3\sqrt{E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}}\sqrt{E-E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}}\right)\right\}. \tag{8.7}$$

Eine entsprechende asymptotische Entwicklung für hohe Energie E bei fester Teilchenmasse und Lorentzsymmetrie-verletzendem Parameter $0 < -\xi \ll 1$ kann ebenso angegeben werden:

$$\Gamma^{(b)}\Big|_{E\geq E_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{b})}} = \frac{e^2}{4\pi}\,E\left\{\left(-\frac{1}{3}\,\xi + \mathcal{O}(\xi^3)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\xi E^4}\right)\right\}. \tag{8.8}$$

Aus den Definitionen (8.1) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und den Quadratwurzeln in den exakten Ausdrücken (5.13) bzw. (8.2) ist ersichtlich, dass $|\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}| < 1$ sein muss.

Kommen wir nun zur Bestimmung der Schranken aus den experimentellen Daten. Aus Gl. (8.3) und den Betrachtungen in Abschnitt 4.7 folgt, dass ein Teilchen mit $E_{\mathrm{prim}} \geq E_{\mathrm{th}}^{(a)}$ seinen Energieanteil oberhalb der Schwellenenergie auf sehr kurzer Weglänge durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verlieren würde. Zusammen mit der Bestimmung der Quelle des geladenen Teilchens, die viele Lichtjahre entfernt liegt, rechtfertigt dies folgende Argumentation: Beobachtet man auf der Erde ein geladenes massives Primärteilchen (beispielsweise ein Elektron oder Proton), so muss dessen Energie E_{prim} kleiner sein als die Schwellenenergie $E_{\mathrm{th}}^{(a)}$, weil es ansonsten seinen Energieüberschuss schon lange durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verloren hätte. Analog gilt dies mittels Gl. (5.13) für die Detektion eines primären Photons der Energie E_γ. Für ein solches

Tabelle 8.1.: Experimentell gemessene Energien (mit relativem Fehler) der Ereignisse, welche zur Berechnung der zweiseitigen Schranke verwendet wurden. Der Wert des Hybrid-Ereignisses [71] vom Pierre-Auger-Observatorium wurde um 5% erhöht, um die fehlende Energie [72] für ein hadronisches Primärteilchen zu berücksichtigen. Der in [71] angegebene Wert entspricht einem hypothetischen Photon als Primärteilchen. Der gemessene Wert für die Säulendichte des Maximums des Schauers (das Maximum ist dann erreicht, wenn die produzierten Teilchen zu wenig Energie besitzen, um neue Teilchen in der Kaskade zu erzeugen) $X_{\max} = 821\,\mathrm{g\cdot cm^{-2}}$ schließt ein Photon als Primärteilchen mit einem Konfidenzintervall von 3σ aus [71].) Als Quelle des von H.E.S.S. detektierten ultra-hochenergetischen Photons [73, 74] kommt aufgrund der Rektaszension $\alpha = 17^{\mathrm{h}}\,13^{\mathrm{m}}\,33^{\mathrm{s}}$ und Deklination $\delta = -39^{\circ}\,45'\,44''$ der Supernova-Überrest RX J1713.7–3946 in Frage.

Experiment	Beobachtung	Referenz	Energie E	Relativer Fehler $\Delta E/E$
Auger	ID 737165	[71]	$E_{\mathrm{prim}} = 212$ EeV	25 %
H.E.S.S.	2003–2005	[74]	$\overline{E}_\gamma = 30$ TeV	15 %

Photon muss $E_\gamma < E_{\mathrm{th}}^{(b)}$ sein, weil dieses ansonsten schon lange in ein Fermion-Antifermion-Paar zerfallen wäre.

Mittels des Hybrid-Ereignisses der Energie $E_{\mathrm{prim}} = 212\,\mathrm{EeV} = 2,12{\cdot}10^{20}$ eV, welches am Pierre-Auger-Observatorium sowohl mit Cherenkov-Detektoren als auch den Fluoreszenzteleskopen nachgewiesen wurde, ergibt sich mittels (8.4) und für die Annahme eines Eisenkerns[3] der Masse $M = 52\,\mathrm{GeV}$ als Primärteilchen die Schranke $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 6 \cdot 10^{-20}$ (98% CL). Um eine Schranke für negativen Parameter $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}$ zu ermitteln, nutzen wir das Ereignis eines Primärphotons der Energie $E_\gamma \geq 30\,\mathrm{TeV}$, welches am H.E.S.S detektiert wurde. Solche Photonen der Energie oberhalb 30 TeV wurden mit 5σ Konfidenz entdeckt. Um sicher zu gehen, betrachten wir ein Ereignis mit $\overline{E}_\gamma = 30\,\mathrm{TeV} = 3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{eV}$ mit einem relativen Fehler von 15%. Aus Gl. (8.6) ergibt sich mit der Annahme, dass der Photonzerfall in ein Elektron-Positron-Paar erfolgen würde (also $M = 511\,\mathrm{keV}$) die Schranke $-\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 9 \cdot 10^{-16}$ (98%).[4] Zusammenfassend resultiert also folgende zweiseitige Schranke auf 2σ-Niveau:

$$-9 \cdot 10^{-16} < \widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 6 \cdot 10^{-20}\,. \tag{8.9}$$

Die einseitigen Schranken skalieren wie $(M/E)^2$, wobei E die Energie des Primärteilchens und M die Masse des geladenen Spin-1/2-Fermions ist, welches an dem Prozess teilnimmt. Dies zeigt, dass solche astrophysikalischen Schranken an Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter in Zukunft noch weiter verbessert werden können, sofern Ereignisse mit höherer Energie und (im Falle von ultra-hochenergetischen kosmischen Strahlen) leichtere hadronische Primärteilchen detektiert werden können.

Die ermittelten Schranken sind ebenso in einer modifizierten QED relevant mit einer isotropen

[3] Die experimentelle Bestimmung des Primärteilchens aus Daten des Luftschauers ist nach wie vor schwierig.
[4] Der Vollständigkeit halber geben wir zusätzlich die Schranke auf 3σ-Niveau an: $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 1,1 \cdot 10^{-15}$ (99,9% CL).

Lorentzsymmetrieverletzung im Fermionsektor, nämlich mit einem Beitrag in der Wirkung von der Gestalt $c_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial^\nu - eA^\nu)\psi$, wobei $c_{\mu\nu} = c_{00}\mathrm{diag}(1, 1/3, 1/3, 1/3)$. Mittels der Koordinatentransformation von Gl. (6.3) können die Schranken zur führender Ordnung bezüglich c_{00} auf die folgende Form gebracht werden:[5]

$$\left[\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} - \frac{4}{3}c_{00}^{(\mathrm{p})}\right] < 6 \cdot 10^{-20}\,, \quad -\left[\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} - \frac{4}{3}c_{00}^{(\mathrm{e})}\right] < 9 \cdot 10^{-16} \qquad (98\%\ \mathrm{CL})\,. \tag{8.10}$$

Hierbei bezeichnen die Suffixe „(p)“ bzw. „(e)“ Koeffizienten c_{00} im Proton- bzw. im Elektronsektor. Es lassen sich dann beide Arten von Lorentzsymmetrieverletzung gleichzeitig, jedoch nicht getrennt, einschränken.

Mittels der bereits ermittelten astrophysikalischen Schranken an die zehn Parameter des doppelbrechenden Anteils der modifizierten Maxwell-Theorie, welche in der Größenordnung von 10^{-32} [28] liegen und der terrestrischen Schranken an die acht Parameter des anisotropen nichtdoppelbrechenden Sektors, welche sich im Bereich von 10^{-18} [70] befinden, schränkt die neue zweiseitige Schranke alle Einträge des Hintergrundtensors $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ auf 2σ-Niveau wie folgt ein:

$$\max_{\{\mu,\nu,\rho,\sigma\}} |\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}| < 5 \cdot 10^{-16}\,. \tag{8.11}$$

Dabei wurde die Tatsache benutzt, dass der größte Eintrag von $|\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}|$ den Wert $|\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}|/2$ besitzt, sofern die anderen 18 Parameter vergleichsweise klein sind.

Zu guter Letzt betrachten wir eine spezielle Modifikation des Standardmodells der Elementarteilchen, wobei die Verletzung der Lorentzsymmetrie im vollständigen Eichsektor (und nicht nur im Photonsektor) auftritt. Der isotrope Fall der modifizierten Maxwell-Theorie soll hierbei universell auf den vollständigen Eichsektor ausgedehnt werden. Die Verletzung der Lorentzsymmetrie im Materiesektor wird in diesem Modell vernachlässigt. Wir betrachten also die Wirkung

$$S_{\mathrm{modSM}} = S_{\mathrm{modYM}} + S_{\mathrm{restSM}}\,, \tag{8.12}$$

wobei die Modifikation nur in den kinetischen Termen der Lie-Algebra-wertigen Yang-Mills-

[5] siehe dazu auch Anhang B

Eichfelder $A_\mu^{(i)}(x)$ auftritt:

$$S_{\text{modYM}} = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Sp}\left(\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \overline{\kappa}^{(i)\,\mu\nu\rho\sigma} \right) F_{\mu\nu}^{(i)}(x)\, F_{\rho\sigma}^{(i)}(x) \right) \right), \tag{8.13}$$

$$F_{\mu\nu}^{(i)}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu^{(i)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(i)}(x) + g^{(i)} \left[A_\mu^{(i)}(x), A_\nu^{(i)}(x) \right], \tag{8.14}$$

$$\overline{\kappa}^{(i)\,\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2} \big(\eta^{\mu\rho}\, \overline{\kappa}^{(i)\,\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\, \overline{\kappa}^{(i)\,\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}\, \overline{\kappa}^{(i)\,\mu\rho} - \eta^{\nu\rho}\, \overline{\kappa}^{(i)\,\mu\sigma} \big), \tag{8.15}$$

$$\big(\overline{\kappa}^{(i)\,\mu\nu} \big) \equiv \frac{3}{2}\, \overline{\kappa}_{\text{tr}}^{(i)}\, \mathrm{diag}\big(1, 1/3, 1/3, 1/3\big), \tag{8.16}$$

$$\overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}} \equiv \overline{\kappa}_{\text{tr}}^{(1)} = \overline{\kappa}_{\text{tr}}^{(2)} = \overline{\kappa}_{\text{tr}}^{(3)}. \tag{8.17}$$

Die Spur in (8.13) ist über die Lie-Algebra-wertigen Felder zu bilden. $F_{\mu\nu}^{(i)}$ in (8.14) ist die Yang-Mills-Feldstärke, wobei sich der Index $i = 1$, 2 und 3 auf die jeweilige Eichgruppe $\mathrm{U}_Y(1)$, $\mathrm{SU}_L(2)$ bzw. $\mathrm{SU}_c(3)$ bezieht [38]. Im Grenzfalle $\overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}} = 0$ ergibt sich die Wirkung des Standardmodells. Die Ursache dafür, dass sich die Verletzung der Lorentzsymmetrie universell auf alle Eichbosonen auswirkt, könnte an einer nichttrivialen Struktur der klassischen Raumzeit liegen, die nicht zwischen den verschiedenen Spezies unterscheidet. Die Berechnung in [31] ergab etwa, dass Defekte der Raumzeit sich vor allem auf Photonen, aber nicht auf Fermionen, auswirken. Ob dieser Schluss im Allgemeinen zutrifft, ist bisher noch unbekannt.

Eine untere Schranke an $\overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}}$ folgt aus dem Proton-Breakup-Prozess mit einem Elektron-Positron-Paar im Endzustand und zwar für den Fall, dass $\overline{\xi} \equiv 2\overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}} < 0$. Die Schwelle für diesen Prozess lautet

$$E_{\text{th}}^{(\text{c})} = \frac{1}{\sqrt{-\overline{\xi}}}\, \frac{M_{\text{p}}}{\sqrt{\chi_{\text{p}} - \chi_{\text{e}}}}, \tag{8.18}$$

wobei M_{p} die Protonmasse ist und die dimensionslosen Größen $\chi_{\text{p,e}} \in [0, 1]$ den gesamten Partoninhalt an U(1)-, SU(2) und SU(3)-Eichbosonen des Protons bzw. Elektrons angeben. Für ein Proton p, Neutron n oder Elektron e^- der Energie $E = 10^2\,\mathrm{EeV}$ gilt $\chi_{\text{p}} - \chi_{\text{e}} \approx \chi_{\text{n}} - \chi_{\text{e}} \approx 0,35$ nach Tabelle 1 in [43]. Damit resultiert erneut für einen Eisenkern der Masse $M_{\text{prim}} = 52\,\mathrm{GeV}$ und für das Ereignis der Energie $E_{\text{prim}} = 212\,\mathrm{EeV}$, das vom Pierre-Auger-Observatorium gemessen wurde, die Schranke $-\overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}} < 2 \cdot 10^{-19}$ auf 2σ-Niveau. Kombinieren wir diese mit der positiven Schranke aus dem Vakuum-Cherenkov-Prozess, folgt damit die zweiseitige Schranke

$$-2 \cdot 10^{-19} < \overline{\kappa}_{\text{tr}}^{\text{univ}} < 6 \cdot 10^{-20}. \tag{8.19}$$

Diese Schranke ist zwar besser als (8.11), jedoch ist sie mit einigen Annahmen behaftet. Beispielsweise wurde in [43] der Partoninhalt auf die Energie $E = 10^{19}\,\mathrm{eV}$ skaliert, ohne Effekte von bisher unentdeckten schweren Teilchen (beispielsweise der Supersymmetrie) zu berücksichtigen.

Kapitel 9.

Zusammenfassung zu Teil II

In diesem Teil haben wir uns mit den phänomenologischen Auswirkungen einer verletzten Lorentzsymmetrie im Photonsektor und zwar speziell der modifizierten Maxwell-Theorie beschäftigt. Wir haben gesehen, dass die Verletzung der Lorentzsymmetrie eine modifizierte Dispersionsrelation von Photonen zur Folge hat. Dies kann einerseits Wirkungsquerschnitte oder Zerfallsbreiten von teilchenphysikalischen Prozessen ändern, wobei die Änderungen jedoch sehr gering sind und unterhalb der experimentellen Genauigkeit liegen. Andererseits jedoch – und das ist die physikalisch viel interessantere Möglichkeit – können Zerfälle, die ansonsten energetisch verboten wären, ab einer gewissen Schwelle erlaubt sein. Wichtige Beispiele solcher Prozesse sind die Vakuum-Cherenkov-Strahlung $e^{\pm} \to e^{\pm}\widetilde{\gamma}$ oder auch der Photonzerfall $\widetilde{\gamma} \to e^{+}e^{-}$. Für den ersteren wurden sowohl Zerfallsbreite als auch Energieverlust des Elektrons sowohl für den räumlich isotropen wie auch den räumlich anisotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie mit einer ausgezeichneten Raumrichtung berechnet. Die Ergebnisse für den räumlich anisotropen Fall führten zu wenigen neuen physikalischen Einsichten, weshalb wir uns bei den Berechnungen zum Photonzerfall auf den räumlich isotropen Fall beschränkten.

Darüber hinaus hat sich eine Untersuchung dahingehend, wie das Partonmodell im Zusammenhang einer Lorentzsymmetrieverletzung im Eichbosonsektor zu modifizieren ist, als sehr wertvoll erwiesen. In diesem Kontext ließ sich der sogenannte Proton-Breakup-Prozess $p \to pe^{+}e^{-}$ betrachten, der in einem durch gebrochene Lorentzsymmetrie modifizierten Partonmodell energetisch möglich ist.

Die Berechnung der Schwellenenergie und Zerfallsbreiten dieser drei Zerfälle führten zusammen mit neuesten Messungen an ultra-hochenergetischer kosmischer Strahlung durch H.E.S.S. und das Pierre-Auger-Observatorium zu folgenden Schranken des räumlich isotropen Modells mit Parameter $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}$ auf 2σ-Niveau:

$$-9 \cdot 10^{-16} < \widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 6 \cdot 10^{-20} \,. \tag{9.1}$$

Die Umrechnung auf den vollständigen Satz von Parametern der modifizierten Maxwell-Theorie ergab auf 2σ-Niveau:

$$\max_{\mu,\nu,\rho,\sigma} |\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}| < 5 \cdot 10^{-16} \,. \tag{9.2}$$

Die Schranken sind gegenüber Messungen aus Laborexperimenten auf der Erde stark verbessert, weil die Festsetzung von Schranken an den isotropen Parameter in solchen Experimenten eine große Herausforderung darstellt.

Den Schluss, den wir aus den neuen Schranken ziehen, ist, dass die Lorentzsymmetrie bei den uns zugänglichen Energien im Bereich von etwa $10^{20}\,\mathrm{eV}$ exakt und die zugrundeliegende Raumzeit sehr glatt ist. Die fundamentale Längenskala von Defekten in der Raumzeit (im Rahmen des klassischen Raumzeitschaums) ist somit sehr klein und außerdem können die Defekte als weit gestreut angenommen werden [31]. Eine zukünftige Verbesserung von Experimenten dahingehend, dass Teilchen höherer Energie und Primärteilchen kleinerer Masse nachgewiesen werden können, würde die Schranken noch weiter verbessern und fundamentale Skala von Defekten der Raumzeit weiter herabsetzen.

Darin besteht das Wesen der Wissenschaft. Zuerst denkt man an etwas, das wahr sein könnte. Dann sieht man nach, ob es der Fall ist und im allgemeinen ist es nicht der Fall.

Bertrand Russell

Teil III.

Untersuchungen zur Unitarität und Mikrokausalität

Kapitel 10.

Einführung

Eine Quantenfeldtheorie muss vom theoretischen Standpunkt aus gewisse grundlegende Eigenschaften ausweisen, um zur Beschreibung von Phänomenen in der Natur geeignet zu sein. Zu den wichtigsten dieser Eigenschaften zählt zum einen die Mikrokausalität und zum anderen die Unitarität.

Falls der Kommutator zweier Feldoperatoren (genauer: Observablen) $\mathcal{O}_1(x_1)$ und $\mathcal{O}_2(x_2)$ verschwindet, sofern die Raumzeitpunkte $x_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$ und $x_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$ raumartig voneinander getrennt sind, also

$$[\mathcal{O}_1(x_1), \mathcal{O}_2(x_2)] = 0 \text{ für alle } x_1 \text{ und } x_2 \text{ mit } (x_1 - x_2)_\alpha (x_1 - x_2)^\alpha < 0\,, \tag{10.1}$$

dann liegt die Eigenschaft der sogenannten Mikrokausalität in der betreffenden Theorie vor [38]. Das bedeutet, dass eine Messung der ersten Observable die Messung der zweiten nicht beeinflusst, falls die Punkte, an denen die Messungen stattfinden, raumartig getrennt sind. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $t_1 < t_2$. Ein nicht-verschwindender Kommutator würde uns sagen, dass die Messung von $\mathcal{O}_2$ durch die Messung von $\mathcal{O}_1$, welche zeitlich vorher durchgeführt wurde, beeinflusst wird. Jedoch gibt es für raumartig getrennte Punkte eine Lorentz-Transformation, welche die Zeitordnung umdreht. Somit könnte man in ein System mit $t_1' > t_2'$ transformieren und dann würde eine Messung von $\mathcal{O}_1$ die Messung von $\mathcal{O}_2$ beeinflussen, obwohl die letztere im neuen System früher durchgeführt wird! Auf diese Weise lässt sich eine Verletzung der Mikrokausalität mit einer Verletzung der Makrokausalität (oder einfach Kausalität), also dem Vertauschen von Ursache und Wirkung, in Verbindung bringen.

Die Überprüfung, dass die Mikrokausalität in der gewöhnlichen QED gewährleistet ist, geht auf Jordan und Pauli zurück [25]. Für eine Lorentzsymmetrie-verletzende Theorie ist zunächst nicht klar, ob die Mikrokausalität sichergestellt ist. Das soll deshalb in diesem Teil der Dissertation anhand von verschiedenen Kriterien überprüft werden. Dabei werden wir erkennen, dass diese eine unterschiedliche Gewichtung haben. Manche sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend, während die Voraussetzungen anderer Kriterien zu naiv und die daraus folgenden Schlüsse nicht notwendigerweise gelten müssen. Die Untersuchung soll für den räumlich isotropen Fall, den räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung und dem mit zwei ausgezeichneten Richtungen getrennt durchgeführt werden. Wir wollen diese Fälle der

Einfachheit halber in der eben aufgeführten Reihenfolge nummerieren.[1]

Nicht weniger bedeutend als die Mikrokausalität ist die sogenannte Unitarität. In der gewöhnlichen Quantenmechanik ist diese genau dann gewährleistet, wenn die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems über einen Operator $U(t, t_0)$ vonstatten geht, der unitär ist, wenn also $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$ gilt. Diese Eigenschaft folgt unter anderem aus der Hermitizität des Hamilton-Operators und der Homogenität der Schrödinger-Gleichung und hat zur Folge, dass sich die Norm $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle$ eines Energieeigenzustands $|\varphi_n\rangle$ bei dessen Zeitentwicklung nicht ändert: $\mathrm{d}\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle/\mathrm{d}t = 0$. Eine Konsequenz davon ist, dass auch die Norm $\langle\psi|\psi\rangle$ von Zuständen

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|\varphi_n\rangle\,, \tag{10.2}$$

welche keine Energieeigenzustände sind, erhalten ist. Die Unitarität ist somit nichts anderes als eine Erhaltung der Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1\,, \quad C_n = \langle\varphi_n|\psi_n\rangle\,, \tag{10.3}$$

bezüglich der zeitlichen Entwicklung des Systems. Die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ist für alle sonstigen unitären Transformationen, wie beispielsweise Symmetrietransformationen und Basiswechsel garantiert. In der Quantenfeldtheorie ist das Konzept ähnlich. Felder $\Phi(x)$ besitzen Operatorcharakter und können auf Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ wirken, die Elemente eines Hilbertraums sind und physikalischen Zuständen entsprechen.[2] Beim Wechsel des Bezugssystems transformieren sich Koordinaten unter der Poincaré-Gruppe $P(L, a)$, die sich zusammensetzt aus Translationen a und Raumzeit-Drehungen, sprich homogenen Lorentz-Transformationen L. Für einen Raumzeitpunkt gilt also $x \mapsto x' = P(L, a; x)$ und eine entsprechende Transformation $\Lambda(L, a)$ wirkt auf Felder: $\Phi(x) \mapsto \Phi'(x') = \Lambda(L, a)\Phi(x)$. Diese Tatsache hat zur Folge, dass ebenso der Zustandsvektor einer Transformation $V(L, a)$ unterliegt: $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = V(L, a)|\psi\rangle$. Die Unitarität diktiert die Erhaltung der Norm $\langle\psi|\psi\rangle$, was zu der Einschränkung führt, dass $V(L, a)$ eine unitäre Transformation sein muss. Analog muss das auch für die S-Matrix gelten, welche die Rolle der Zeitentwicklung von asymptotischen Zuständen in der Quantenfeldtheorie übernimmt: $|\psi(t = \infty)\rangle = S|\psi(t = -\infty)\rangle$. In Theorien, in denen die Lorentzsymmetrie verletzt ist, muss jedoch die S-Matrix[3] nicht notwendigerweise unitär sein, was eine Norm nicht invariant lassen würde und damit eine Verletzung der Unitarität zur Folge hätte. Deshalb ist die Unitarität explizit nachzuweisen, und eine Methode zu deren Überprüfung in der Praxis wird im Laufe dieses Teils der Dissertation vorgestellt werden.

Im Folgenden werden für Lorentzindizes griechische Buchstaben benutzt. Kontravariante Vierervektoren schreiben wir mit einem oberen Lorentzindex und kovariante mit einem unteren.

[1] Die Nummerierung weicht also von [30] ab.

[2] Dabei handelt es sich um Zustände der zweiten Quantisierung. Solche spannen den Fock-Raum auf.

[3] Beispielsweise muss der Hamiltonoperator der Theorie kein positiv semidefinites Spektrum aus Eigenwerten besitzen.

Wir verwenden die Minkowski-Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, wobei die Minkowski-Zeit als $x^0 = \eta^{0\mu} x_\mu$. Für gewisse Untersuchungen wird es geeigneter sein, mittels einer Wick-Rotation in den euklidischen Raum überzugehen. Wir führen die Wick-Rotation so durch, dass die euklidische Metrik von der Gestalt $(\eta_{ij}) = -\mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$ ist[4] und bezeichnen die euklidische Zeit als x_4 ($x^0 = \mathrm{i}x_4$).

[4] mit $i,\ j = (4, 1, 2, 3)$

Kapitel 11.

Räumlich isotroper Fall (Fall 1)

11.1. Lichtkegel

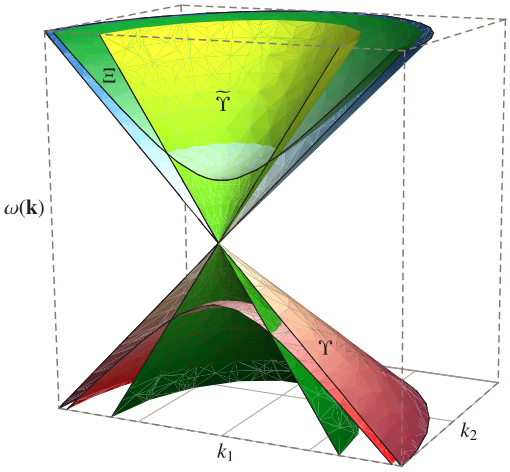


Abbildung 11.1.: Standard-Lichtkegel Υ, modifizierter Lichtkegel $\widetilde{\Upsilon}$ von Fall 1 und die Massenschale Ξ.

In Abschnitt 3.5 hatten wir die Dispersionsrelation für Fall 1 hergeleitet:

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathcal{A}|\mathbf{k}|\,, \quad \mathcal{A} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,. \tag{11.1}$$

Die Funktion $\omega(\mathbf{k})$ beschreibt im Impulsraum einen modifizierten Lichtkegel. In der Skizze nebenan ist Υ der Lichtkegel für $\widetilde{\kappa}_{00} = 0$ (also jener für die gewöhnliche Theorie) und $\widetilde{\Upsilon}$ der Lichtkegel in der modifizierten Theorie, wobei eine Impulsdimension unterdrückt wurde. Je nach Parameterwahl verläuft $\widetilde{\Upsilon}$ komplett innerhalb oder außerhalb von Υ, sofern $\mathcal{A}$ reell ist.

Zusätzlich ist die Massenschale Ξ für massive Teilchen eingezeichnet. Für $\widetilde{\kappa}_{00} < 0$ schneidet der modifizierte Lichtkegel ab einem bestimmten $|\mathbf{k}|$ die Massenschale, was bedeutet, dass Photonen dann für festes $|\mathbf{k}|$ eine höhere Energie besitzen als massive Teilchen. Das wiederum ermöglicht den Photonzerfall, welcher im vorigen Teil der Dissertation ausführlich diskutiert wurde. In der gewöhnlichen Maxwell-Theorie kann aufgrund der Energielücke der Dispersionsrelation massiver Teilchen die Energie eines Photons nie größer sein als die eines massiven Teilchens bei gleichem Impuls.

Zur Vereinfachung der Betrachtungen teilen wir den Parameterraum von Fall 1 in die beiden folgenden Mengen auf:

$$\mathscr{M} = \left\{ \widetilde{\kappa}_{00} \;\middle|\; -\frac{3}{2} < \widetilde{\kappa}_{00} < \frac{3}{2} \right\}, \quad \mathscr{M}^* = \left\{ \widetilde{\kappa}_{00} \;\middle|\; \widetilde{\kappa}_{00} < -\frac{3}{2} \vee \widetilde{\kappa}_{00} > \frac{3}{2} \right\}. \tag{11.2}$$

Diese Wahl wird sich im Zuge der folgenden Berechnungen als geschickt und nützlich erweisen. Wie wir bereits in Abschnitt 3.5 gesehen haben, wird der räumlich isotrope Fall durch den Vierervektor $(\xi^\mu) = (1,0,0,0)^\intercal$ charakterisiert. In den folgenden Berechnungen wird das Skalarprodukt $\xi^\alpha \xi_\alpha$ beibehalten und nicht auf 1 gesetzt. Der Grund dafür ist, dass sich die Ergebnisse dann bequem auf den räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung $(\xi^\mu) = (0,0,0,1)^\intercal$ übertragen lassen.[1]

11.2. Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit der Theorie

Die Berechnung der drei charakteristischen Geschwindigkeiten kann uns helfen, vorläufige Aussagen über die Kausalität einer Theorie zu treffen. Speziell in Abschnitt 3.5.1 haben wir bereits gesehen, dass alle drei Geschwindigkeiten gleich sind:

$$v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{gr}} = v_{\mathrm{fr}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,. \tag{11.3}$$

Der Wert $\widetilde{\kappa}_{00} = 3/2$ führt zu verschwindenden Energien und Geschwindigkeiten; die Ausbreitung von physikalischen Signalen ist für diese Wahl somit nicht möglich. Zusätzlich muss $\widetilde{\kappa}_{00} = -3/2$ ausgeschlossen werden, da dieser Wert eine Polstelle von Gl. (11.3) ist. Es ist ersichtlich, dass für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}^*$ Gl. (11.3) nicht definiert und die Propagation eines Signals in diesem Parameterbereich nicht möglich ist. Somit kann man feststellen, dass das Modell nur für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ Sinn ergibt und $\mathscr{M}^*$ das unphysikalische Regime der Theorie parametrisiert.

Darüber hinaus ist für $\widetilde{\kappa}_{00} < 0$ die Frontgeschwindigkeit $v_{\mathrm{fr}} > 1$. Ein Signal würde sich dann mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die größer ist als die fixierte Geschwindigkeit c des Minkowski-Linienelements, was zu einer naiven Verletzung der Kausalität führt. „Naiv“ deshalb, weil dieses Kriterium noch nicht ausreichend ist, um endgültige Aussagen zu treffen.

11.3. Der modifizierte Photonpropagator in verschiedenen Eichungen

11.3.1. Wirkung und Eichfixierung

Der Propagator stellt ein mächtiges Werkzeug dar, um Aussagen über die Kausalität einer Theorie zu treffen. In diesem steckt die Polstruktur der Theorie, und deren Eigenschaften bzw. deren Verhalten (beispielsweise bezüglich Wick-Rotation) sind entscheidend, ob eine Theorie kausales Verhalten ausweist oder nicht. Wir betrachten also im Folgenden einzig und allein die Wirkung der modifizierten Maxwell-Theorie, also des Photonsektors. Der Materiesektor spielt

[1] Dann ist $\xi^\alpha \xi_\alpha = -1$.

hier zunächst keine Rolle, da dieser konventionell ist. Die Wirkung lautet

$$S_{\text{modM}} = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_{\text{modM}}\,, \tag{11.4}$$

mit der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{modM}} &= -\frac{1}{4}(\eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma} + \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma})F_{\mu\nu}(x)F_{\varrho\sigma}(x) + \mathcal{L}_{\text{gf}} = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\mu\nu}(x)F_{\varrho\sigma}(x) + \mathcal{L}_{\text{gf}}\,.\end{aligned} \tag{11.5}$$

Hier ist $\mathcal{L}_{\text{gf}}$ ein Eichfixierungsterm, welcher zur Quantisierung der Theorie notwendig ist, um die unendlich vielen Freiheitsgrade des Eichfelds $A_\mu(x)$ loszuwerden, die durch Eichtransformationen miteinander verknüpft sind. Diese führen dazu, dass die Felder $A_\mu(x)$ überbestimmt sind, was die Existenz des Propagators zunichte macht. Diese Freiheitsgrade werden entfernt, indem man eine Eichung festlegt. Dazu wählen wir erstens die axiale Eichung

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\zeta}(n_\mu A^\mu(x))^2\,, \tag{11.6}$$

mit dem axialen Eichvektor n_μ, welcher ein beliebiger, aber fester Vektor im Minkowski-Raum ist. Zusätzlich soll der Propagator in Lorenz-Eichung

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu(x))^2\,, \tag{11.7}$$

bestimmt werden. Die Variable ζ in Gl. (11.6) und (11.7) ist der Eichparameter, also einfach ein Lagrange-Parameter, über den die Nebenbedingung $n_\mu A^\mu(x) = 0$ bzw. $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ in der Wirkung fixiert wird, was einer bestimmten Eichwahl entspricht. Um den Propagator aus der Lagrangedichte (11.5) zu bestimmen, muss Gl. (11.5) auf die Form eines Differentialoperators gebracht werden, welcher zwischen zwei Eichbosonfeldern A^μ eingeschlossen ist. Dies kann durch partielle Integration erreicht werden mit der zusätzlichen Nebenbedingung, dass alle physikalischen Felder im Unendlichen genügend schnell abfallen. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= \frac{1}{2}A_\nu(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu \quad (+\,\text{Randterme})\,,\end{aligned} \tag{11.8}$$

und

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\varrho\sigma} &= -\frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\varrho A_\sigma - \partial_\sigma A_\varrho) = \\ &= -\frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\mu A_\nu(\partial_\varrho A_\sigma - \partial_\sigma A_\varrho) = \\ &= \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}A_\nu(\partial_\mu\partial_\varrho A_\sigma - \partial_\mu\partial_\sigma A_\varrho) \quad (+\,\text{Randterme}) =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu\sigma\varrho} A_\nu \partial_\mu \partial_\sigma A_\varrho + \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu\sigma\varrho} A_\nu \partial_\mu \partial_\sigma A_\varrho = -A_\mu (\kappa^{\mu\varrho\sigma\nu} \partial_\varrho \partial_\sigma) A_\nu \,. \quad (11.9)$$

11.3.2. Axiale Eichung

Mit den bisherigen Betrachtungen kann die Wirkung der modifizierten Maxwell-Theorie wie folgt geschrieben werden:

$$S^{\text{axial}}_{\text{modM}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \, A_\mu \left(\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{\zeta} n^\mu n^\nu - 2\kappa^{\mu\varrho\sigma\nu} \partial_\varrho \partial_\sigma \right) A_\nu \,. \quad (11.10)$$

Mit dem nicht-doppelbrechenden Ansatz

$$\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\nu\varrho} - \eta^{\nu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\mu\varrho}) \,, \quad (11.11)$$

kommen wir auf

$$\begin{aligned} -\kappa^{\mu\varrho\sigma\nu}\partial_\varrho\partial_\sigma &= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\varrho\nu} - \eta^{\varrho\sigma}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} + \eta^{\varrho\nu}\widetilde{\kappa}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\nu}\widetilde{\kappa}^{\varrho\sigma})\partial_\varrho\partial_\sigma = \\ &= \frac{1}{2}(\Box\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\varrho\widetilde{\kappa}^{\varrho\nu} - \widetilde{\kappa}^{\mu\sigma}\partial_\sigma\partial^\nu + \eta^{\mu\nu}\widetilde{\kappa}^{\varrho\sigma}\partial_\varrho\partial_\sigma) \,. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Transformiert man das Ganze in den Impulsraum, wobei k^μ der Viererimpuls sein soll, und beschränkt das Modell schließlich auf den räumlich isotropen Fall

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left(\xi^\mu\xi^\nu - \eta^{\mu\nu}\frac{\xi^\alpha\xi_\alpha}{4}\right) \,, \quad (11.13)$$

so führt dies im Impulsraum zu:

$$\begin{aligned} \kappa^{\mu\varrho\sigma\nu}k_\varrho k_\sigma &= \frac{1}{2}(-(k^\alpha k_\alpha)\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} + k^\mu k_\varrho\widetilde{\kappa}^{\varrho\nu} + \widetilde{\kappa}^{\mu\sigma}k_\sigma k^\nu - \eta^{\mu\nu}\widetilde{\kappa}^{\varrho\sigma}k_\varrho k_\sigma) = \\ &= \frac{1}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left\{\left[(k^\alpha k_\alpha)(\xi^\beta\xi_\beta) - 2(k^\alpha\xi_\alpha)^2\right]\eta^{\mu\nu} + 2(k^\alpha\xi_\alpha)(k^\mu\xi^\nu + \xi^\mu k^\nu)\right. \\ &\qquad \left. -2(k^\alpha k_\alpha)\xi^\mu\xi^\nu - (\xi^\alpha\xi_\alpha)k^\mu k^\nu\right\} \,. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Aus der Wirkung (11.10) ergibt sich so der inverse Propagator (im Impulsraum):

$$(G^{-1})^{\mu\nu} = -(k^\alpha k_\alpha)\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu - \frac{1}{\zeta}n^\mu n^\nu + 2\kappa^{\mu\varrho\sigma\nu}k_\varrho k_\sigma \,. \quad (11.15)$$

Um nun auf den Propagator $G_{\mu\nu}$ zu kommen, muss Gl. (11.15) invertiert werden. Wir suchen also ein $G_{\nu\sigma}$, das $(G^{-1})^{\mu\nu}G_{\nu\sigma} = -\delta^\mu{}_\sigma$ erfüllt, wobei das Minuszeichen Konvention ist. Der Propagator ist nichts anderes als eine symmetrische (4×4)-Matrix-Funktion bezüglich der Komponenten von k^μ, weshalb es sich bei der letzten Gleichung um ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und zehn Unbekannten – den voneinander unabhängigen Einträgen in der Propagatormatrix – handelt. Dieses kann prinzipiell direkt gelöst werden, danach ist

jedoch die erhaltene (4×4)-Matrix wieder kovariant zu schreiben. Einfacher ist daher folgendes Vorgehen. Wir konstruieren uns einen Ansatz für den Propagator unter Verwendung aller möglichen zweistufigen Tensoren, die sich aus den Vierervektoren k^μ, n^μ und ξ^μ bilden lassen:

$$\begin{aligned} G_{\nu\sigma} = \{ & a\eta_{\nu\sigma} + bk_\nu k_\sigma + c(k_\nu n_\sigma + n_\nu k_\sigma) \\ & + d\xi_\nu\xi_\sigma + e(k_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu k_\sigma) + fn^\mu n^\sigma + g(n_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu n_\sigma)\} K\,. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Hierbei sind $a = a(k^0, \mathbf{k})$, …, $g = g(k^0, \mathbf{k})$ und $K = K(k^0, \mathbf{k})$ skalare Funktionen, die vom Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$ und Skalarprodukten der Vierervektoren k^α, n^α und ξ^α abhängig sind. Der Ansatz (11.16) ist so gewählt, dass er symmetrisch bezüglich Vertauschung der Indizes ist. Deshalb treten nur symmetrische Kombinationen der Gestalt $k_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu k_\sigma$ usw. auf. Die Kontraktion und Auflösung des Systems nach den obigen Funktionen führt zum Ergebnis

$$K = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)\right)(k^\beta k_\beta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\beta\xi_\beta)^2}\,, \tag{11.17a}$$

$$a = 1\,, \tag{11.17b}$$

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)} \frac{1}{(k^\beta n_\beta)^2} \Bigg\{ & \left(1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma\xi_\gamma)\right)(n^\delta n_\delta) - \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma n_\gamma)^2 \\ & + \zeta\left(1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma\xi_\gamma)\right)\left[\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\delta\xi_\delta)\right)(k^\delta k_\delta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\delta\xi_\delta)^2\right]\Bigg\}\,, \end{aligned} \tag{11.17c}$$

$$c = -\frac{1}{k^\alpha n_\alpha}\,, \quad d = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)}\,, \quad e = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)} \frac{\xi^\beta n_\beta}{k^\gamma n_\gamma}\,, \tag{11.17d}$$

$$f = 0\,, \quad g = 0\,. \tag{11.17e}$$

11.3.3. R_ξ-Eichung

Um das Ergebnis in axialer Eichung zu überprüfen, berechnen wir nun noch den Propagator in R_ξ-Eichung, welche eine Verallgemeinerung der Lorenz-Eichung ist. Mittels des Eichfixierungsterms (11.7) ergibt sich die folgende Wirkung:

$$S^{R_\xi}_{\text{modM}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, A_\mu \left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu - \frac{1}{\zeta}\partial^\mu\partial^\nu - 2\kappa^{\mu\varrho\sigma\nu}\partial_\varrho\partial_\sigma\right) A_\nu\,. \tag{11.18}$$

Der Grenzfall $\zeta = 0$ entspricht der sogenannten Landau-Eichung, welche zumindest im klassischen Falle äquivalent zur Lorenz-Eichung ist. $\zeta = 1$ bezeichnet man als Feynman-'t Hooft-Eichung [45]. Im Prinzip haben wir hier den allgemeinen Fall der axialen Eichung auf die spezielle Wahl $n^\mu = k^\mu$ reduziert. Damit stehen uns nun nur die Vierervektoren k^μ und ξ^μ zur Verfügung (und der metrische Tensor $\eta^{\mu\nu}$), um einen symmetrischen zweistufigen Tensor zu

konstruieren:

$$G_{\nu\sigma} = \{a\eta_{\nu\sigma} + bk_\nu k_\sigma + c\xi_\nu\xi_\sigma + d(k_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu k_\sigma)\}\, K\,. \tag{11.19}$$

Mittels dieses Ansatzes ergibt sich dann

$$K = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)\right)(k^\beta k_\beta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\beta\xi_\beta)^2}\,, \tag{11.20a}$$

$$a = 1\,, \tag{11.20b}$$

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)}\frac{1}{(k^\beta k_\beta)^2}\Bigg\{ &-\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma\xi_\gamma)\right)(k^\delta k_\delta) - \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma k_\gamma)^2 \\ &+\zeta\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\gamma\xi_\gamma)\right)\left[\left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\delta\xi_\delta)\right)(k^\delta k_\delta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\delta\xi_\delta)^2\right]\Bigg\}\,, \end{aligned} \tag{11.20c}$$

$$c = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)}\,, \quad d = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)}\frac{\xi^\beta k_\beta}{k^\gamma k_\gamma}\,. \tag{11.20d}$$

Man kann leicht überprüfen, dass sich dieses Ergebnis aus Gl. (11.16) und (11.17) ergibt mit der Wahl $n^\mu = k^\mu$. Eine solche Wahl ist möglich, obwohl wir zuvor den Vektor n^μ als festen Vektor definiert haben.

Dieser Propagator wurde schon bei der Berechnung der Zerfallsbreite des Proton-Breakup-Prozesses in Abschnitt 6.6 einem praktischen Test unterworfen. Das Ergebnis für die Zerfallsbreite ist physikalisch sinnvoll, was bereits ein gutes Anzeichen für die Konsistenz der Theorie ist.

11.4. Verhalten des Feynman-Propagators unter Wick-Rotation

Im Minkowski-Raum bezeichnet man n-Punkt-Korrelationsfunktionen $\langle 0|\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|0\rangle$ eines Skalarfeldes $\phi(x) = \phi(x^0, \mathbf{x})$ als Wightman-Funktionen $\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)$, während das Analogon im euklidischen Raum die Schwinger-Funktionen $\mathcal{S}$ bilden [75]:

$$\mathcal{S}(x_{1,4}, \mathbf{x}_1; \ldots; x_{n,4}, \mathbf{x}_n) \equiv \mathcal{W}(\mathrm{i}x_{1,4}, \mathbf{x}_1; \ldots; \mathrm{i}x_{n,4}, \mathbf{x}_n)\,. \tag{11.21}$$

Wir interessieren uns vor allem für die zeitgeordnete Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion $W(x_1, x_2) = W(x_1 - x_2) \equiv W(x)$, also den Feynman-Propagator. Dieser lautet für ein skalares Feld im Minkowski-Raum:

$$\begin{aligned} W(x) &\equiv \theta(x^0)\mathcal{W}(x,0) + \theta(-x^0)\mathcal{W}(0,x) = \\ &= \theta(x^0)\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle + \theta(-x^0)\langle 0|\phi(0)\phi(x)|0\rangle = \\ &= \langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0\rangle \equiv \mathrm{i}\Delta_F(x)\,, \end{aligned} \tag{11.22}$$

mit der Heavisideschen Stufenfunktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} . \tag{11.23}$$

Die Propagatorfunktion Δ_F des Feynman-Propagators hängt mit dem zuvor definierten skalaren Anteil des Propagators K über die Feynmansche ϵ-Vorschrift zusammen.[2] Speziell für Fall 1 gilt zum Beispiel[3]

$$W(x) = -\mathrm{i}\Delta_F(x)\,, \quad \Delta_F(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\, \exp(-\mathrm{i}k^\alpha x_\alpha)\Delta_F(k)\,, \tag{11.24}$$

mit der Feynman-Propagatorfunktion $\Delta_F(k)$ im Impulsraum:[4]

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{K^{-1} + \mathrm{i}\epsilon} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\xi^\mu\xi_\mu\right) k^\nu k_\nu + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\mu\xi_\mu)^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{11.25}$$

Der volle Feynman-Propagator ergibt sich aus dem skalaren Anteil, indem dieser zusätzlich mit den in den vorherigen Abschnitten 11.3.2 bzw. 11.3.3 bestimmten tensorwertigen Anteilen multipliziert wird. Analog definiert man die zeitgeordnete Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion, also den Feynman-Propagator, im euklidischen Raum:

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv \theta(x_4)\mathcal{S}(x,0) + \theta(-x_4)\mathcal{S}(0,x) = \\ &= \theta(x_4)\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle + \theta(-x_4)\langle 0|\phi(0)\phi(x)|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Damit eine Feldtheorie im Minkowski-Raum konsistent ist, muss diese den sogenannten Wightman-Axiomen [76] genügen und dementsprechend den Osterwalder-Schrader-Axiomen im Euklidischen [75]. Im Allgemeinen sind feldtheoretische Beweise einfacher im euklidischen Raum durchzuführen, wobei diese dann analytisch in den Minkowski-Raum fortgesetzt werden müssen.

Ein solcher Übergang von Minkowski-Raumzeit-Koordinaten zum euklidischen Raum funktioniert über die Wick-Rotation. Das Verhalten der Polstruktur des Propagators dabei spiegelt dessen analytisches Verhalten wider. Wir beschränken uns auf die Pole der in Abschnitt 11.3.3 definierten skalaren Funktion im Propagator. Für eine Dispersionsrelation, die keinen bevorzugten Vierervektor enthält, wie dies beispielsweise im Photonsektor der gewöhnlichen QED der Fall ist, bewegen sich die Pole mit der Wick-rotierten Achse, ohne diese zu überqueren. Jedoch muss in einer Theorie, welche die Lorentzsymmetrie verletzt, ebenso bedacht werden, dass sich die bevorzugten Vierervektoren unter der Wick-Rotation bewegen, was zur Folge hat, dass die Pole die Wick-rotierte Achse prinzipiell überschreiten könnten. In diesem Falle ist eine

[2] Diese garantiert, dass die Pole des Propagators bei der Integration im Impulsraum weder auf dem Integrationsweg noch innerhalb der Integrationskontur liegen. Ausführlicher wird das Ganze im nächsten Kapitel beschrieben.

[3] Man beachte das zusätzliche Minuszeichen beim skalaren Anteil des Photonpropagators im Gegensatz zum Propagator eines skalaren Feldes.

[4] siehe dazu Gl. (11.17a)

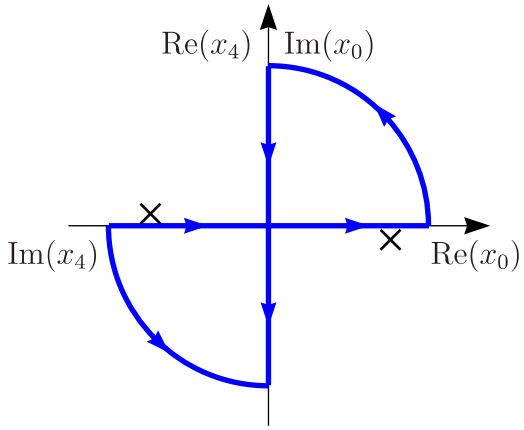


Abbildung 11.2.: Komplexe k_4-Ebene (k^0-Ebene) mit Integrationskontur $\mathcal{C}$. Pole (gekennzeichnet durch Kreuze) liegen außerhalb der Region, die von $\mathcal{C}$ begrenzt wird.

Wick-Rotation im gewöhnlichen Sinne nicht möglich, weil es dann zusätzliche Beiträge von den Polen geben wird.

11.4.1. Vorbemerkungen zur Wick-Rotation

Wir betrachten die komplexe k^0-Ebene. Nach Feynmans ϵ-Vorschrift werden die negativen Pole infinitesimal zur oberen komplexen Halbebene verschoben und die positiven Pole zur unteren [38]. Somit befinden sich keine Pole im ersten und dritten Quadraten der komplexen Ebene und es ist möglich, eine Integrationskontur $\mathcal{C}$ zu definieren, die keine Pole enthält. Dies ist in Abb. 11.2 dargestellt. Nach dem Residuensatz liefert das Konturintegral dann keinen Beitrag. Da die Integration über die beiden Viertelkreise im ersten und dritten Quadraten einen vernachlässigbaren Beitrag liefern, sofern deren Abstand zum Ursprung groß genug ist, kann die Integration entlang der reellen Achse durch eine Integration entlang der imaginären Achse ersetzt werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k^0 = \int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k^0 \,. \tag{11.27}$$

Jetzt kann man die Wick-Rotation, also die Ersetzung $k^0 = \mathrm{i}k_4$ durchführen, was

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k^0 = \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_4 \,, \tag{11.28}$$

zur Folge hat. Die Wick-Rotation bedeutet somit nichts anderes, als dass die k_4 (k^0)-Achse im (Gegen)uhrzeigersinn rotiert wird; dargestellt ist dies in Abb. 11.3. Die Pole und die Kurve $\mathcal{C}$ bewegen sich mit der Achse. Mittels der Wick-Rotation ist es möglich, vom Minkowski-Raum

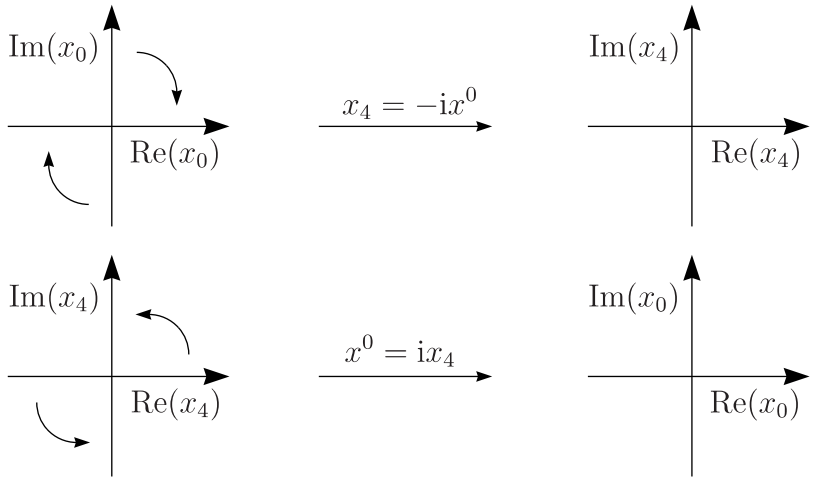


Abbildung 11.3.: Verhalten der komplexen k_4-Ebene (k_0-Ebene) bezüglich Wick-Rotation.

zum euklidischen Raum zu transformieren und umgekehrt:

$$g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 \overset{k^0=\mathrm{i}k_4}{=} -(k_4^2 + \mathbf{k}^2) = -g_{ij}k_{E,i}k_{E,j} = -k_E^2\,, \tag{11.29}$$

mit $(k_{E,i}) = (k_4, \mathbf{k})$ und euklidischer Metrik $(g_{ij}) = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ mit $i,\, j \in \{1,2,3,4\}$. Für die kausale Struktur des Feynman-Propagators ist dessen Polstruktur wichtig und infolgedessen sein Verhalten bezüglich der Wick-Rotation. Falls die Pole des Feynman-Propagators die Wick-rotierte Achse überschreiten, werden diese nach der Wick-Rotation innerhalb der Integrationskontur liegen. Ein solches Verhalten zerstört die Möglichkeit, eine analytische Fortsetzung vom euklidischen Raum zum Minkowski-Raum zu konstruieren, was sich physikalisch in einer Verletzung der Kausalität äußern kann.

11.4.2. Die Wick-Rotation bei Fall 1

Kommen wir nun speziell zum räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie. Die Pole im Minkowski-Raum entsprechen den Nullstellen der Off-Shell Dispersionsrelation

$$\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(\xi^\alpha\xi_\alpha)\right)(k^\beta k_\beta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^\beta\xi_\beta)^2 = 0\,, \tag{11.30}$$

und diese sind gegeben durch

$$k_{0,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{00}) = \sqrt{\frac{3 - 2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_0^2}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_0^2}}\,k = \sqrt{\frac{3 - 2\widetilde{\kappa}_{00}}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}}}\,k\,, \tag{11.31a}$$

$$k_{0,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{00}) = -\sqrt{\frac{3 - 2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_0^2}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_0^2}}\,k = -\sqrt{\frac{3 - 2\widetilde{\kappa}_{00}}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}}}\,k\,, \tag{11.31b}$$

wobei für den räumlich isotropen Fall $\xi^\alpha \xi_\alpha = (\xi^0)^2 - \boldsymbol{\xi}^2 = 1$ gilt. Die explizite Abhängigkeit von ξ^μ wird angegeben, da man im Hinterkopf behalten muss, dass ξ^μ ebenso der Wick-Rotation unterliegt – was zu Beginn des Abschnitts erwähnt ist. Die Nullstellen der Off-Shell-Dispersionsrelation im vierdimensionalen euklidischen Raum folgen aus

$$-\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\xi_4^2\right)(k_4^2+\mathbf{k}^2)+\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}k_4^2\xi_4^2=0\,, \tag{11.32}$$

mit $\xi_4 = 1$ und sind gegeben durch:

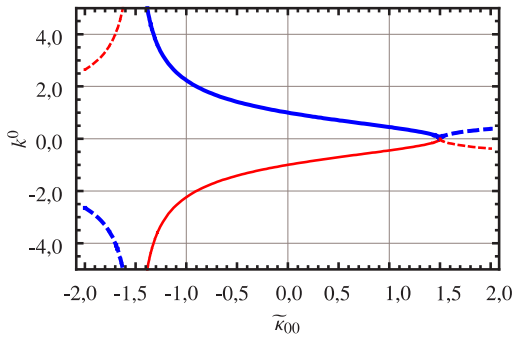
$$k_{4,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{00}) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{3+2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_4^2}{3-2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_4^2}}\,k = \mathrm{i}\sqrt{\frac{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}}\,k \tag{11.33a}$$

$$k_{4,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{00}) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{3+2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_4^2}{3-2\widetilde{\kappa}_{00}\xi_4^2}}\,k = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}{3-2\widetilde{\kappa}_{00}}}\,k\,. \tag{11.33b}$$

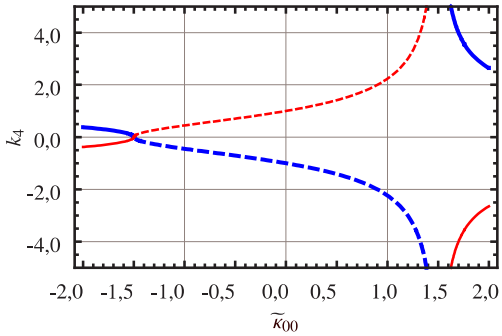
Die Indizes „$\oplus$“ und „$\ominus$“ in den Gl. (11.31) und (11.33) weisen auf das Vorzeichen vor der Quadratwurzel hin. Eine Wick-Rotation $k_4 = -\mathrm{i}k_0$ hat die folgende Ersetzung zur Folge:

$$k_{4,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{00}) \to k_{0,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{00})\,, \quad k_{4,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{00}) \to k_{0,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{00})\,. \tag{11.34}$$

Die Nullstellen $k^0(\widetilde{\kappa}_{00})$ und $k_4(\widetilde{\kappa}_{00})$ sind in den Abb. 11.4(a) und 11.4(b) dargestellt. Eine Wick-



(a) Nullstellen $k^0(\widetilde{\kappa}_{00})$ der Off-Shell-Dispersionsrelation (11.30) im Minkowski-Raum. Die Werte $k = 1$ und $\xi_0 = 1$, wobei letzterer Fall 1 entspricht, wurden für das linke Schaubild gewählt.



(b) Nullstellen $k_4(\widetilde{\kappa}_{00})$ der Off-Shell-Dispersionsrelation (11.32) im euklidischen Raum. Die Werte $k = 1$ und $\xi_4 = 1$ für Fall 1 wurden für das Schaubild verwendet.

Abbildung 11.4.: Die dicken (blauen) Kurven stellen die Nullstellen mit positivem Vorzeichen, die dünnen (roten) Kurven die Nullstellen mit negativem Vorzeichen dar. Durchgezogene Kurven stehen für Realteile und gestrichene für Imaginärteile.

Rotation vom euklidischen Raum in den Minkowski-Raum bildet beispielsweise eine Nullstelle mit positivem Realteil im Minkowski-Raum auf eine Nullstelle mit negativem Imaginärteil im euklidischen Raum ab wie auch eine Nullstelle mit positivem Imaginärteil auf eine mit negativem Realteil. Somit überqueren die Nullstellen bei der Wick-Rotation weder die Wick-

rotierte Achse, noch liegen sie nach der Wick-Rotation innerhalb der Integrationskontur. Das gilt für alle Werte für $\widetilde{\kappa}_{00}$. Für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathcal{M}^*$ liegen die Pole (im Minkowski-Raum) auf der imaginären k^0-Achse, was bedeutet, dass die Energie in diesem Fall negativ ist. Dieses Verhalten war auch schon aus der Untersuchung der Geschwindigkeiten ersichtlich. Somit ging auch aus diesen Untersuchungen hervor, dass der Parameterbereich $\mathscr{M}^*$ unphysikalisch ist.

11.5. Die Subluminitätsbedingung

Blauäugig denkt man, dass Überlichtgeschwindigkeiten immer mit einer Verletzung der (Mikro)kausalität einhergehen. Formal steckt der Ausschluss von Überlichtgeschwindigkeiten zur Gewährleistung der Kausalität der Quantentheorie in der Subluminitätsbedingung [77]. Diese besagt, dass eine relativistische Quantenfeldtheorie genau dann mikrokausal ist, sofern $F^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ für $\mathrm{Im}(\omega) > |\mathrm{Im}(k)|$ eine analytische Funktion bezüglich ω und $\mathbf{k}$ ist. Die Funktion $F(\omega, \mathbf{k})$ ist die Off-Shell-Bedingung, deren Nullstellenmenge die Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen ist: $\{\omega(\mathbf{k}) | F(\omega, \mathbf{k}) = 0\}$. Zunächst soll der räumlich isotrope Fall mit

$$\mathrm{Im}(\omega) = \sqrt{\frac{1 - 2/3\,\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + 2/3\,\widetilde{\kappa}_{00}}}\,\mathrm{Im}(k)\,, \tag{11.35}$$

betrachtet werden. Für $\mathrm{Im}(k) < 0$ greift die Subluminitätsbedingung nicht, weil dann $\mathrm{Im}(\omega)$ nach Gl. (11.35) kleiner als null ist. Wir betrachten $\mathrm{Im}(k) < 0$ somit nicht mehr weiter; es sei deshalb $\mathrm{Im}(k) > 0$:

$$\mathrm{Im}(\omega) \begin{cases} < \mathrm{Im}(k) & \text{für} \quad 0 < \widetilde{\kappa}_{00} \leq 3/2 \\ > \mathrm{Im}(k) & \text{für} \quad -3/2 < \widetilde{\kappa}_{00} < 0 \end{cases} . \tag{11.36}$$

Für $0 < \widetilde{\kappa}_{00} \leq 3/2$ ist die Subluminitätsbedingung erfüllt, weil $F^{-1}(\omega, k)$ analytisch ist. Das ist jedoch nicht der Fall für $-3/2 < \widetilde{\kappa}_{00} < 0$, da dann alle Punkte, welche der Dispersionsrelation genügen, Nullstellen von $F(\omega, k)$ und damit Pole von $F^{-1}(\omega, k)$ sind, womit diese Funktion nichtanalytisch in diesen Punkten ist. Somit ist die Subluminitätsbedingung für diesen Bereich des Parameterraums verletzt. Der Parametersektor $-3/2 < \widetilde{\kappa}_{00} < 0$ scheint also in der klassischen Theorie zu Problemen zu führen. Ob und welche Auswirkungen dies auf eine Quantisierung der Theorie hat, insbesondere auch auf die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Unitarität) wird im Folgenden untersucht.

11.6. Der Kommutator des Vektorpotentials an verschiedenen Raumzeit-Punkten

Zur Untersuchung der Mikrokausalität sind wir an der Kommutatorfunktion des Vektorpotentials $K_{\mu\nu}(x', y') := [A_\mu(x'), A_\nu(y')]$ an verschiedenen Punkten $x' := (t', \mathbf{x}')$ und $y' := (t'', \mathbf{y}')$

der Raumzeit interessiert [20]. Aufgrund der (passiven sowie aktiven) Translationsinvarianz[5] reicht es, $K_{\mu\nu}(x'-y',0) \equiv K_{\mu\nu}(x,0)$ zu betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x^0 > 0$. Für die Berechnung von $K_{\mu\nu}(x,0)$ stehen uns drei Möglichkeiten zur Verfügung: Man kann den Kommutator direkt unter Verwendung der Fourier-Zerlegung des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ berechnen, einen allgemeinen Ansatz für das Ergebnis machen und die Feldgleichungen zu Hilfe nehmen oder zu guter Letzt das Ergebnis aus dem schon berechneten Propagator extrahieren. Alle drei Möglichkeiten werden in Anhang D.2.1 vorgeführt.

Diese führen zum selben Ergebnis für $K_{\mu\nu}(x,0)$, was eine gute Gegenprobe ist. Mit

$$\Pi_{00} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \left(-\eta_{00} + \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \xi_0^2 - \frac{\omega(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2} + 2\frac{\omega(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2} \right) = 0\,, \tag{11.37}$$

wird einem aus den ersten beiden Möglichkeiten sofort klar, dass K_{00}, K_{0i} und K_{i0} verschwinden. Das ergibt sich aus dem Propagator und stimmt mit der Tatsache $A_0 = 0$ (in Coulombeichung) überein.

11.7. Die Kommutatoren der physikalischen Felder

Wie wir bereits gesehen haben, hängt der Kommutator von Vektorpotentialen an zwei verschiedenen Raumzeit-Punkten x und y aufgrund der Translationsinvarianz nur von der Differenz $x-y$ ab. Obwohl $y=0$ gesetzt wird, ist es jedoch besonders wichtig, bei der Bildung von Ableitungen das Minuszeichen vor y zu berücksichtigen. Der Kommutator kann in der Form

$$[A_i(x), A_j(0)] = T_{ij}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{11.38}$$

geschrieben werden mit der Kommutatorfunktion

$$D(x) = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp[\mathrm{i}(-k^0x^0 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)(k^0)^2 - \left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\mathbf{k}^2}\,. \tag{11.39}$$

Im Impulsraum wiederum besitzt der Kommutator die folgende Form:

$$[A_i, A_j](k) = T_{ij}(k^0, \boldsymbol{k})(\mathrm{i}D(k))\,, \quad D(k) = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)(k^0)^2 - \left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\mathbf{k}^2}\,. \tag{11.40}$$

Mit den obigen Betrachtungen sind wir in der Lage, die Kommutatoren der physikalischen Felder, sprich des $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Felds, zu berechnen. Die ausführliche Berechnung derselbigen ist in Anhang D.2 verlagert. Wir geben an dieser Stelle die Ergebnisse direkt an:

$$[B_i(x), B_j(0)] = (\boldsymbol{\nabla}^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{11.41a}$$

[5] Diese besteht, wenn $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ keine Funktion der Raumzeit-Koordinaten x ist.

$$[E_i(x), B_j(0)] = \varepsilon_{ija}\partial_0\partial_a(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{11.41b}$$

und

$$[E_i(x), E_j(0)] = (\partial_0^2\delta_{ij} - \mathcal{A}^2\partial_i\partial_j)(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{11.41c}$$

mit $\mathcal{A}$ aus Gl. (11.1). An dieser Stelle verbleibt noch die Auswertung der Kommutatorfunktion

$$D(x) = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k_0^2 - \left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k^2} \exp(\mathrm{i}k_0x_0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,, \tag{11.42}$$

Auch hierzu findet sich eine ausführliche Behandlung in Anhang D.3.1. Das Ergebnis schreibt sich am einfachsten in der Gestalt

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}}\,\mathrm{sign}(\widetilde{x}_0)\delta(\widetilde{x}_0^2 - \mathbf{x}^2)\,. \tag{11.43}$$

Die Kommutatoren der physikalischen Felder für den räumlich isotropen Fall gehen im Grenzfalle $\widetilde{\kappa}_{00} \mapsto 0$ in die Ergebnisse der gewöhnlichen QED über, deren Berechnung durch Pauli erfolgt ist [78]. Ihre Struktur ist analog zu denen der gewöhnlichen QED. Die Kommutatoren von Komponenten der physikalischen Felder an zwei Punkten der Raumzeit verschwinden, sofern deren Minkowski-Abstandsquadrat nicht auf dem modifizierten Lichtkegel

$$\widetilde{x}_0^2 - \mathbf{x}^2 = 0\,, \quad \widetilde{x}_0 = x_0\mathcal{A}\,, \tag{11.44}$$

liegt. Sofern dies nicht der Fall ist, können zwei Beobachter, von denen sich jeder an jeweils einem der beiden Punkte befindet, nicht durch ein Lichtsignal miteinander kommunizieren, sie stehen also über Lichtsignale nicht im kausalen Zusammenhang. Dieses Ergebnis ist analog zur gewöhnlichen QED, was in [78] diskutiert wird mit dem Unterschied, dass die Lichtgeschwindigkeit (und somit auch der Lichtkegel) aufgrund der Verletzung der Lorentzsymmetrie modifiziert ist. Es gibt zwei Werte im Parameterraum von $\widetilde{\kappa}_{00}$, für die $D(x)$ einen Pol aufweist, nämlich $\widetilde{\kappa}_{00} = -3/2$ und $\widetilde{\kappa}_{00} = 3/2$. Den ersten von beiden haben wir sowieso schon am Anfang unserer Betrachtungen ausgeschlossen, weil dieser sogar ein Pol der Dispersionsrelation und der Frontgeschwindigkeit der Theorie ist, was in Abschnitt 11.2 diskutiert wurde. Der zweite Wert ist prinzipiell möglich, wobei für diesen jedoch die Frontgeschwindigkeit verschwindet, was die Propagation von Signalen unmöglich macht. Somit können wir auch diesen Wert außer Acht lassen.

11.7.1. Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

Für zwei Observablen A und B, welche der Kommutatorrelation $[A, B] = C$ genügen, wobei C eine gewöhnliche Zahl ist, gilt für A und B die Unbestimmtheitsrelation

$$(\Delta A)\cdot(\Delta B) \sim |C|\,. \tag{11.45}$$

Im Prinzip kann sie auf Feldkomponenten an unterschiedlichen Raumzeitpunkten angewendet werden. Jedoch ist für unsere Zwecke Gl. (11.45) nicht ausreichend. Der Grund dafür ist, dass man experimentell Feldstärken mittels einer Probeladung misst, im elektrischen Feld beispielsweise durch deren Auslenkung. Da sich die Probeladung im Laufe dieser Messung nicht an einem einzigen Punkt befindet, bestimmt man somit nicht die Feldstärke an einem Punkt, sondern die gemittelte über einen bestimmten räumlichen Bereich und über die Zeit. [6] Aus diesem Grund müssen die Feldstärken über Bereiche der Raumzeit gemittelt werden; auf diese Weise gemittelte Feldkomponenten sollen als $\overline{E}_i$ bzw. $\overline{B}_i$ bezeichnet werden. Wir betrachten somit zwei solcher Gebiete Ω_1 und Ω_2, wobei diese durch Längenskalen $(\Delta L)_{1/2}$ und Zeitskalen $(\Delta T)_{1/2}$ charakterisiert sein sollen. Die Kommutatorfunktion (11.43) kann ebenso in der Gestalt

$$D(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}}\frac{1}{x}\left\{\delta(\widetilde{x}_0 - x) - \delta(\widetilde{x}_0 + x)\right\}\,, \tag{11.46}$$

geschrieben werden. Aus dieser speziellen Form ist erkennbar, dass $D(x)$ antisymmetrisch bezüglich der beiden Zeiten t_1 und t_2 und symmetrisch in Bezug auf die räumlichen Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ ist. Da die Integration über die rechte Seite der Gleichungen (11.41a), (11.41b) und (11.41c) über die beiden vierdimensionalen Raumzeitgebiete (was eine achtdimensionale Integration darstellt) schwierig ist, betrachten wir einige Spezialfälle:

1) Gleiche Zeitintervalle $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$:

   Da $(\boldsymbol{\nabla}^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)$ symmetrisch bezüglich der Zeit ist, erweist sich der Kommutator (11.41a) als antisymmetrisch bezüglich der Zeit und verschwindet nach Integration über gleiche Zeitintervalle. Diese Argumentation gilt ebenso für Gl. (11.41c), da $(\partial_0^2\delta_{ij} - \mathcal{A}^2\partial_i\partial_j)$ auch zeitlich symmetrisch ist. Somit erhalten wir

   $$[\overline{E}_i(\Delta V_1, \Delta T), \overline{E}_j(\Delta V_2, \Delta T)] = 0\,, \tag{11.47a}$$

   $$[\overline{B}_i(\Delta V_1, \Delta T), \overline{E}_j(\Delta V_2, \Delta T)] = 0\,, \tag{11.47b}$$

   analog zur gewöhnlichen QED.

2.) Gleiche Ortsintervalle $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L$:

   Da $\varepsilon_{ija}\partial_0\partial_a$ antisymmetrisch bezüglich des Ortes ist, verschwindet die Integration von (11.41b) über gleiche räumliche Intervalle:

   $$[\overline{E}_i(\Delta V, \Delta T_1), \overline{B}_j(\Delta V, \Delta T_2)] = 0\,. \tag{11.48}$$

3.) Gleiche zeitliche und räumliche Intervalle:

[6] Siehe dazu auch [79] für die Maxwell-Chern-Simons-Theorie.

In diesem Falle verschwinden alle drei Kommutatoren:

$$[\overline{E}_i(\Delta V, \Delta T), \overline{E}_j(\Delta V, \Delta T)] = 0\,, \tag{11.49a}$$

$$[\overline{B}_i(\Delta V, \Delta T), \overline{E}_j(\Delta V, \Delta T)] = 0\,, \tag{11.49b}$$

$$[\overline{B}_i(\Delta V, \Delta T), \overline{E}_j(\Delta V, \Delta T)] = 0\,. \tag{11.49c}$$

Die Mittelung über beliebige Raumzeitgebiete wurde zwar versucht, konnte jedoch analytisch aufgrund der komplexen Struktur des Integrationsbereichs nicht bewerkstelligt werden. Dies ist jedoch auch nicht unbedingt notwendig, denn im Prinzip kann eine ähnliche Abschätzung wie in [25] durchgeführt werden mit dem Ergebnis, dass die Mikrokausalität für den räumlich isotropen Fall mit $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ gewährleistet ist.

11.8. Untersuchungen zur Unitarität

Die Unitarität ist von ebenso hoher Bedeutung wie die bereits untersuchte Mikrokausalität. Im Gegensatz zur Mikrokausalität steht jedoch zur Untersuchung der Unitarität im Wesentlichen ein einziges starkes Kriterium zur Verfügung, nämlich die sogenannte Reflexions-Positivität [75, 20]. Dieses Kriterium soll im folgenden Abschnitt zunächst für ein skalares Feld abgeleitet werden. Dies reicht für unsere Zwecke aus, weil wir die Untersuchung auf den skalaren Anteil des Propagators beschränken möchten.

11.8.1. Die Reflexions-Positivität als Eigenschaft zur Untersuchung der Unitarität

Die Reflexions-Positivität ist eine wichtige Eigenschaft, welche die Existenz einer analytischen Fortsetzung von euklidischen Propagatoren zum Minkowski-Raum gewährleistet und zwar so, dass die Theorie im Minkowski-Raum einen positiv semi-definiten hermiteschen Hamiltonoperator H und einen unitären Zeitentwicklungsoperator $\exp(-\mathrm{i}Ht)$ besitzt. Für eine euklidische Zwei-Punkt-Funktion ist die Bedingung der Reflexions-Positivität gegeben durch

$$\langle 0|\Theta(\phi(x_4, \mathbf{x}))\phi(x_4, \mathbf{x})|0\rangle \geq 0\,, \tag{11.50}$$

wobei $\phi(x_4, \mathbf{x})$ ein skalares Feld im Euklidischen ist und Θ: $\phi(x_4, \mathbf{x}) \mapsto \phi^\dagger(-x_4, \mathbf{x})$ die Reflexionsoperation. Mittels der Fourier-Zerlegung eines skalaren Feldoperators im Minkowski-Raum

$$\phi(x^0, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \Big\{ a_{\mathbf{p}} \exp(-\mathrm{i}(p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})) + a^\dagger_{\mathbf{p}} \exp(\mathrm{i}(p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})) \Big\} \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}\,, \tag{11.51a}$$

und im euklidischen Raum (nachdem die Reflexionsoperation ausgeführt wurde)

$$\phi^\dagger(-x_4,\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,\Big\{a^\dagger_\mathbf{p}\exp(\mathrm{i}(p_4x_4-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})) \\ +a_\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}(p_4x_4-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}))\Big\}\Big|_{p_4=-\mathrm{i}E_\mathbf{p}}\,, \tag{11.51b}$$

kann man die Bedingung der Reflexions-Positivität für einen skalaren euklidischen Propagator $S(p_4,\mathbf{p})$ herleiten. Diese lautet

$$\int \mathrm{d}^3p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_4\,\exp(-\mathrm{i}p_4x_4)S(p_4,\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^3p\,S(x_4,\mathbf{p}) \geq 0\,. \tag{11.52}$$

Dabei handelt es sich um die schwache Bedingung. Die stärkere Bedingung ist die für einen positiv semidefiniten Integranden

$$S(x_4,\mathbf{p}) \geq 0\,. \tag{11.53}$$

Wir werden sehen, dass letztere Bedingung (11.53) jedoch nicht unbedingt zur Gewährleistung der Unitarität erfüllt sein muss.

11.8.2. Der räumlich isotrope Fall

Nach einer Wick-Rotation erhält man den Propagator im euklidischen Raum, dessen skalarer Anteil analog zu Gl. 11.26 mit S bezeichnet wird:

$$S(x_4,\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k_4}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\exp(\mathrm{i}(k_4x_4+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}))S(k_4,\mathbf{k})\,. \tag{11.54}$$

Wir erinnern uns daran, dass unter der Wick-Rotation

$$x_4 = -\mathrm{i}x^0\,,\quad k_4 = -\mathrm{i}k^0\,,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k^0 \mapsto \mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_4\,, \tag{11.55}$$

gilt und somit ist $S(k_4,\mathbf{k})$ nach den Abschnitten 11.3.2 und 11.3.3 gegeben durch:

$$S(k_4,\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\left(k_4^2+\mathbf{k}^2\right)-\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}k_4^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)k_4^2+\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\mathbf{k}^2}\,. \tag{11.56}$$

Um die Reflexions-Positivität für den skalaren Anteil des Propagators zu zeigen, ist nach Gl. (11.52) der Ausdruck

$$S(x_4,\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_4 \, \exp(-\mathrm{i}k_4 x_4) S(k_4,\mathbf{k})\,, \tag{11.57}$$

zu untersuchen. Im Folgenden wird $S(x_4,\mathbf{k})$ und $S(x_4,\mathbf{x})$ abgeleitet und zwar für die beiden Fälle $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ und $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}^*$. Ausführliche Berechnungen werden in Anhang D.4.1 präsentiert und wir fassen hier die Ergebnisse zusammen. Im Falle $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ ergibt sich

$$S(x_4,\mathbf{k}) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \frac{1}{k} \exp(-|x_4|\mathcal{A}^{-1}k)\,, \tag{11.58a}$$

$$S(x_4) = \frac{4\pi^2}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \frac{\mathcal{A}^2}{x_4^2}\,, \tag{11.58b}$$

mit $\mathcal{A}$ aus Gl. (11.1). Es gilt also $S(x_4,\mathbf{x}) \geq 0$, was bedeutet, dass die schwache Bedingung (11.52) erfüllt ist. Das ist klar, denn auch die starke Bedingung (11.53) gilt. Somit ist für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ die Reflexions-Positivität im räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie gewährleistet.

Für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}^*$ ist die Situation anders. Hier gilt

$$S(x_4,\mathbf{k}) = -\frac{\pi}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2-1}} \frac{1}{k} \sin(|x_4|\widetilde{A}k)\,, \tag{11.59a}$$

$$S(x_4) = \frac{4\pi^3}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2-1}} \delta'(|x_4|\widetilde{\mathcal{A}})\,, \tag{11.59b}$$

mit

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}+1}{\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}-1}}\,. \tag{11.59c}$$

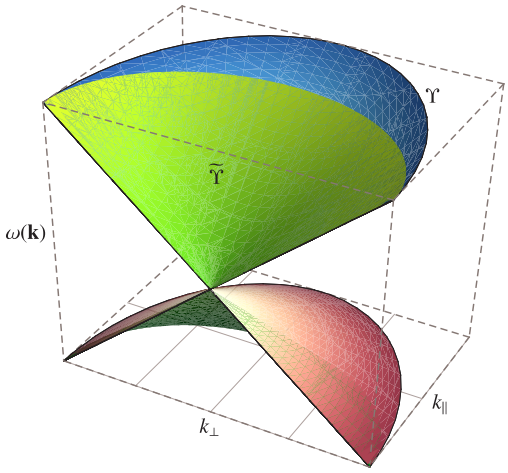
Somit ist die starke Bedingung (11.53) erfüllt für $|x_4|\widetilde{A}k \in (2k+1)[\pi,2\pi]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Die schwache Bedingung gilt für alle Punkte im euklidischen Raum bis auf die, welche auf dem Kegel $x = \widetilde{\mathcal{A}}|x_4|$ liegen. Das Ergebnis für diesen Parametersektor ist sehr sonderbar, jedoch kommt diesem Bereich sowieso keine physikalische Bedeutung zu, da die Frontgeschwindigkeit imaginär wird (siehe Abschnitt 11.2). Die Ergebnisse sollen aufgrund der Vollständigkeit erwähnt werden.

Damit ist die Unitarität für den physikalischen Parameterbereich $\mathscr{M}$ nach der Reflexions-Positivität gewährleistet. Als nächstes wollen wir die Mikrokausalität und Unitarität des räumlich anisotropen Falles mit einer ausgezeichneten Raumrichtung untersuchen.

Kapitel 12.

Anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung (Fall 2)

Wie wir bereits in Abschnitt 3.6 gesehen haben, wird der räumlich anisotrope Fall durch den Vierervektor $(\xi^\mu) = (0,0,0,1)^\intercal$ charakterisiert. Wir haben in der kompletten Untersuchung von Fall 1 in Kapitel 11 die Skalarprodukte $\xi^\alpha \xi_\alpha$ beibehalten mit dem Vorteil, dass sich jene Ergebnisse nun geschickt auf Fall 2 übertragen lassen.



In Abschnitt 3.6 hatten wir bereits die Dispersionsrelation für Fall 2 hergeleitet:

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{k_\perp^2 + \mathcal{B}^2 k_\parallel^2}\,, \quad \mathcal{B} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}}\,. \tag{12.1}$$

Auch hier beschreibt die Funktion $\omega(\mathbf{k})$ einen modifizierten Lichtkegel. Analog zu Fall 1 ist in der Abbildung nebenan Υ der Lichtkegel für $\widetilde{\kappa}_{33} = 0$, welcher dem der gewöhnlichen Maxwell-Theorie entspricht. Der modifizierte Lichtkegel $\widetilde{\Upsilon}$ ist in Richtung von $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)^\intercal$ gestaucht (für $\widetilde{\kappa}_{33} > 0$) bzw. gedehnt (für $\widetilde{\kappa}_{33} < 0$).

Die Massenschale ist dieses mal der Übersichtlichkeit halber nicht gezeigt. Ist der modifizierte Lichtkegel gestaucht, so schneidet die Massenschale diesen in Abhängigkeit vom Winkel θ zwischen $\mathbf{k}$ und $\boldsymbol{\xi}$. Der Impuls, ab dem dies geschieht, hängt damit im Gegensatz von Fall 1 zusätzlich von θ ab.

12.1. Phasen-, Gruppen-, und Frontgeschwindigkeit der Theorie

Aus der Dispersionsrelation in Gl. (12.1) ergibt sich direkt die Phasengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{ph}} &= \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} = \sqrt{1 - \frac{4\widetilde{\kappa}_{33}}{3 - 2\widetilde{\kappa}_{33}} \cos^2\theta} = \\ &= 1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\cos^2\theta - \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2(2\cos^2\theta + \cos^4\theta) + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\,, \end{aligned} \tag{12.2}$$

sowie die Gruppengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{\sqrt{k_\perp^2 + \mathcal{B}^2 k_\parallel^2}} \begin{pmatrix} k_\perp \\ 0 \\ \mathcal{B}^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta + (\widetilde{\kappa}_{33}/3)\sin\theta\cos^2\theta + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^2) \\ 0 \\ \cos\theta - (\widetilde{\kappa}_{33}/3)[2\sin^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta] + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^2) \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

mit dem Betrag

$$v_{\mathrm{gr}} = 1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\cos^2\theta + \frac{2}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2(\cos^4\theta + 6\sin^2\theta\cos^2\theta) + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{33}^3)\,. \tag{12.4}$$

Somit gilt $v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{gr}}$ in führender Ordnung des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters $\widetilde{\kappa}_{33}$, jedoch im Gegensatz zu Fall 1 nicht exakt. Eine Folge davon ist, dass ein Wellenpaket zerfließt, welches durch eine Überlagerung ebener Wellen zustande kommt. Sowohl v_{ph} als auch v_{gr} hängen von der Ausbreitungsrichtung der klassischen Welle ab, die über den Winkel θ charakterisiert ist. Beide sind ≤ 1 für $\widetilde{\kappa}_{33} \geq 0$ und > 1 für $\widetilde{\kappa}_{33} < 0$. Analog ist das auch für die Frontgeschwindigkeit $v_{\mathrm{fr}} = \lim_{|\mathbf{k}|\mapsto\infty} v_{\mathrm{ph}}$ der Fall.

Weiterhin können wir die Phasengeschwindigkeit einer Welle parallel bzw. senkrecht zum bevorzugten räumlichen Vektor $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)$ einführen:

$$v_{\mathrm{ph},\parallel} = \frac{\omega(k_\perp = 0, k_\parallel)}{k_\parallel} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}}\,, \quad v_{\mathrm{ph},\perp} = \frac{\omega(k_\perp, k_\parallel = 0)}{k_\perp} = 1\,. \tag{12.5}$$

Für diese gilt dann

$$v_{\mathrm{ph},\parallel} = v_{\mathrm{gr},\parallel} = v_{\mathrm{front},\parallel}\,, \quad v_{\mathrm{ph},\perp} = v_{\mathrm{gr},\perp} = v_{\mathrm{front},\perp}\,. \tag{12.6}$$

Elektromagnetische Wellen können für $\omega \neq 0$ propagieren. Somit ist dieser Bereich das für uns interessante Regime $\mathscr{M}$. Sofern $\omega \in \mathbb{C} \cup \{0\}$ ist, findet keine Ausbreitung elektromagnetischer Wellen statt. Infolgedessen ist das Regime mit $\omega^2 < 0$ für uns uninteressant und soll als $\mathscr{M}^*$ bezeichnet werden. Ob wir uns im physikalischen oder unphysikalischen Sektor befinden, hängt also im Gegensatz zum räumlich isotropen Fall nicht nur vom Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter ab, sondern zusätzlich vom räumlichen Wellenvektor $\mathbf{k}$:

$$\mathscr{M} = \left\{ (k_\parallel, k_\perp, \widetilde{\kappa}_{33}) \,\middle|\, \left(k_\perp = 0 \wedge -\frac{3}{2} < \widetilde{\kappa}_{33} \leq \frac{3}{2} \right) \vee \left(k_\perp \neq 0 \wedge k_\perp \geq |\mathcal{B} k_\parallel| \right) \right\}, \tag{12.7a}$$

$$\mathscr{M}^* = \left\{ (k_\parallel, k_\perp, \widetilde{\kappa}_{33}) \,\middle|\, \left(k_\perp = 0 \wedge \left[\widetilde{\kappa}_{33} < -\frac{3}{2} \vee \widetilde{\kappa}_{33} > \frac{3}{2} \right] \right) \right.$$
$$\left. \vee \left(k_\perp \neq 0 \wedge k_\perp < |\mathcal{B} k_\parallel| \right) \right\} . \tag{12.7b}$$

12.2. Verhalten des Feynman-Propagators bezüglich Wick-Rotation

Die Pole des skalaren Anteils des Propagators entsprechen den Nullstellen der Off-Shell-Dispersionsrelation und diese lauten im Minkowski-Raum

$$\frac{k_{0,\oplus}}{k_\perp} = \sqrt{1 + \frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_3^2}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_3^2} x^2} \,, \quad \frac{k_{0,\ominus}}{k_\perp} = -\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_3^2}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_3^2} x^2} \,, \tag{12.8}$$

und im euklidischen Raum[1]

$$\frac{k_{4,\oplus}}{k_\perp} = \mathrm{i}\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_{3,E}^2}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_{3,E}^2} x^2} \,, \quad \frac{k_{4,\ominus}}{k_\perp} = -\mathrm{i}\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_{3,E}^2}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\xi_{3,E}^2} x^2} \,, \tag{12.9}$$

mit $x \equiv k_\parallel / k_\perp$ und $\xi_3 = 1$. Die Indizes „$\oplus$“ und „$\ominus$“ beziehen sich auf das Plus- oder Minuszeichen vor der Quadratwurzel. Führt man eine Wick-Rotation durch und verwendet $k_4 = -\mathrm{i}k_0$, so sind die Ersetzungen

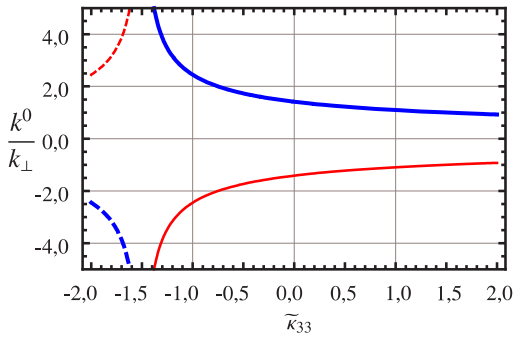
$$k_{4,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{33}) \to k_{0,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{33}) \,, \quad k_{4,\ominus}(\widetilde{\kappa}_{33}) \to k_{0,\oplus}(\widetilde{\kappa}_{33}) \,, \tag{12.10}$$

vorzunehmen. Die Nullstellen $k^0(\widetilde{\kappa}_{33})$ und $k_4(\widetilde{\kappa}_{33})$ werden in den Abb. 12.1(a) und 12.1(b) präsentiert. Im physikalisch sinnvollen Parameterbereich $\mathscr{M}$ verhält sich die Wick-Rotation analog zu Fall 1. Eine ähnliche Argumentation wie in Abschnitt 11.4.2 zeigt also, dass für $\widetilde{\kappa}_{33} \in \mathscr{M}$ eine analytische Fortsetzung des Propagators vom Minkowski-Raum zum euklidischen Raum bzw. umgekehrt möglich ist.

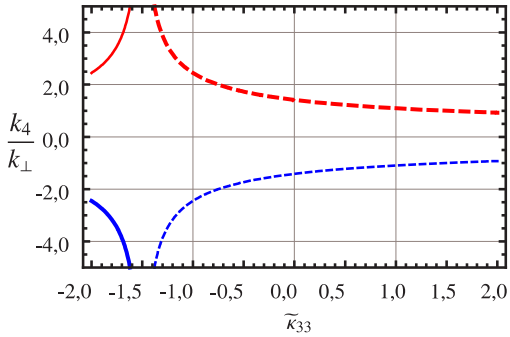
12.3. Der Propagator in verschiedenen Eichungen

Wegen der formalen Ähnlichkeit von Fall 1 und 2 besitzt der Propagator dieselbe kovariante Struktur wie in Gl. (11.17) (in axialer Eichung) bzw. in Gl. (11.20) (in R_ξ-Eichung). Der einzige Unterschied ist, dass der bevorzugte Vierervektor durch $(\xi^\mu) = (0,0,0,1)^\intercal$ und der Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$ durch $\widetilde{\kappa}_{33}$ ersetzt werden muss.

[1] mit $\xi_{3,E} = \xi_3$



(a) Nullstellen (12.8) der Off-Shell-Dispersionsrelation im Minkowski-Raum. Die Werte $x = 1$ und $\xi_3 = 1$, wobei letzterer Fall 2 entspricht, wurden für das Schaubild gewählt.



(b) Nullstellen (12.9) der Off-Shell-Dispersionsrelation im euklidischen Raum. Die Werte $x = 1$ und $\xi_{3,E} = 1$ für Fall 2 wurden für das Schaubild verwendet.

Abbildung 12.1.: Die dicken (blauen) Kurven stellen die Nullstellen mit positivem Vorzeichen, die dünnen (roten) Kurven die Nullstellen mit negativem Vorzeichen dar. Durchgezogene Kurven stehen für Realteile und gestrichene für Imaginärteile.

12.4. Die Kommutatoren der physikalischen Felder

Für die Fourier-Transformierte der räumlichen Komponenten des Kommutators von Vektorpotentialen $K^{\mu\nu}(x) = [A^\mu(x), A^\nu(0)]$ gilt $K^{ij} = \Pi^{ij}(\mathrm{i}D)$ mit der Polarisationssumme Π^{ij} analog zu Fall 1. Im Gegensatz zu letzterem verschwinden hier jedoch die zeitlichen Komponenten des Kommutators nicht. Direktes Nachrechnen liefert

$$K^{0i} = [A^0, A^i] = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\xi^j[A^j, A^i] = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\xi^j\Pi^{ji}(\mathrm{i}D(k))\,. \tag{12.11}$$

wobei sich Π^{ij} direkt aus dem Propagator aus Gl. (11.17) extrahieren lässt:[2]

$$\Pi^{ij} = -\delta^{ij} + (b+2c)k^ik^j + d\xi^i\xi^j + e(k^i\xi^j + \xi^ik^j)\,, \tag{12.12}$$

mit

$$b = -\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel^2}{k^2}\right), \quad c = \frac{1}{k^2}, \quad d = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}, \quad e = \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k^2}\,. \tag{12.13}$$

Einige algebraischen Umformungen, die in Abschnitt D.2.2 im Anhang ausführlich dokumentiert sind, führen schließlich auf

$$K^{0i}(k) = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel k_0}{k^2}\left(\xi^i - \frac{k_\parallel}{k^2}k^i\right)(\mathrm{i}D(k)) \equiv \mathcal{C}_1\left(\xi^i - \frac{k_\parallel}{k^2}k^i\right)(\mathrm{i}D(k))\,, \tag{12.14a}$$

[2]Hierbei ist Coulomb-Eichung zu verwenden, also $(n^\mu)^\intercal = (0, \mathbf{k})$.

$$K^{00} = \frac{\frac{16}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}\left(\frac{k_\perp k_\parallel}{k^2}\right)^2 (\mathrm{i}D(k)) \equiv \mathcal{C}_2(\mathrm{i}D(k))\,. \tag{12.14b}$$

Diese Gleichungen lassen sich verwenden, um die Kommutatoren der physikalischen Felder im Impulsraum herzuleiten, was ebenso in Abschnitt D.2.2 durchgeführt wird. Durch Fourier-Transformation gelangt man zu den entsprechenden Ausdrücken im Ortsraum:

$$[B_i(x), B_j(0)] = \Bigg\{ (d(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})^2 - (d-1)\boldsymbol{\nabla}^2)\delta_{ij} + (d-1)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + d\boldsymbol{\nabla}^2\xi_i\xi_j + d(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\left(\xi_j\frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Bigg\}(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{12.15a}$$

$$[E_i(x), B_j(0)] = \Bigg\{ \left(\varepsilon_{ijl}\frac{\partial}{\partial x_l} - \mathcal{C}_1\varepsilon_{jmn}\xi_n\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{jmn}\xi_n\left(e\frac{\partial}{\partial x_i} + d\xi_i\right)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_m}\Bigg\}(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{12.15b}$$

$$[E_i(x), E_j(0)] = \left\{\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - d\xi_i\xi_j\frac{\partial}{\partial t^2}\right\}(\mathrm{i}D(x))\,. \tag{12.15c}$$

Schließlich bleibt noch die Kommutatorfunktion $D(x)$ auszuwerten:

$$D(x) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)(k_0^2-k_\perp^2) - \left(1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)k_\parallel^2}\exp(\mathrm{i}k_0x_0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,. \tag{12.16}$$

Das Ergebnis der Berechnung, die in Anhang D.3.2 ausführlich präsentiert wird, lautet:

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}}}\,\mathrm{sign}(\widetilde{x}_0)\delta\left(x_0^2 - x_\perp^2 - \frac{x_\parallel^2}{\mathcal{B}^2}\right)\,. \tag{12.17}$$

12.5. Reflexions-Positivität

Da die Berechnung hier analog zu Fall 1 funktioniert, was in der formalen Ähnlichkeit der beiden Fälle begründet liegt, sollen hier nur die wichtigsten Schritte dargestellt werden. Der skalare Anteil des euklidischen Propagators lautet

$$S(k_4,\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)(k_4^2+\mathbf{k}^2) - \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}k_3^2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\,\frac{1}{k_4^2 + k_\perp^2 + \mathcal{B}^2k_\parallel^2}\,. \tag{12.18}$$

mit $\mathcal{B}$ aus Gl. (12.1). An dieser Stelle kommen wir zur Auswertung der starken Reflexions-Positivitätsbedingung (11.53). Mit

$$\omega^2 = k_\perp^2 + \mathcal{B}^2k_\parallel^2\,, \tag{12.19}$$

erhalten wir

$$S(x_4,\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_4\, \exp(\mathrm{i}k_4x_4) S(k_4,\mathbf{k}) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_4\, \frac{\exp(\mathrm{i}k_4x_4)}{k_4^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{2}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}k_4\, \frac{\cos(k_4x_4)}{k_4^2+\omega^2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \frac{\pi}{\omega} \exp(-|x_4|\omega)\,, \tag{12.20}$$

für $\mathrm{Re}(\omega) > 0$. Somit ist für $(k_\parallel, k_\perp, \widetilde{\kappa}_{33}) \in \mathscr{M}$ die starke Bedingung $S(x_4,\mathbf{k}) > 0$ wegen $\omega > 0$ definitiv erfüllt. Wir können uns zusätzlich die schwache Bedingung (11.52) anschauen. Wir führen dazu die Integration über den räumlichen Impuls mittels Zylinderkoordinaten durch:

$$S(x_4) = \int \mathrm{d}^3k\, S(x_4,\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_\parallel \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}k_\perp\, k_\perp \frac{\exp\left(-|x_4|\sqrt{k_\perp^2+\mathcal{B}^2k_\parallel^2}\right)}{\sqrt{k_\perp^2+\mathcal{B}^2k_\parallel^2}} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \frac{1}{\mathcal{B}x_4^2} > 0\,. \tag{12.21}$$

Somit ist auch die schwache Reflexions-Positivitätsbedingung erfüllt, was zu erwarten war.

Kapitel 13.

Anisotroper Fall mit zwei Raumzeit-Richtungen (Fall 3)

Dieser Fall ist durch folgenden Ansatz charakterisiert (siehe Abschnitt 3.7):

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\xi^\mu\zeta^\nu + \zeta^\mu\xi^\nu) - \eta^{\mu\nu}\frac{\xi^\varrho\zeta_\varrho}{4}\,, \quad (\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\kappa}^{01} & \widetilde{\kappa}^{02} & \widetilde{\kappa}^{03} \\ \widetilde{\kappa}^{01} & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\kappa}^{02} & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\kappa}^{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.1}$$

wobei ξ^μ und ζ^μ zwei ausgezeichnete Richtungen der Raumzeit sind, die auf folgende Form gebracht werden können:

$$(\xi^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\zeta^\mu) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\kappa}^{01} \\ \widetilde{\kappa}^{02} \\ \widetilde{\kappa}^{03} \end{pmatrix}. \tag{13.2}$$

Offensichtlich stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander: $\xi^\mu\zeta_\mu = 0$. In der obigen Darstellung besitzt der erste Vektor keine räumlichen Komponenten, während der zweite eine bevorzuge räumliche Richtung auszeichnet. Der dreidimensionale Parameterraum wird durch die Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter $\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$ und $\widetilde{\kappa}^{03}$ aufgespannt. Nach den Ersetzungen aus [70], also $\widetilde{\kappa}^{01} = -(\widetilde{\kappa}_{\mathrm{o}+})^{(23)}$, $\widetilde{\kappa}^{02} = -(\widetilde{\kappa}_{\mathrm{o}+})^{(31)}$ und $\widetilde{\kappa}^{03} = -(\widetilde{\kappa}_{\mathrm{o}+})^{(12)}$, handelt es sich hierbei um den paritätsverletzenden Fall des nicht-doppelbrechenden Anteils der modifizierten Maxwell-Theorie.[1]

Fall 3 unterscheidet sich formal grundlegend von den zuvor besprochenen Fällen 1 und 2 in den Kapiteln 11 bzw. 12, da dieser nicht nur durch einen, sondern durch zwei Vierervektoren beschrieben wird, nämlich durch einen zeitartigen und einen raumartigen. Damit weist Fall 3 eine kompliziertere Struktur auf und man kann annehmen, dass sich ebenso das kausale Verhalten stark von dem der vorherigen Fälle unterscheidet.

[1] zum paritätsverletzenden nicht-doppelbrechenden Sektor siehe beispielsweise [24]

13.1. Die Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit der Theorie

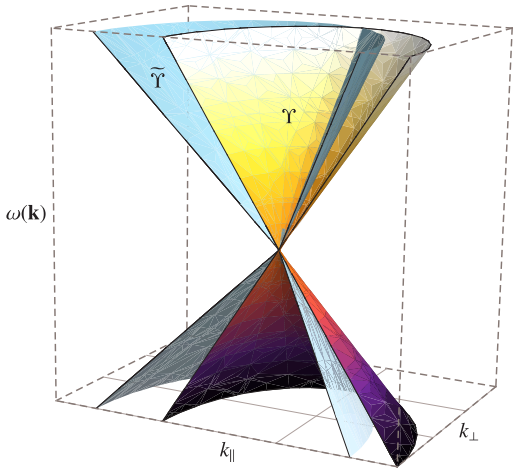
Bevor weitere Untersuchungen möglich sind, muss zunächst die Dispersionsrelation bestimmt werden. Aus den modifizierten Maxwell-Gleichungen ergibt sich

$$M^{ij}E^j = 0\,, \quad M^{ij} = -\delta^{ij}(k^\alpha k_\alpha) - k^i k^j - 2\kappa^{i\beta\gamma j}k_\beta k_\gamma\,, \tag{13.3}$$

mit dem elektrischen Feldvektor $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$. Nichttriviale Lösungen dieser Gleichung gibt es genau dann, wenn die Sekulärdeterminante verschwindet: $\det(M) = 0$. Diese Bedingung führt auf die Dispersionsrelation. Anders als in den vorherigen Fällen liefert sie jedoch zusätzliche Dispersionsrelationen der unphysikalischen Freiheitsgrade, beispielsweise der longitudinalen Polarisation des **E**-Feldes. Um zu entscheiden, ob eine Dispersionsrelation einem physikalischen Freiheitsgrad entspricht oder nicht, kann man ein Koordinatensystem wählen, in welchem sich die elektromagnetische Welle in z-Richtung ausbreitet, also sei $\mathbf{k} = (0, 0, k)^\intercal$ mit $k = |\mathbf{k}|$. Dann ist der longitudinale Freiheitsgrad des **E**-Feldes der mit $E_3 \neq 0$. Somit besteht die Möglichkeit, das modifizierte Coulomb-Gesetz $k^i M^{ij} E^j = 0$ nach E_3 aufzulösen und E_3 im Ampèreschen Gesetz 13.3 zu eliminieren. Das führt auf ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Aus der Determinantenbedingung dieses Systems ergibt sich die Dispersionsrelation der physikalischen Freiheitsgrade:

$$\omega(\mathbf{k}) = \widetilde{\kappa}^{01}k_1 + \widetilde{\kappa}^{02}k_2 + \widetilde{\kappa}^{03}k_3 + \sqrt{k^2 + (\widetilde{\kappa}^{01}k_1 + \widetilde{\kappa}^{02}k_2 + \widetilde{\kappa}^{03}k_3)^2}\,. \tag{13.4}$$

Zusätzlich tritt eine zweite Lösung mit einem Minuszeichen vor der Quadratwurzel auf. Diese muss jedoch ausgeschlossen werden, da sie negative Frequenzen liefert. Beide Lösungen sind doppelte Nullstellen der Determinantenbedingung.



Der modifizierte Lichtkegel $\widetilde{\Upsilon}$ für Fall 3 ist in der linken Abbildung gezeigt. Dieser ist in Abhängigkeit von den Parametern $\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$ und $\widetilde{\kappa}^{03}$ gestaucht; zusätzlich steht dessen Mittelachse (im Gegensatz zu den Fällen 1 und 2) nicht senkrecht auf der $k_\perp$-$k_\parallel$-Ebene. Damit schneidet er den Lichtkegel Υ der gewöhnlichen Maxwell-Theorie.

Um die Dispersionsrelation kompakter zu schreiben[2], ist es geschickt, Komponenten des Wellenvektors **k** zu definieren, welche parallel oder senkrecht zu einem der bevorzugten Hintergrundvektoren liegen. Nur der Vektor ζ^μ besitzt räumliche Komponenten. Somit dient dieser

[2] was sich auch zur Berechnung von Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit als nützlich erweisen wird

unseren Zwecken. Sei $\widehat{\zeta}$ der Einheitsvektor bezüglich der räumlichen Richtung von ζ^μ:

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2}} \begin{pmatrix} \widetilde{\kappa}^{01} \\ \widetilde{\kappa}^{02} \\ \widetilde{\kappa}^{03} \end{pmatrix} . \tag{13.5}$$

und zusätzlich definieren wir

$$k_\parallel = \mathbf{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{\zeta}} , \quad k_\perp = |\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \widehat{\boldsymbol{\zeta}})\widehat{\boldsymbol{\zeta}}| . \tag{13.6}$$

Damit lässt sich die Dispersionsrelation auf folgende Art und Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \omega(k_\perp, k_\parallel) &= \sqrt{(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2}\, k_\parallel + \sqrt{k_\perp^2 + (1 + (\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2) k_\parallel^2} \equiv \\ &\equiv \mathcal{C} k_\parallel + \sqrt{k_\perp^2 + (1 + \mathcal{C}^2) k_\parallel^2} , \quad \mathcal{C} = \sqrt{(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2} . \end{aligned} \tag{13.7}$$

Nun kommen wir zur Berechnung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit und führen eine Taylorentwicklung für kleine $\mathcal{C}$ durch:

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \mathcal{C} \cos\theta + \sqrt{1 + \mathcal{C}^2 \cos^2\theta} = 1 + \mathcal{C} \cos\theta + \frac{\mathcal{C}^2}{2} \cos^2\theta + \mathcal{O}(\mathcal{C}^3) , \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathrm{gr}} &= \frac{1}{\sqrt{k_\perp^2 + (1 + \mathcal{C}^2) k_\parallel^2}} \left(\frac{k_\perp}{\mathcal{C} \sqrt{k_\perp^2 + (1 + \mathcal{C}^2) k_\parallel^2}} + (1 + \mathcal{C}^2) k_\parallel \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \sin\theta - (\mathcal{C}^2/2) \sin\theta \cos^2\theta + \mathcal{O}(\mathcal{C}^3) \\ \cos\theta + \mathcal{C} + (\mathcal{C}^2/2)[\cos^3\theta + 2\sin^2\theta \cos\theta] + \mathcal{O}(\mathcal{C}^3) \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{13.9}$$

$$v_{\mathrm{gr}} = 1 + \mathcal{C} \cos\theta + \frac{\mathcal{C}^2}{2} + \mathcal{O}(\mathcal{C}^3) . \tag{13.10}$$

Hierbei ist θ der Winkel, welcher von den Vektoren $\mathbf{k}$ und $\boldsymbol{\zeta}$ eingeschlossen wird. Es ist ersichtlich, dass in führender Ordnung des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters $v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{gr}}$ gilt analog zu Fall 2. Auch hier hängt v_{ph} und infolgedessen ebenso die Frontgeschwindigkeit $v_{\mathrm{fr}} = \lim_{|\mathbf{k}| \mapsto \infty} v_{\mathrm{ph}}$ von der Ausbreitungsrichtung der klassischen Welle ab. Dabei gilt (für $\mathcal{C} \ll 1$):

$$v_{\mathrm{fr}} \begin{cases} < 1 & \text{für} \quad \pi/2 < \theta < 3\pi/2 , \\ \geq 1 & \text{für} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \vee 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi . \end{cases} \tag{13.11}$$

Dieses Verhalten unterscheidet sich sehr von dem der vorher untersuchten Fälle. Die Tatsache, ob $v_{\mathrm{fr}} \leq 1$ oder > 1 ist, hängt wegen $\mathcal{C} > 0$ (sofern mindestens einer der Parameter $\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$, $\widetilde{\kappa}^{03}$ ungleich null ist) nicht von den Lorentzsymmetrie-verletzenden Parametern ab,[3] sondern nur von der Ausbreitungsrichtung der klassischen Welle. Somit sind die Eigenschaften der

[3] sofern $\mathcal{C}$ genügend klein ist

Frontgeschwindigkeit ziemlich bizarr und es lässt sich an dieser Stelle schon ein grundlegend verschiedenes Verhalten bezüglich der Mikrokausalität bzw. Unitarität im Vergleich zu den bisherigen Fällen 1 und 2 erwarten.

Der Vollständigkeit halber geben wir die Phasengeschwindigkeit für die Propagation parallel und senkrecht zu $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}$ an:

$$v_{\mathrm{ph},\parallel} = \frac{\omega(k_\perp = 0, k_\parallel)}{k_\parallel} = \mathcal{C}\,\mathrm{sgn}(k_\parallel) + \sqrt{1+\mathcal{C}^2}\,, \tag{13.12a}$$

$$v_{\mathrm{ph},\perp} = \frac{\omega(k_\perp, k_\parallel = 0)}{k_\perp} = 1\,, \tag{13.12b}$$

wobei $\mathrm{sign}(x)$ die Vorzeichen-Funktion ist:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \\ -1 & \text{for} \quad x < 0 \end{cases}\,. \tag{13.13}$$

13.2. Der Propagator in axialer Eichung

Wir berechnen den Propagator in axialer Eichung, also mittels des Eichfixierungsterms

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\chi}(n_\mu A^\mu(x))^2\,, \tag{13.14}$$

mit einem Vierervektor n^μ und dem Eichfixierungsparameter χ. Da es nun zwei ausgezeichnete Richtungen ξ^μ und ζ^μ in der Raumzeit gibt, müssen wir den folgenden erweiterten Ansatz für den Propagator machen:

$$\begin{aligned} G_{\nu\sigma} = \{ & a\eta_{\nu\sigma} + bk_\nu k_\sigma + c(k_\nu n_\sigma + n_\nu k_\sigma) + d\xi_\nu\xi_\sigma \\ & + e(k_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu k_\sigma) + fn_\nu n_\sigma + g(n_\nu\xi_\sigma + \xi_\nu n_\sigma) + h\zeta_\nu\zeta_\sigma \\ & + i(k_\nu\zeta_\sigma + \zeta_\nu k_\sigma) + j(n_\nu\zeta_\sigma + \zeta_\nu n_\sigma) + l(\xi_\nu\zeta_\sigma + \zeta_\nu\xi_\sigma)\}K\,. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Die skalaren Funktionen $a = a(k^0, \mathbf{k})$, …, $l = l(k^0, \mathbf{k})$ und $K = K(k^0, \mathbf{k})$ ergeben sich aus dem Gleichungssystem $(G^{-1})^{\mu\nu}G_{\nu\sigma} = -\delta^\mu{}_\sigma$. Skalarprodukte $\xi^\alpha\xi_\alpha$ und $\xi^\alpha\zeta_\alpha$ werden beibehalten, obwohl das erste gleich eins und das zweite gleich null ist (mit der Wahl (13.2)), um eine bessere Einsicht in die kovariante Struktur der Funktionen zu gewinnen. Weiterhin wurde die spezielle Form der Vierervektoren in Gl. (13.2) nicht verwendet, um den Propagator herzuleiten, sondern nur der Ansatz (13.1). Der Einfachheit halber benutzen wir hier die kürzere Schreibweise $a\cdot b = a^\mu b_\mu$ für das Minkowski-Skalarprodukt zweier Vierervektoren a^μ und b^μ, um das Endergebnis anzugeben:

$$K = \frac{2}{2(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta) + k^2\{2 - (\xi\cdot\zeta)\}}\,, \tag{13.16a}$$

$$a = 1\,, \tag{13.16b}$$

$$b = \frac{\Upsilon}{(k\cdot n)^2\{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)\}} + \chi\frac{2(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+k^2(2-\xi\cdot\zeta)}{2(k\cdot n)^2}\,, \tag{13.16c}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon = {}& -2(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)(2n^2-(n\cdot\xi)(n\cdot\zeta))+(k\cdot\zeta)^2((n\cdot\xi)^2-n^2\xi^2)\\ & +(k\cdot\xi)^2((n\cdot\zeta)^2-n^2\zeta^2)+k^2(4(n\cdot\xi)(n\cdot\zeta)-\xi^2(n\cdot\zeta)^2\\ & -\zeta^2(n\cdot\xi)^2-n^2(4-\xi^2\zeta^2)\,,\end{aligned}$$

$$c = -\frac{1}{k\cdot n}\,, \tag{13.16d}$$

$$d = \frac{-(k\cdot\zeta)^2+k^2\zeta^2}{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)}\,, \tag{13.16e}$$

$$e = \frac{(k\cdot\zeta)^2(n\cdot\xi)+2k^2(n\cdot\zeta)+(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)(n\cdot\zeta)-k^2\zeta^2(n\cdot\xi)}{k\cdot n\{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)\}}\,, \tag{13.16f}$$

$$h = \frac{-(k\cdot\xi)^2+k^2\xi^2}{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)}\,, \tag{13.16g}$$

$$i = \frac{k\cdot\xi\{(k\cdot\zeta)(n\cdot\xi)+(k\cdot\xi)(n\cdot\zeta)\}+k^2\{2n\cdot\xi-\xi^2(n\cdot\zeta)\}}{k\cdot n\{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)\}}\,, \tag{13.16h}$$

$$l = -\frac{2k^2+(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)}{4(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+\xi^2(k\cdot\zeta)^2+\zeta^2(k\cdot\xi)^2+k^2(4-\xi^2\zeta^2)}\,, \tag{13.16i}$$

$$f = 0\,,\quad g = 0\,,\quad j = 0\,. \tag{13.16j}$$

Aus der Gleichung $K(\omega,\mathbf{k})^{-1} = 0$, also

$$2(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+k^2\{2-(\xi\cdot\zeta)\} = 0\,, \tag{13.17}$$

ergibt sich erneut die Dispersionsrelation (13.4), was eine sehr gute Kontrolle für das Ergebnis darstellt, da beide Rechnungen voneinander unabhängig sind. Der Propagator in R_ξ-Eichung ergibt sich aus Gl. (13.16) mit der Ersetzung $n^\mu \mapsto k^\mu$, deshalb soll dieses Ergebnis hier nicht zusätzlich angegeben werden.

13.3. Verhalten des Feynman-Propagators unter Wick-Rotation

An dieser Stelle schauen wir uns noch den Verlauf der Dispersionsrelation in Abhängigkeit von $\mathcal{C}$ (definiert in Gl. (13.7)) an. Der Vollständigkeit halber betrachten wir auch die zweite Lösung,

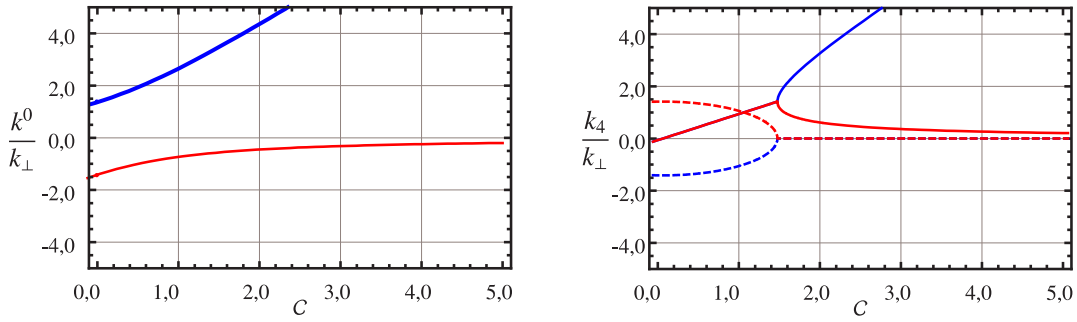
die physikalisch bedeutungslos ist. Im Minkowski-Raum gilt

$$\frac{(k^0)^{(1)}}{k_\perp} = \mathcal{C}\xi_0 x + \sqrt{1+(1+\mathcal{C}^2\xi_0^2)x^2}\,, \quad \frac{(k^0)^{(2)}}{k_\perp} = \mathcal{C}\xi_0 x - \sqrt{1+(1+\mathcal{C}^2\xi_0^2)x^2}\,, \tag{13.18}$$

bzw. im euklidischen Raum

$$\frac{(k_4)^{(1)}}{k_\perp} = \mathcal{C}\xi_4 x - \mathrm{i}\sqrt{1+(1-\mathcal{C}^2\xi_4^2)x^2}\,, \quad \frac{(k_4)^{(2)}}{k_\perp} = \mathcal{C}\xi_4 x + \mathrm{i}\sqrt{1+(1-\mathcal{C}^2\xi_4^2)x^2}\,, \tag{13.19}$$

mit $x = k_\parallel/k_\perp$, $k_4 = -\mathrm{i}k_0$ und $\xi_4 = 1$. Eine Wick-Rotation führt dazu, dass $(k^0)^{(1)}$ in $(k_4)^{(1)}$



(a) Nullstellen (13.18) der Dispersionsrelation im Minkowski-Raum. Die Werte $x = 1$ und $\xi_0 = 1$ wurden für das Schaubild gewählt.

(b) Nullstellen (13.19) der Dispersionsrelation im euklidischen Raum. Die Werte $x = 1$ und $\xi_4 = 1$ wurden für das Schaubild verwendet.

Abbildung 13.1.: Die dicken (blauen) Kurven stellen jeweils die ersten der beiden Nullstellen aus Gl. (13.18) bzw. Gl. (13.19) dar und die dünnen (roten) Kurven die zweiten. Durchgezogene Kurven stehen für Realteile und gestrichene für Imaginärteile.

bzw. $(k^0)^{(2)}$ in $(k_4)^{(2)}$ übergeht. Analog zur Argumentation in Abschnitt 11.4.2 überstreichen die Pole die Wick-rotierte Achse nicht und die Wick-Rotation ist somit möglich.

13.4. Reflexions-Positivität

In diesem Abschnitt soll die Unitarität mittels der Reflexions-Positivität untersucht werden. Ausgangspunkt ist die Propagatorfunktion im euklidischen Raum

$$\begin{aligned} S(k_4,\mathbf{k}) &= \frac{1}{k_E^2 - (k_E\cdot\xi_E)(k_E\cdot\zeta_E)} = \frac{1}{k_4^2+k_\perp^2+k_\parallel^2-2\mathcal{C}k_4k_\parallel} = \\ &= \frac{1}{(k_4-\mathcal{C}k_\parallel)^2+k_\perp^2+k_\parallel^2(1-\mathcal{C}^2)}\,. \end{aligned} \tag{13.20}$$

Mit dem Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\exp(\mathrm{i}xc)}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{|b|} \exp\{c[\mathrm{i}a - |b|\mathrm{sign}(c)]\}\,, \quad a,\, c \in \mathbb{R}\,, \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{13.21}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} S(x_4, \mathbf{k}) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_4 \, \exp(\mathrm{i}k_4 x_4) S(k_4, \mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_4 \, \frac{\exp(\mathrm{i}k_4 x_4)}{(k_4 - \mathcal{C}k_\parallel)^2 + k_\perp^2 + k_\parallel^2(1-\mathcal{C}^2)} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{k_\perp^2 + k_\parallel^2(1-\mathcal{C}^2)}} \exp\left\{x_4[\mathrm{i}\mathcal{C}k_\parallel - \sqrt{k_\perp^2 + k_\parallel^2(1-\mathcal{C}^2)}\mathrm{sign}(x_4)]\right\}\,. \end{aligned} \tag{13.22}$$

Wegen $S(x_4, \mathbf{k}) \in \mathbb{C}$ ist also bereits die starke Bedingung der Reflexions-Positivität für $\mathcal{C} > 0$ verletzt, sofern mindestens einer der Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter $\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$ und $\widetilde{\kappa}^{03}$ ungleich null ist. Der Grund dafür liegt in der Asymmetrie der Pole des Propagators bezüglich der imaginären Achse in der komplexen k^0-Ebene.

Anschließend untersuchen wir noch die schwache Bedingung der Reflexions-Positivität. Dafür erweist es sich als geschickt, die x_4-Abhängigkeit über die Ersetzungen $k'_\perp \equiv k_\perp x_4$ und $k'_\parallel \equiv k_\parallel x_4$ wegzuskalieren:

$$S(x_4, \mathbf{k}) = |x_4| S'(k'_\perp, k'_\parallel)\,, \tag{13.23a}$$

$$S'(k'_\perp, k'_\parallel) = \frac{\pi}{\sqrt{k_\perp'^2 + k_\parallel'^2(1-\mathcal{C}^2)}} \exp\left\{\mathrm{i}\mathcal{C}k'_\parallel - \sqrt{k_\perp'^2 + k_\parallel'^2(1-\mathcal{C}^2)}\right\}\,. \tag{13.23b}$$

Somit beschränkt sich die x_4-Abhängigkeit von $S(x_4, \mathbf{k})$ auf einen multiplikativen Vorfaktor $|x_4|$. Die schwache Reflexions-Positivität überprüfen wir durch zusätzliche Integration über den räumlichen Impuls:

$$S(x_4, \mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3k' \, S(x_4, \mathbf{k}') = 2\pi|x_4| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k'_\parallel \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k'_\perp \, k'_\perp S'(k'_\perp, k'_\parallel) \tag{13.24}$$

Die Integration über $k'_\perp$ lässt sich sofort ausführen:

$$S(x_4, \mathbf{x}) = 2\pi^2|x_4| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k'_\parallel \, \exp\left(\mathrm{i}\mathcal{C}k'_\parallel - \sqrt{1-\mathcal{C}^2}|k'_\parallel|\right)\,. \tag{13.25}$$

Die abschließende Integration über $k'_\parallel$ führt dann auf:

$$S(x_4, \mathbf{x}) = 4\pi^2|x_4| \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k'_\parallel \, \exp\left(-\sqrt{1-\mathcal{C}^2}k'_\parallel\right) \cos(\mathcal{C}k'_\parallel) = 4\pi^2|x_4|\sqrt{1-\mathcal{C}^2}\,. \tag{13.26}$$

Somit ist die Bedingung der schwachen Reflexions-Positivität erfüllt, sofern $\mathcal{C} \leq 1$ ist, wenn also die Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter genügend klein sind. Letzteres ist sowieso der physikalisch interessante Fall, da Parameter in der Größenordnung von eins experimentell ausgeschlossen sind. Nach der schwachen Bedingung sieht es also so aus, dass die Unitarität auch für diesen Fall gewährleistet ist. Der Grund, warum die starke Bedingung verletzt ist, während die schwache gilt, könnte die Beschränkung auf den skalaren Anteil des Propagators sein. Möglicherweise reicht also für diesen Fall die Analyse des skalaren Teils des Propagators nicht aus, um eine sichere Aussage über die Unitarität zu treffen.

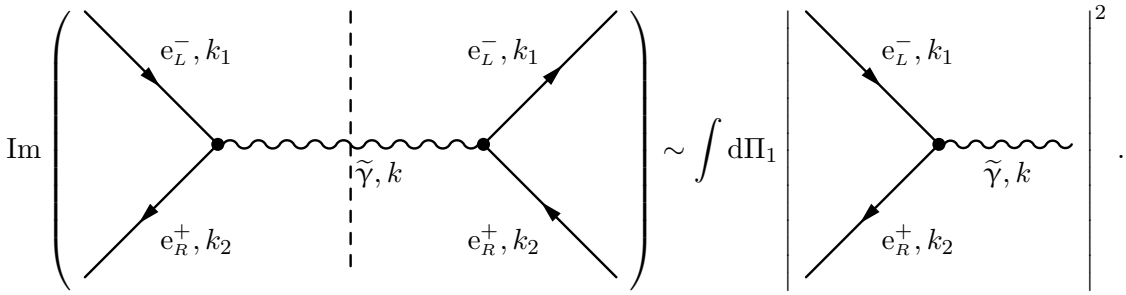
13.5. Untersuchung der Unitarität mittels des optischen Theorems

13.5.1. Vorbetrachtungen für Fall 1

Da die Bedingung der Reflexions-Positivität für den skalaren Anteil des Propagators zur Überprüfung der Unitarität nicht genügt, gibt es zwei Möglichkeiten fortzufahren. Die erste beinhaltet die Untersuchung der Reflexions-Positivität des vollen Propagators und die zweite das Studium physikalischer Prozesse mit modifizierten Photonen, eventuell auch unter Verwendung des optischen Theorems. Wir entscheiden uns an dieser Stelle für das letztere Vorgehen. Da das optische Theorem eine direkte Folge der Unitarität der S-Matrix ist, ist es vielversprechend, dessen Gültigkeit zu überprüfen.

Fall 3 ist paritätsverletzend. Es ist also klug, Beispiele zu betrachten, in denen nicht über die Spins und Polarisationen der ein- bzw. auslaufenden Teilchen summiert wird. Dadurch könnten sich nämlich mögliche wichtige Hinweise auf eine Verletzung der Unitarität herausmitteln. Es werden also bestimmte Polarisationszustände der Teilchen betrachtet, wobei wir für die Chiralität der Spinoren die Konventionen aus [80] verwenden. Obwohl es um Fall 3 geht, wollen wir dennoch die folgenden Berechnungen exemplarisch zunächst für Fall 1 durchführen. Es wird sich herausstellen, dass sich diese problemlos auf Fall 3 übertragen lassen.

Als erstes schauen wir uns die Paarvernichtung eines linkshändigen Elektrons und eines rechtshändigen Positrons an. Die Vorwärtsstreuamplitude ist über das optische Theorem verknüpft mit dem totalen Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines modifizierten Photons aus einem linkshändigen Elektron und einem rechtshändigen Positron:



(13.27)

Hierbei ist $\mathrm{d}\Pi_1$ das Ein-Teilchen-Phasenraumelement des modifizierten Photons im Endzustand. Wir betrachten masselose Fermionen. Nur unter dieser Bedingung ist nämlich die Helizität der Teilchen ein physikalisch wohldefinierter Zustand, da dieser nicht vom Bezugssystem abhängt. Nur dann kann experimentell von polarisierten Elektronen bzw. Positronen gesprochen werden in dem Sinne, dass die Spineinstellung bezüglich des Impulses der Teilchen klar festgelegt ist. Im Falle massiver Fermionen entspricht die Chiralität nicht der Helizität und links- (bzw. rechtshändige) Teilchen enthalten sowohl Anteile mit parallel und antiparallel eingestellter Spinrichtung bezüglich des Impulses. Die Annahme masseloser Teilchen führt dazu, dass der Axialvektorstrom erhalten ist, also $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ mit $j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$. Dann können wir verwenden, dass $k_\mu j^\mu(k) = 0$ ist, wenn ein Photon mit Impuls k_μ an den erhaltenen Strom j^μ koppelt.

Die Vorwärtsstreuamplitude ist also gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= e^2 \overline{u}_{_L}(k_1)\gamma^\nu v_{_R}(k_2)\overline{v}_{_R}(k_2)\gamma^\mu u_{_L}(k_1) \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{K^{-1} + \mathrm{i}\epsilon}(\eta_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + c\xi_\mu\xi_\nu + d(k_\mu\xi_\nu + \xi_\mu k_\nu)) = \\
&= e^2 \overline{u}(k_1)\frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}\gamma^\nu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}v(k_2)\overline{v}(k_2)\frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}\gamma^\mu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}u(k_1) \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{K^{-1} + \mathrm{i}\epsilon}(\eta_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + c\xi_\mu\xi_\nu + d(k_\mu\xi_\nu + \xi_\mu k_\nu)) = \\
&= e^2 \overline{u}(k_1)\gamma^\nu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma^\mu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}u(k_1) \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{K^{-1} + \mathrm{i}\epsilon}(\eta_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + c\xi_\mu\xi_\nu + d(k_\mu\xi_\nu + \xi_\mu k_\nu))\,, \qquad (13.28)
\end{aligned}$$

mit dem modifizierten Photonpropagator von Fall 1, also K, b, c und d aus Gl. (11.20).

An dieser Stelle ist es geschickt, eine vierdimensionale Integration über den Vierimpuls k^μ des virtuellen Photons einzuführen und diese mittels einer δ-Funktion aufzuheben:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\mathcal{M} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\mathcal{M} = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\,e^2\overline{u}(k_1)\gamma^\nu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}v(k_2) \\
&\qquad\qquad \times \overline{v}(k_2)\gamma^\mu\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}u(k_1)\frac{1}{N}\frac{\eta_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + c\xi_\mu\xi_\nu + d(k_\mu\xi_\nu + \xi_\mu k_\nu)}{(k^0 - \mathcal{A}|\mathbf{k}| + \mathrm{i}\epsilon)(k^0 + \mathcal{A}|\mathbf{k}| - \mathrm{i}\epsilon)}\,, \qquad (13.29a)
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\,, \quad \mathcal{A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,. \qquad (13.29b)$$

Für die Integration über k^0 ist die Polstruktur des Photonpropagators relevant. Die Pole sind gegeben durch $k^0 = \mathcal{A}\mathbf{k} - \mathrm{i}\epsilon$ bzw. $k^0 = \mathcal{A}\mathbf{k} + \mathrm{i}\epsilon$. Die Integration entlang der reellen k^0-Achse wird

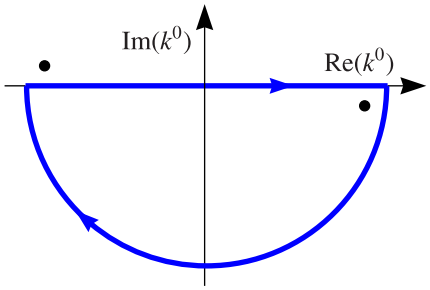


Abbildung 13.2.: Lage der Pole des Propagators mit der geschlossenen Integrationskontur.

auf die komplette komplexe k^0-Ebene erweitert, indem wir eine geschlossene Kontur wählen, wie in Abb. 13.2 dargestellt. Dies ist möglich entweder über einen Halbkreis über die untere oder über die obere komplexe Halbebene. Je nachdem liefert ein Residuum eines der beiden Pole einen Beitrag, abhängig davon, ob die Kontur oben oder unten herum geschlossen wird. Infolge der Integration wird das virtuelle Photon auf die Massenschale gesetzt, es wird also zu einem äußeren reellen Teilchen. Aus physikalischen Gründen ist es somit ausgeschlossen, die Kontur oben herum zu schließen, weil dann die Frequenz des Photons als negativ festgelegt werden würde. Außerdem wäre dies aufgrund der Energieerhaltung $k^0 = k_1^0 + k_2^0$ – also durch die eingeführte δ-Funktion – verboten. Damit erhalten wir dann für den Imaginärteil über den Residuensatz mit

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(k^0 - \mathcal{A}|\mathbf{k}|)(k^0 + \mathcal{A}|\mathbf{k}|)}\right]_{k^0=\omega} = \frac{1}{2\mathcal{A}|\mathbf{k}|} = \frac{1}{2\omega}\,, \tag{13.30}$$

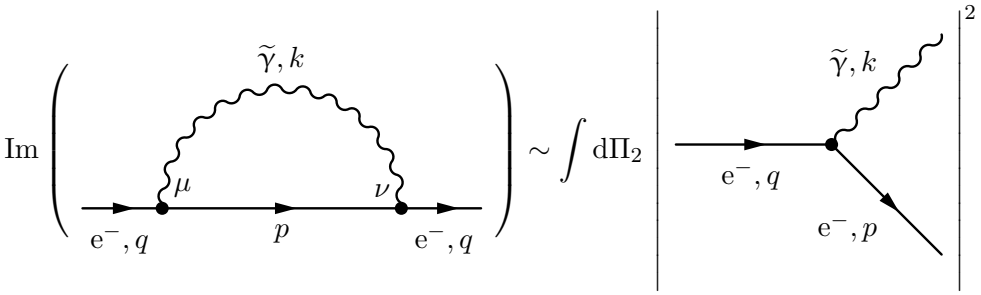
und $\mathcal{M}(\mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+ \to \mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+) \equiv \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}(\mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+ \to \widetilde{\gamma}) \equiv \widehat{\mathcal{M}}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathcal{M}_1) &= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\, \overline{u}(k_1)\gamma^\nu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} v(k_2)\overline{v}(k_2)\gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} u(k_1) \\
&\qquad \times \frac{1}{N}(\eta_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + c\xi_\mu\xi_\nu + d(k_\mu\xi_\nu + \xi_\mu k_\nu)) = \\
&= e^2 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\, (\widehat{\mathcal{M}}_1)^{\dagger,\nu} (\widehat{\mathcal{M}}_1)^\mu \frac{1}{N}(-\eta_{\mu\nu} - c\xi_\mu\xi_\nu) = \\
&= e^2 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k)\, (\widehat{\mathcal{M}}_1)^{\dagger,\nu} (\widehat{\mathcal{M}}_1)^\mu \left(\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \overline{\varepsilon}_\nu^{(\lambda)}\right) = \\
&= e^2 \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k) \sum_\lambda |\mathcal{M}(\mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+ \to \widetilde{\gamma})|^2\,.
\end{aligned} \tag{13.31}$$

Hierbei haben wir die Gültigkeit der Ward-Identität ausgenutzt, die dafür sorgt, dass alle Terme verschwinden, in denen ein Impuls k_μ mit $(\widehat{\mathcal{M}}_1)^\mu$ kontrahiert wird. Übrig bleibt dann die Polarisationssumme von Fall 1, denn N entspricht dem Normierungsfaktor aus Gl. (A.19) und $-c$ der Konstanten β aus Gl. (A.23).

Damit ist gezeigt, dass der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude des Prozesses $\mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+ \to \mathrm{e}_L^- \mathrm{e}_R^+$ mit dem totalen Wirkungsquerschnitt für die Annihilation eines linkshändigen Elektrons und eines rechtshändigen Positrons in ein nach Fall 1 modifiziertes Photon (mit Summation über die Polarisationen des Photons) zusammenhängt.

Betrachten wir als zweites die modifizierte Selbstenergiekorrektur zum Propagator eines Elektrons, wobei wir dieses mal jedoch keinen speziellen Polarisationszustand betrachten. Diese Korrektur muss, sofern es keine Probleme mit der Unitarität gibt, über das optische Theorem mit der totalen Zerfallsbreite für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung eines Elektrons zusammenhängen.



(13.32)

Hier ist $\mathrm{d}\Pi_2$ das Zwei-Teilchen-Phasenraumelement des Elektrons und modifizierten Photons im Endzustand. Wir führen – analog zu vorher – bei der Integration über den Schleifenimpuls eine zusätzliche Integration ein, die mittels einer δ-Funktion wieder aufgehoben wird. Dann ist die Amplitude (gemittelt über die Spins des einlaufenden Elektrons) mit $\mathcal{M}(\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^-) \equiv \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}(\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^- \widetilde{\gamma}) \equiv \widehat{\mathcal{M}}_2$ gegeben durch:

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{s_1} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\, \delta^{(4)}(p+k-q)\, e^2 \overline{u}(q) \gamma^\nu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\mu u(q)$$
$$\times \frac{1}{K^{-1} + \mathrm{i}\epsilon} (\eta_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu + c \xi_\mu \xi_\nu + d(k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu))\,. \tag{13.33}$$

Nun sollen die Integrationen über p^0 und k^0 erfolgen. Dabei ist wieder die Lage der Pole der Propagatoren wichtig. Mittels des Residuensatzes ergibt sich mit

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{p^2 - m^2}\right]_{p^0 = E} = \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(p^0 + \sqrt{p^2 + m^2})(p^0 - \sqrt{p^2 + m^2})}\right]_{p^0 = E} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{1}{2E}\,, \tag{13.34}$$

das folgende Ergebnis:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{M}_2) = -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E}\, \delta^{(4)}(p+k-q) \sum_{s_1} \overline{u}(q) \gamma^\nu (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu u(q)$$
$$\times \frac{1}{N} (\eta_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu + c \xi_\mu \xi_\nu + d(k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu)) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}\,\delta^{(4)}(p+k-q) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{Sp}[(\not{q}+m)\gamma^\nu(\not{p}+m)\gamma^\mu]\frac{1}{N}(-\eta_{\mu\nu}-c\xi_\mu\xi_\nu) = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}\,\delta^{(4)}(p+k-q) \\
&\qquad\qquad \times \left(\sum_{s_1,s_2}(\widehat{\mathcal{M}}_2)^{\nu,\dagger}(\widehat{\mathcal{M}}_2)^\mu\right)\left(\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}\overline{\varepsilon}_\nu^{(\lambda)}\right) = \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}\,\delta^{(4)}(p+k-q)\,\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\sum_\lambda |\mathcal{M}(\mathrm{e}^-\to \mathrm{e}^-\widetilde{\gamma})|^2\,. \qquad (13.35)
\end{aligned}
$$

Wir erkennen somit, dass für die Gültigkeit des optischen Theorems nur die Lage der Pole des Propagators und die Gültigkeit der Ward-Identität von Bedeutung ist. Die Gestalt des Matrixelements selbst (polarisiert bzw. unpolarisiert) fließt nicht in die Herleitung ein. Somit verzichten wir auch für den paritätsverletzenden Fall 3 auf die Betrachtung des ersten Prozesses und schauen und sofort die Selbstenergie des Elektrons an.

13.5.2. Entsprechende Überlegungen für Fall 3

Die Amplitude für die Selbstenergie ist nach Mittelung über die Spins des einlaufenden Elektrons gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{s_1}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\delta^{(4)}(p+k-q)\,e^2\overline{u}(q)\gamma^\nu\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\mu u(q) \\
\times \frac{1}{(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+k^2+\mathrm{i}\epsilon}[\eta_{\mu\nu}+bk_\mu k_\nu + c(k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu) + d\xi_\mu\xi_\nu \\
+ e(k_\mu\xi_\nu+\xi_\mu k_\nu) + f n_\mu n_\nu + g(n_\mu\xi_\nu+\xi_\mu n_\nu) + h\zeta_\mu\zeta_\nu \\
+ i(k_\mu\zeta_\nu+\zeta_\mu k_\nu) + j(n_\mu\zeta_\nu+\zeta_\mu n_\nu) + l(\xi_\mu\zeta_\nu+\zeta_\mu\xi_\nu)]\,, \qquad (13.36)
\end{aligned}
$$

mit den Funktionen b, c, d, e, f, g, h, i, j und l aus Gl. (13.16). Verwenden wir

$$
\omega = \mathcal{C}k_\parallel + \sqrt{k_\perp^2+(1+\mathcal{C}^2)k_\parallel^2}\,,\quad \widetilde{\omega}\equiv \mathcal{C}k_\parallel - \sqrt{k_\perp^2+(1+\mathcal{C}^2)k_\parallel^2}\,, \qquad (13.37)
$$

so ergibt sich für das Residuum, das wir für die Integration entlang der Kontur entlang der oberen komplexen k^0-Halbebene benötigen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(k\cdot\xi)(k\cdot\zeta)+k^2}\right]_{k^0=\omega} &= \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(k^0-\omega)(k^0-\widetilde{\omega})}\right]_{k^0=\omega} = \frac{1}{\omega-\widetilde{\omega}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k_\perp^2+(1+\mathcal{C}^2)k_\parallel^2}}\,. \qquad (13.38)
\end{aligned}
$$

Analog zu Vorgehen in Gl. (13.35) ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\mathcal{M}_2) &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}\,\delta^{(4)}(p+k-q)\\ &\quad\times \mathrm{Sp}[(\not{q}+m)\gamma^\nu(\not{p}+m)\gamma^\mu]\frac{1}{N''}(-\eta_{\mu\nu}+\varepsilon''\xi_\mu\xi_\nu+\iota''\zeta_\mu\zeta_\nu+\kappa''(\xi_\mu\zeta_\nu+\zeta_\mu\xi_\nu)) =\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}\,\delta^{(4)}(p+k-q)\,\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\sum_{\lambda}|\mathcal{M}(\mathrm{e}^-\to \mathrm{e}^-\widetilde{\gamma})|^2\,, \qquad (13.39)\end{aligned}$$

wobei wir auch hier Gebrauch von der Ward-Identität gemacht haben. Es ergibt sich damit die Polarisationssumme für Fall 3 aus Gl. (A.38) mit dem Normierungsfaktor N'' und den Konstanten ε'', ι'' und κ''.

Somit ist ebenso für Fall 3 die Gültigkeit des optischen Theorems und damit die Unitarität gewährleistet. Die asymmetrische Lage der beiden Pole hat keinen Einfluss auf das optische Theorem und das Ergebnis für die Zerfallsbreite, da der Pol mit $\mathrm{Re}(k^0) < 0$ unphysikalisch ist und bei der Berechnung physikalischer Prozesse nicht einfließt.

Kapitel 14.

Diskussion der Ergebnisse

14.1. Effektive Metrik, invariante und maximale Geschwindigkeit

Nach den bisherigen Untersuchungen kommen wir zu dem Schluss, dass in den Fällen 1 und 2 der modifizierten Maxwell-Theorie sowohl die Unitarität als auch die Mikrokausalität gewährleistet sind. Wir haben jedoch durch unsere Vorbetrachtungen in Abschnitt 11.2 gesehen, dass der Sektor $-3/2 < \widetilde{\kappa}_{00} < 0$ bei Fall 1 auf klassischem Niveau zu Ausbreitungsgeschwindigkeiten führt, welche größer sind als die festgelegte Geschwindigkeit c des Minkowski-Linienelements. Warum führt dies zu keinen Problemen bezüglich der Quantisierung oder gar der Konsistenz der klassischen Theorie?

In [81] wurde gezeigt, dass die Wirkung der modifizierten Maxwell-Theorie aus Gl. (3.1b) für die Fälle 1 und 2 auf die Form

$$S_{\text{modMax}} = -\int\limits_{\mathbb{R}_4} \mathrm{d}^4x \, \left(1 - \frac{\kappa}{2}\xi^\alpha\xi_\alpha\right) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\varrho\sigma}\widetilde{\eta}^{\mu\varrho}\widetilde{\eta}^{\nu\sigma} \,, \tag{14.1}$$

gebracht werden kann mit einer effektiven Metrik

$$\widetilde{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{1 - \kappa\xi^\alpha\xi_\alpha/2}\xi^\mu\xi^\nu \,, \tag{14.2}$$

wobei $\kappa = (4/3)\widetilde{\kappa}_{00}$ für den ersten und $\kappa = (4/3)\widetilde{\kappa}_{33}$ für den letzteren der beiden Fälle gilt. Man kann ebenso zeigen, dass die Einführung einer solchen effektiven Metrik für den Fall zweier ausgezeichneter Richtungen nicht möglich ist. Beispielsweise führt ein allgemeiner Ansatz der Form

$$\widetilde{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + a\xi^\mu\xi^\nu + b\zeta^\mu\zeta^\nu + c(\xi^\mu\zeta^\nu + \zeta^\mu\xi^\nu) \,, \tag{14.3}$$

welcher analog zur Lösung (14.2) ist, nicht zum Ziel. Warum dies ein ganz wichtiger Punkt ist, soll im Folgenden erläutert werden. Dazu führen wir neue Begriffe an, um die Kausalität einer klassischen Raumzeit zu charakterisieren bzw. zu untersuchen.

Eine Raumzeit $\mathcal{M}$ heißt **stabil kausal** genau dann, wenn sie eine Lorentzmetrik $g_{\mu\nu}$ besitzt und

es eine überall definierte skalare Funktion t gibt, so dass $\nabla_\mu t \neq 0$ und $(\nabla_\mu t)(\nabla_\nu t)g^{\mu\nu} > 0$. Ist eine Raumzeit stabil kausal, so gibt es in ihr keine geschlossenen zeitartigen (bzw. lichtartigen) Kurven [82]. In der Tat kann sowohl beim räumlich isotropen Fall als auch beim räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung die Zeit t als global definierte skalare Funktion gewählt werden. Dann ist $(\nabla_\mu t) = (1,0,0,0)^\intercal \neq 0$ und es gilt außerdem mit der effektiven Metrik in Gl. (14.2):

$$\nabla_\mu t \nabla_\nu t \widetilde{\eta}^{\mu\nu} = \begin{cases} \dfrac{3+2\widetilde{\kappa}_{00}}{3-2\widetilde{\kappa}_{00}} & \text{für Fall 1} \\ 1 & \text{für Fall 2} \end{cases} . \tag{14.4}$$

Damit ist für Fall 1 $\nabla_\mu t \nabla_\nu t \widetilde{\eta}^{\mu\nu} > 0$, sofern $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ ist, also im physikalischen Parameterbereich. Für Fall 2 gilt dies immer und somit sind beide Fälle im klassischen Regime stabil kausal und es existieren keine Zeitschleifen.

Darüber hinaus ist nach einem mathematischen Theorem die kausale Struktur einer klassischen Theorie durch den Lichtkegel gegeben, sofern sie den Feldgleichungen

$$G^{\mu\nu}(x;\phi_i,\boldsymbol{\nabla}\phi_i)\boldsymbol{\nabla}_\mu\boldsymbol{\nabla}_\nu\phi_j = F_j(x;\phi_i,\boldsymbol{\nabla}\phi_i)\,, \tag{14.5}$$

genügt, wobei $G^{\mu\nu}$ eine global hyperbolische Metrik ist [83, 77]. Information kann in diesem Falle nur innerhalb oder auf dem Lichtkegel propagieren. Eine Raumzeit $\mathcal{M}$ heißt **global hyperbolisch** genau dann, wenn eine Cauchy-Fläche für diese Raumzeit existiert [84]. Eine Cauchy-Fläche Σ_t wiederum ist eine Hyperfläche der Raumzeit, auf welcher die Zeit t eine Konstante ist und die von jeder kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird. Besitzt eine Kurve mehrere Schnittpunkte mit einer Cauchy-Fläche, so deutet das auf den akausalen Charakter dieser Kurve hin. (Das ist beispielsweise der Fall, wenn Abschnitte der Kurve existieren, die zeitlich rückwärts durchlaufen werden.) Im Minkowski-Raum sind solche Cauchy-Flächen gerade die Hyperebenen $\Sigma_t = \{(x,y,z)|t = \text{const.}\}$ und damit ist der Minkowski-Raum global hyperbolisch. Diese Eigenschaft gilt ebenso für die Fälle 1 und 2, da beim ersteren die Zeitkoordinate und beim letzteren eine der Raumkoordinaten gegenüber dem Minkowski-Raum gestreckt ist:

$$(\widetilde{\eta}^{\mu\nu})_{\text{Fall 1}} = \operatorname{diag}\left(\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}, -1, -1, -1\right), \quad (\widetilde{\eta}^{\mu\nu})_{\text{Fall 2}} = \operatorname{diag}\left(1, -1, -1, \frac{-1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\right). \tag{14.6}$$

Somit sind beide Fälle global hyperbolisch, was sogar eine stärkere Eigenschaft ist als stabil kausal.

Des Weiteren ist nach [77] die Mikrokausalität eine Folge der kausalen Struktur der klassischen Theorie und nicht zwingend eine Folge der Lorentzinvarianz. Die Lorentzinvarianz ist „nur“ eine nützliche Eigenschaft, um die Mikrokausalität direkt zu zeigen, sie ist jedoch keine Notwendigkeit. Falls eine effektive Metrik [85, 86] wie in Gl. (14.6) existiert, so ist damit

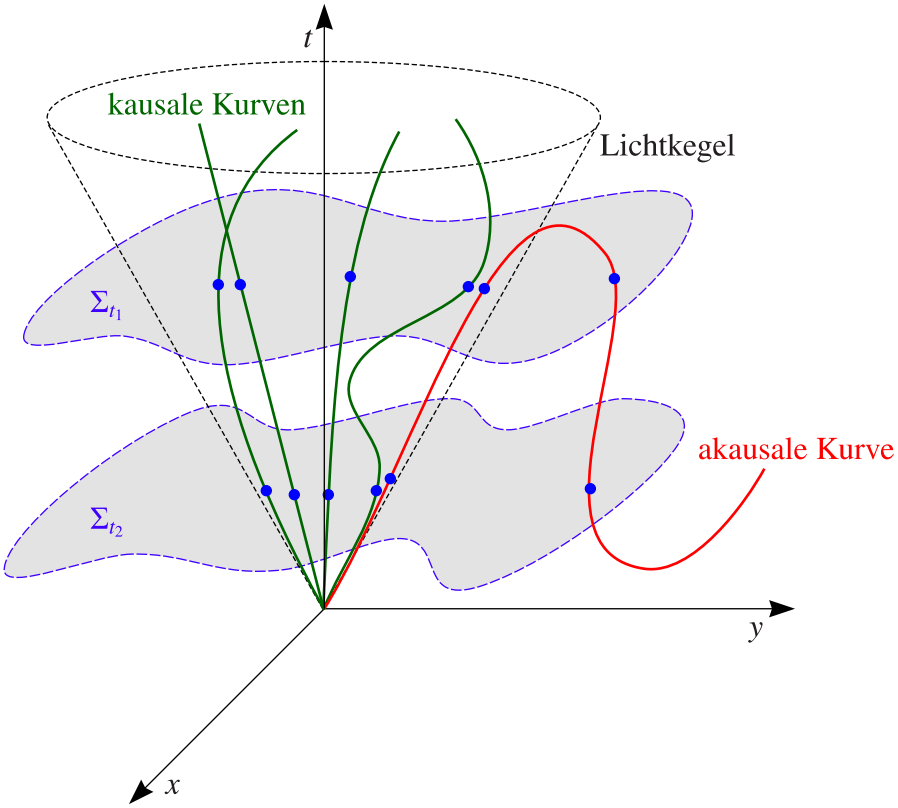


Abbildung 14.1.: Vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit mit Cauchy-Flächen Σ_{t_1} und Σ_{t_2}. Die dritte Raumdimension ist unterdrückt. Die kausalen Kurven verlaufen innerhalb des Lichtkegels und schneiden jede Cauchy-Fläche genau einmal. Eine akausale Kurve schneidet die Cauchy-Flächen Σ_{t_1} und Σ_{t_2} in mehreren Punkten.

nach obigem Theorem die Kausalität auch der Quantentheorie gewährleistet. Damit stimmen die Ergebnisse der direkten Untersuchungen in den letzten Kapiteln mit diesen Betrachtungen überein. Aus grundlegenden Prinzipien (Homogenität von Raum und Zeit, Isotropie des Raumes, Relativitätsprinzip) ergibt sich die Lorentzgruppe als Symmetriegruppe der klassischen (relativistischen) Mechanik und Elektrodynamik. Aus der Struktur der Lorentzgruppe geht eine invariante Geschwindigkeit[1] hervor, aber aus ihr ergibt sich in der Tat keine maximale Geschwindigkeit. Eine maximale Geschwindigkeit wird aus der Art und Weise festgelegt, wie Signale gesendet, Uhren synchronisiert oder Raketen beschleunigt werden. Somit widerspricht das Auftreten von Geschwindigkeiten in physikalischen Vorgängen, welche größer sind als die invariante Geschwindigkeit, keineswegs der speziellen Relativitätstheorie oder der Kausalität.

Möglich ist es, die invariante Geschwindigkeit experimentell beispielsweise mittels eines Michelson-Morley-Experiments [52] zu messen. Dieses Experiment lieferte erste Hinweise darauf, dass sich elektromagnetische Wellen mit einer Geschwindigkeit c ausbreiten, welche unabhängig vom Koordinatensystem ist, in dem sich die Quelle befindet. Infolgedessen wurde c

[1] eine Geschwindigkeit, welche unter Wechsel des Koordinatensystems invariant ist

als invariante Geschwindigkeit identifiziert. In einem Gedankenexperiment könnte man eine Rakete mit einem Triebwerk beschleunigen, welches Photonen emittiert. Jedes einzelne Photon trägt einen Impuls und würde die Rakete aufgrund des Rückstoßes in die entgegengesetzte Richtung antreiben. Aus dem relativistischen Additionsgesetz von Geschwindigkeiten, welches sich aus der Struktur der Lorentzgruppe herleiten lässt, wird die Geschwindigkeit der Rakete stets zunehmen, aber niemals den Wert c überschreiten. Somit ergibt sich die Existenz einer maximalen Geschwindigkeit aus einem physikalischen Prozess und nicht a priori aus der Lorentzgruppe. In physikalischen Vorgängen können außerdem unbestritten Geschwindigkeiten auftreten, die größer sind als die invariante Geschwindigkeit[2]. Jedoch ist es weder möglich, mit diesen Geschwindigkeiten Signale zu senden noch Raketen zu beschleunigen. Wir werden nun ein zweites Gedankenexperiment durchführen. Stellen wir uns hypothetische Wesen vor, welche in einer Flüssigkeit leben. Diese Wesen sollen über Kräfte zusammengehalten werden, welche durch Phononen übertragen werden. Es ist möglich, dass solche Wesen ihre Uhren mittels Sonar synchronisieren. Wir nehmen an, dass sie blind auf andere Wechselwirkungen wie beispielsweise elektromagnetische Kräfte sind, die über Photonen ausgetauscht werden. Unsere Wesen können ein analoges Michelson-Morley-Experiment durchführen, in dem sie die invariante Geschwindigkeit messen. Das Ergebnis dieses Experiments wird sein, dass die invariante Geschwindigkeit bei der Schallgeschwindigkeit c_s der Flüssigkeit liegt. Die Naturgesetze dieser Wesen wird den Gesetzen einer „akustischen Lorentzgruppe“ genügen. Man könnte sich vorstellen, dass sie eine Rakete bauen, welche durch ein Triebwerk beschleunigt wird, das Phononen emittiert. Die Wesen würden das sie umgebende Medium durch physikalische Effekte wie Längenkontraktion und Zeitdilatation „spüren“, also durch eine Art „akustische Relativität“ [85]. Darüber hinaus würden sie Abweichungen in der Dispersionsrelation für Schallwellen messen, sofern diese eine sehr hohe Frequenz besitzen, wenn also die makroskopische Beschreibung der Flüssigkeit zusammenbricht und mikroskopische, also quantenmechanische Effekte, wichtig werden. Das wird bei Energien geschehen, die einer Längenskala von der Größenordnung einzelner Atome bzw. Moleküle entspricht, aus denen sich die Flüssigkeit zusammensetzt. Dabei handelte es sich dann um die Effekte einer Verletzung der „akustischen Lorentzinvarianz“, weil durch die Flüssigkeit ein bestimmtes Koordinatensystem ausgezeichnet wird und zwar das, in dem die Flüssigkeit in Ruhe ist. Für die Wesen in der Flüssigkeit wäre die Physik bei diesen kleinen Längenskalen eine Art versteckter Sektor, eine Physik, welche für deren Alltagserfahrungen ungewohnt ist.

Für uns verhält sich die kleinskalige Struktur der Raumzeit analog dazu, wie sich Atome bzw. Moleküle für die Wesen in der Flüssigkeit verhalten. Aufgrund von Raumzeit-Defekten wirkt das Vakuum wie ein effektives Medium, welches die aktive Lorentzinvarianz bricht, und wir spüren die Abweichung von der speziellen Relativitätstheorie bei Photonen hoher Frequenz. Jedoch ist auch die mikroskopische Struktur der Raumzeit nicht direkt für uns sichtbar.

Schlussendlich können wir noch ein drittes (wenn auch sehr spekulatives) Gedankenexperiment durchführen. Wir betrachten hypothetische Teilchen, welche miteinander über eine Kraft

[2]Das kann beispielsweise für die Phasengeschwindigkeit eines Wellenpakets gelten.

wechselwirken, die sich von der elektroschwachen, starken und gravitativen Wechselwirkung unterscheidet und auf die wir blind sind. Die Überträger der Kraft sollen Tachyonen sein, die sich mit einer Geschwindigkeit c_{tach} bewegen, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit c. Stellen wir uns erneut hypothetische Wesen vor, welche mit dieser Art von Teilchen wechselwirken können oder sogar selbst aus solchen Teilchen bestehen. Die Symmetriegruppe für deren Naturgesetze wird die „tachyonische Lorentzgruppe“ sein mit einer invarianten Geschwindigkeit c_{tach}. Dann ist es für diese Wesen möglich, mittels tachyonischer Signale ihre Uhren zu synchronisieren oder ihre Raketen zu beschleunigen. Dies definiert c_{tach} als die maximale Geschwindigkeit.

14.2. Zusätzliche Interpretation mittels des Casimir- und Scharnhorst-Effekts

Fall 2 besitzt eine physikalische Interpretation in Bezug auf zwei physikalische Effekte, nämlich den Casimir- und den Scharnhorst-Effekt.

Zunächst möchten wir den ersteren der beiden beschreiben. Betrachtet wird ein Würfel der Kantenlänge L, der von perfekt leitenden Platten berandet ist [87]. In diesen Würfel soll eine weitere perfekt leitende quadratische Platte der Kantenlänge L parallel zur x-y-Ebene im Abstand a eingebracht werden, so dass deren Mittelpunkt auf der z-Achse liegt. Die Lösungen dieses Randwertproblems der klassischen Elektrodynamik sind stehende Wellen mit quantisierten Werten für die Komponenten des Wellenzahlvektors $\mathbf{k}$. Es werden nun zwei Fälle betrachtet:

1) Die eingebrachte Platte befinde sich in einem großen Abstand $a \sim L/2$ vor der x-y-Ebene. L soll zusätzlich sehr groß sein. Dann können alle Komponenten des Wellenvektors, also k_x, k_y und k_z, als quasi-kontinuierlich betrachtet werden.

2) Die eingebrachte Platte befinde sich in einem kleinen Abstand $a \ll L$ vor der x-y-Ebene. Dann kann man nur die Komponenten k_x und k_y als quasi-kontinuierlich annehmen, wobei die Komponente k_z wegen $a \ll L$ immer noch als diskret betrachtet werden muss.

Die Differenz der Nullpunktsenergien des elektromagnetischen Feldes der beiden Aufbauten (1) und (2) soll berechnet werden, wobei die Nullpunktsenergie die Summe aller möglichen Moden $\hbar\omega(\mathbf{k}) = \hbar c|\mathbf{k}|$ ist. Jedoch nimmt diese einen unendlichen Wert an und muss so regularisiert werden, dass sehr hohe Frequenzen (beispielsweise ab dem UV-Bereich) abgeschnitten werden. Das ist auch physikalisch motiviert, denn die zusätzlich eingeführte Platte wird für solche Frequenzen kein Hindernis darstellen. Letztendlich ergibt sich eine negative Energiedifferenz, was einer anziehenden Kraft zwischen der eingeführten Platte und der Platte in der x-y-Ebene entspricht. Diese Kraft pro Fläche, also gewissermaßen der von außen wirkende Druck, ist gegeben durch

$$P = \hbar c \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a^4} \,. \tag{14.7}$$

Dieser kann physikalisch so motiviert werden, dass außerhalb der beiden Platten eine Vielzahl mehr elektromagnetischer Moden existiert als innerhalb der Platten für kleine Abstände, da die Moden in diesem Falle diskret und nicht kontinuierlich sind. Damit entsteht so etwas wie ein Strahlungsdruck der Moden von außerhalb der Platten.

Das eben beschriebene Problem wurde von Casimir im Rahmen einer quantisierten Elektrodynamik behandelt. Scharnhorst hat die Behandlung des Aufbaus auf die Euler-Heisenberg-Theorie [88] erweitert, also zusätzlich die Wechselwirkung von Photonen mit Elektronen berücksichtigt [89]. Bei der Euler-Heisenberg-Theorie handelt es sich um eine effektive QED im Grenzfall, dass die Elektronmasse viel größer ist als die Impulse der beteiligten Photonen. Wie bereits erwähnt, wurde schon in der Behandlung von Casimir der Einfluss von hochenergetischen elektromagnetischen Wellen unterdrückt. Die Lagrangedichte der Euler-Heisenberg-Theorie setzt sich zusammen aus dem kinetischen Term der Photonen und zusätzlich einem Anteil, welcher aus der Berechnung der Photon-Vierpunkt-Funktion auf Ein-Schleifen-Niveau folgt. Dieser zweite Term beschreibt eine effektive Wechselwirkung zwischen Photonen und ist mit der Elektronmasse zur vierten Potenz unterdrückt. Die Vakuum-Polarisation auf Ein-Schleifen-Niveau folgt direkt aus der Lagrangedichte. Scharnhorsts Ziel war es deshalb, Zwei-Schleifen-Korrekturen zur Vakuum-Polarisation innerhalb des von Casimirs vorgeschlagenen Aufbaus zu berechnen. Casimirs Gedankenexperiment führt zu einer Brechung der aktiven Lorentzinvarianz, was einen modifizierten Photonpropagator zur Folge hat, welcher bei den Berechnungen verwendet werden muss. Die Zwei-Schleifen-Korrekturen zur Vakuum-Polarisation mit diesem modifizierten Propagator ergeben effektive Dielektrizitäts- und Permeabilitätszahlen und damit einen nichttrivialen Brechungsindex des Vakuums. Auf diese Weise wird die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit von Photonen modifiziert, sofern diese senkrecht zu den Platten einfallen:

$$c_\perp = \left(1 + \frac{11}{2^6 \cdot 45^2} \frac{e^4}{(ma)^4}\right) c\,. \tag{14.8}$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit für die Propagation parallel zu den Platten; m ist die Elektronmasse und e die Elementarladung. Die Off-Shell-Dispersionsrelation von Photonen kann in diesem Falle durch $\widetilde{\eta}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$ mit einer effektiven Metrik der Form $\widetilde{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \xi n^\mu n^\nu$ beschrieben werden, wobei n^μ ein raumartiger Vektor ist, welcher senkrecht auf den Platten steht. Dies steht in direkter Verbindung zu Fall 2 der modifizierten Maxwell-Theorie.

An dieser Stelle soll noch eine mögliche Interpretation des anisotropen Falles mit zwei ausgezeichneten Richtungen aus Abschnitt 13 erläutert werden. Der ausgezeichnete raumartige Vektor ζ^μ lässt sich im Rahmen des Aufbaus von Casimir mit zusätzlicher Berücksichtigung des Scharnhorst-Effekts erklären und zwar, sofern der Aufbau zeitlich ewig existiert. Werden die Platten jedoch zu einem Zeitpunkt t_1 eingebracht und zu einem späteren Zeitpunkt t_2 wieder entfernt, so wird auch die Zeitdimension irgendwelchen Randbedingungen unterlegt. Das führt zur Auszeichnung einer zeitlichen Richtung, also dem zeitartigen Vektor ξ^μ.

Kapitel 15.

Zusammenfassung zu Teil III

Dieser Teil der Dissertation war dem formaleren Gesichtspunkt gewidmet, die Konsistenz der modifizierten Maxwell-Theorie zu untersuchen. Weil die Analyse für den allgemeinen Fall mit vollem Parametersatz sehr kompliziert ist, sollte eine Beschränkung auf die drei wichtigsten Fälle ausreichen und zwar

1) den räumlich isotropen Fall,

2) den räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung und

3) den anisotropen Fall mit zwei ausgezeichneten Richtungen in der Raumzeit.

Eine naive Analyse mittels der charakteristischen Geschwindigkeiten der klassischen Theorie lieferte zunächst einen Hinweis auf die Verletzung der Kausalität bei Fall 1 für $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 0$, da dieses Regime Frontgeschwindigkeiten aufweist, die größer als die fixierte Geschwindigkeit c im Minkowski-Linienelement sind. Eine tiefer gehende Analyse zeigte jedoch dann, dass für diesen Fall sowohl Mikrokausalität als auch Unitarität für den Parameterbereich $-1 < \widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} \leq 1$ gewährleistet sind. Diese Tatsache motiviert ebenso die Bestimmung der Schranke für negative Parameter in Abschnitt II, weil sich der Bereich $-1 < \widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}} < 0$ von der theoretischen Seite somit nicht ausschließen lässt.

In [81] wurde außerdem gezeigt, dass man für die Fälle 1 und 2 eine effektive Metrik $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$ definieren kann, so dass sich die Off-Shell-Dispersionsrelation in der Form $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0$ schreiben lässt. Aus dieser Gegebenheit folgt ebenso, dass die Mikrokausalität für die eben genannten Fälle sichergestellt ist, was eine sehr gute Gegenprobe zur direkten Rechnung darstellt. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass (1) und (2) sogar eine experimentelle Realisierung haben in Form des Casimir- und Scharnhorst-Effekts.

Ausbreitungsgeschwindigkeiten, die größer sind als die Geschwindigkeit c, führen also nicht notwendigerweise zur einer Verletzung der (Mikro)kausalität. Diese Betrachtungsweise kann höchstens einen schwachen Hinweis darauf liefern, dass die Kausalität einer Theorie nicht garantiert ist. Für den letztendlichen Schluss sind jedoch tiefgründigere Untersuchungen notwendig.

Die Auswertung der Unitarität für Fall 3 erwies sich technisch schwieriger als für die Fälle 1 und 2. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass diese ebenso für Fall 3 gewährleistet werden

kann. Die formale Analyse der Unitarität konnte für alle drei Fälle mittels des zusätzlichen Nachweises der Gültigkeit des optischen Theorems untermauert werden. Eine Untersuchung der Mikrokausalität von Fall 3 steht bisher noch aus.

Nun fragen Sie sich vielleicht, wie so einfache Vorgänge eine derartig komplexe Welt schaffen können. Die Antwort lautet schlicht, weil die Phänomene, die wir in der Welt beobachten, das Ergebnis einer unabsehbaren Verflechtung unzähliger Photonenaustausch- und Interferenzprozesse sind.

Richard Phillips Feynman

Teil IV.

Berechnung von Quantenkorrekturen in der modifizierten Quantenelektrodynamik

Kapitel 16.

Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau

In Teil II dieser Doktorarbeit haben wir gewisse teilchenphysikalische Prozesse in einer modifizierten QED untersucht. Die Betrachtungen, welche in den entsprechenden Kapiteln durchgeführt wurden, beschränkten sich auf die niedrigste Ordnung Störungstheorie bezüglich der elektromagnetischen Kopplungskonstanten $\alpha = e^2/(4\pi)$, also auf Baumgraphenniveau.

16.1. Berechnung von Ein-Schleifen-Korrekturen zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung

16.1.1. Berechnung der virtuellen Korrektur zur Zerfallsbreite

In diesem Abschnitt möchten wir Ein-Schleifen-Korrekturen zur Zerfallsbreite der Vakuum-Cherenkov-Strahlung berechnen und zwar in niedrigster Ordnung bezüglich des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf den räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie. Da Quantenkorrekturen in der vierdimensionalen Raumzeit nicht notwendigerweise wohldefinierte Größen sind, werden Berechnungen in d Dimensionen durchgeführt. Auftretende ultraviolette Divergenzen (UV-Divergenzen) behandeln wir mittels dimensionaler Regularisierung, wobei $d = 4 - 2\varepsilon$ gesetzt wird. Die Divergenzen manifestieren sich dann als Pole bezüglich des Regulators ε.

In Abschnitt 4 haben wir gesehen, dass die Zerfallsbreite für Energien, welche viel größer als die Schwellenenergie sind, im räumlich isotropen Fall linear von $\widetilde{\kappa}_{00}$ abhängen. Diese Linearität rührt nicht vom Amplitudenquadrat, sondern vom Phasenraum her. Somit genügt es, für die Zerfallsbreite in führender Ordnung bezüglich $\widetilde{\kappa}_{00}$ nur Feynman-Diagramme mit gewöhnlichen Photon- und Fermionpropagatoren zu betrachten. Es genügt also, wenn wir uns auf die Korrekturen der gewöhnlichen QED beschränken. Ein möglicher Beitrag zum Prozess ist die Vertexkorrektur: Die Vertexkorrektur $\Lambda_\mu(q, q')$ für On-Shell-Protonen mit $q^2 = q'^2 = M^2$ ist bekannt und kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\overline{u}(q')\Lambda_\mu(q, q')u(q) = \mathcal{C}_1\overline{u}(q')\gamma_\mu u(q) + \mathcal{C}_2\overline{u}(q')u(q)(q + q')_\mu\,, \tag{16.1}$$

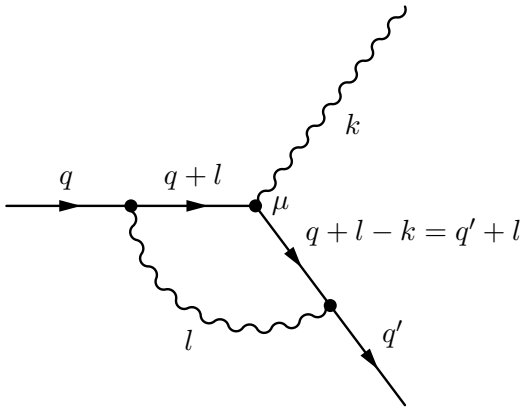


Abbildung 16.1.: Ein-Schleifen-Korrektur (Vertexkorrektur) zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung. Der Impuls des einlaufenden (punktförmigen) Protons sei q, der des auslaufenden Photons k und der des auslaufenden Protons sei $q' = q - k$. Wir bezeichnen den Schleifenimpuls mit l.

mit

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\alpha}{4\pi}\left[4B_0(M^2, M, 0) - 3B_0(k^2, M, M) \right. \\ \left. +2(2M^2 - k^2)C_0(M^2, k^2, M^2, M, M, M) - 2\right] , \tag{16.2a}$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{M}{4M^2 - k^2}\left[B_0(k^2, M, M) - 2B_0(M^2, M, 0) + B_0(0, 0, M) + 1\right] . \tag{16.2b}$$

Hierbei ist B_0 die skalare Zwei-Punkt-Funktion

$$B_0(p_1^2, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^d l}{(l^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\epsilon)[(l + p_1)^2 - m_1^2 + \mathrm{i}\epsilon]} , \tag{16.3}$$

und C_0 die skalare Drei-Punkt-Funktion

$$C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) = \\ = \frac{1}{\mathrm{i}\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(l^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\epsilon)[(l + p_1)^2 - m_1^2 + \mathrm{i}\epsilon][(l + p_2)^2 - m_2^2 + \mathrm{i}\epsilon]} . \tag{16.4}$$

Das Integral C_0 ist UV-konvergent, weshalb wir in diesem $d = 4$ setzen können. Es kann jedoch infrarote Divergenzen (IR-Divergenzen) aufweisen, was dazu führt, dass wir gegebenenfalls eine Regulatormasse $\lambda \ll m$ einführen müssen. Die Berechnung der benötigten Funktionen führt auf:

$$B_0(k^2, M, M) = \frac{1}{\varepsilon} - 2x_k \arctan\left(\frac{1}{x_k}\right) - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + 2 , \quad x_k = \sqrt{\frac{4M^2}{k^2} - 1} , \tag{16.5a}$$

$$B_0(M^2, M, 0) = \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + 2 , \tag{16.5b}$$

$$B_0(0,M,M) = \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right), \quad B_0(0,0,M) = \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + 1\,, \tag{16.5c}$$

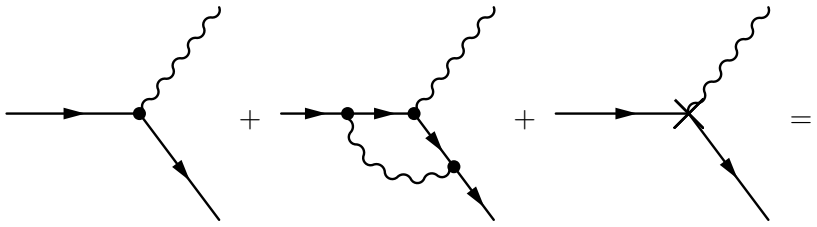
$$C_0(M^2,t,M^2,\lambda,M,M) = \frac{x_t}{M^2(1-x_t^2)}\left\{\ln(x_t)\left[2\ln(1+x_t) - \frac{1}{2}\ln(x_t) - 2\ln\left(\frac{\lambda}{M}\right)\right] + \frac{\pi^2}{6} + 2\mathrm{Li}_2(-x_t)\right\}, \quad x_t = \frac{\sqrt{1-\frac{4M^2}{t}}-1}{\sqrt{1-\frac{4M^2}{t}}+1}\,, \tag{16.5d}$$

wobei im letzteren Integral $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ und $(p_1 - p_2)^2 \equiv t$ gilt. In Berechnungen wird die Renormierungsskala μ^2 gewöhnlich auf eine für den Prozess typische Lorentz-invariante Skala gesetzt; in diesem Fall ist dies die Protonmasse. Also sei ab jetzt $\mu^2 = M^2$.

Es erweist sich um Zuge der folgenden Berechnungen als geschickt, ebenso die IR-Divergenzen mittels dimensionaler Regularisierung zu behandeln [90, 91]. Dazu setzen wir für die IR-Divergenzen $d = 4 - 2\varepsilon_{\mathrm{IR}}$, um diese von den UV-Divergenzen zu unterscheiden. Die Abhängigkeit von der Regulatormasse λ lässt sich nach [91] wie folgt in einen Pol bezüglich $\varepsilon_{\mathrm{IR}}$ umschreiben:

$$\ln\left(\frac{\lambda}{M}\right) \mapsto -\left(\frac{1}{d-4}\right) = \frac{1}{2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\,. \tag{16.6}$$

Das Ergebnis aus Gl. (16.1) ist noch UV-divergent, muss also renormiert werden. Dies funktioniert durch Addition des entsprechenden Counterterms. Das Ganze soll im On-Shell-Schema erfolgen, in dem die Counterterme so gewählt werden, dass renormierte Propagatoren in der Nähe der Massenschale entsprechender Teilchen die Form freier Propagatoren annehmen. Sei $\widehat{\Gamma}_\mu(q,q')$ die renormierte Vertexkorrektur:

$\widehat{\Gamma}_\mu(q,q') =$  $=$

$$= \mathrm{i}e\gamma_\mu + \mathrm{i}e\Lambda_\mu(q,q') + \mathrm{i}e\gamma_\mu\delta Z_\psi\,, \tag{16.7}$$

mit dem Counterterm δZ_ψ der Feldrenormierung der Fermionen. Im On-Shell-Schema gilt:

$$\delta Z_\psi = \frac{\alpha}{4\pi}\left[-B_0(0,M,M) + 4M^2 B_0'(M^2,M,\lambda)\right]\,, \tag{16.8}$$

wobei

$$B_0'(M^2,M,\lambda)=\frac{\partial}{\partial p^2}B_0(p^2,M,\lambda)\bigg|_{p^2=M^2}=-\frac{1}{M^2}\left[1+\ln\left(\frac{\lambda}{M}\right)\right]. \tag{16.9}$$

Damit haben wir nun alles beisammen, um die Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Ebene zum Betragsquadrat und letztendlich der Zerfallsbreite zu berechnen. In der Berechnung des Amplitudenquadrats in Gl. (4.8) ist dazu die Ersetzung $\mathrm{i}e\gamma_\mu \mapsto \mathrm{i}e\widehat{\Gamma}_\mu$ mit $\widehat{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu + \widehat{\Lambda}_\mu$ vorzunehmen:

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2,\lambda}|\mathcal{M}|^2=\frac{e^2}{2}\mathrm{Sp}[(\not{q}'+M)\Gamma^\mu(\not{q}+M)\Gamma^\nu]\overline{\varepsilon}_\mu(k)\varepsilon_\nu(k)\,, \tag{16.10}$$

mit den Spins s_1 und s_2 der Protonen und der Polarisation λ des Photons. Nehmen wir die obige Ersetzung vor, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2,\lambda}|\mathcal{M}|^2=2\pi\alpha\big\{&\mathrm{Sp}[(\not{q}'+M)\gamma^\mu(\not{q}+M)\gamma^\nu]+\mathrm{Sp}[(\not{q}'+M)\Lambda^\mu(\not{q}+M)\gamma^\nu]\\&+\mathrm{Sp}[(\not{q}'+M)\gamma^\mu(\not{q}+M)\Lambda^\nu]+\mathrm{Sp}[(\not{q}'+M)\Lambda^\mu(\not{q}+M)\Lambda^\nu]\big\}\,.\end{aligned} \tag{16.11}$$

Hierbei ist der erste der vier Terme der Baumgraphenanteil $\propto\alpha$, der zweite und dritte Term sind jeweils $\propto\alpha^2$ und der vierte Summand ist $\propto\alpha^3$. Die Korrekturen sind komplizierte Funktionen von $k^\mu k_\mu=\omega(k)^2-k^2$, $k^\mu\xi_\mu=\omega(k)$ und $q^\mu\xi_\mu=\Omega(q)=\sqrt{q^2+M^2}$, was die analytische Integration über k analog zu Gl. (4.27) erschwert.[1] Wir betrachten daher eine Entwicklung bezüglich großer Energien des einlaufenden Protons und kleiner Lorentzsymmetrie-verletzender Parameter. Dies führt auf das folgende Ergebnis:

$$\Gamma^{\mathrm{modMax}}=\left\{\frac{8}{9}\alpha+\frac{\alpha^2\left[39-88\ln\left(\frac{\lambda}{M}\right)\right]}{27\pi}\right\}\widetilde{\kappa}_{00}E+\mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\,. \tag{16.12}$$

Der führende Beitrag $\propto\alpha$ aus Gl. (4.57a) wird somit reproduziert. Die Korrekturen enthalten immer noch die Photonmasse λ, die wir zur Regularisierung der IR-Divergenzen eingeführt haben. In einem physikalischen Endergebnis darf diese nicht mehr vorkommen. Nach dem Theorem von Bloch und Nordsieck muss die Berücksichtigung von Korrekturen reeller Abstrahlung aus Abb. 16.2 dieselben Regulatorterme mit entgegengesetztem Vorzeichen liefern.

[1] Aufgrund der Impulserhaltung lassen sich alle Impulse q' über $q-k$ ausdrücken.

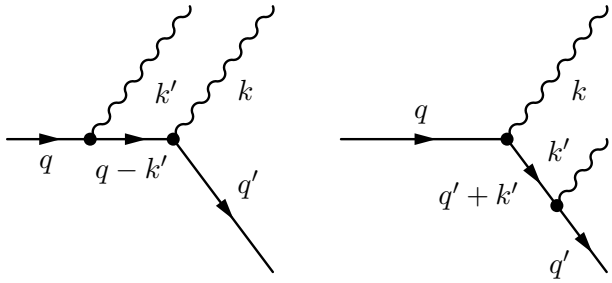


Abbildung 16.2.: Korrekturen der Abstrahlung eines reellen Photons durch das einlaufende bzw. durch das auslaufende Proton.

16.1.2. Auslöschung infraroter Divergenzen

Zunächst benötigen wir die IR-divergenten Terme der renormierten virtuellen Korrektur. Solche kommen nur in dem Term vor, welcher proportional zu γ_μ ist:

$$\mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}} = \frac{\alpha}{4\pi}\left\{2(2m^2 - t)C_0|_{\mathrm{IR}}\right\} + \delta Z_\psi|_{\mathrm{IR}}\,, \tag{16.13}$$

mit

$$C_0|_{\mathrm{IR}} = -\frac{x_t}{M^2(1-x_t^2)}\ln(x_t)\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\,, \quad \delta Z_\psi|_{\mathrm{IR}} = -\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{2}{\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\right\}\,. \tag{16.14}$$

und x_t aus Gl. (16.5d). Wir wollen zeigen, dass sich diese Divergenzen mit denen der reellen Abstrahlungskorrekturen wegheben. Dies soll zunächst für $\widetilde{\kappa}_{00} = 0$, also in der gewöhnlichen QED, geschehen. Dazu ist es geschickt, für die vorkommenden Viererimpulse eine spezielle Wahl zu treffen:

$$(p_1^\mu) = \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad (p_2^\mu) = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ 0 \\ p_2 \end{pmatrix}\,, \quad (k_2^\mu) = \begin{pmatrix} \omega \\ k\sin\vartheta\cos\varphi \\ k\sin\vartheta\sin\varphi \\ k\cos\vartheta \end{pmatrix}\,, \quad E_2 = \sqrt{p_2^2 + M^2}\,, \tag{16.15}$$

so ergibt sich

$$t = (p_1 - p_2)^\mu (p_1 - p_2)_\mu = 2M\,(M - E_2)\,. \tag{16.16}$$

Setzen wir zusätzlich $\beta \equiv p_2/E_2$, so resultiert mit der Wahl der Vierervektoren aus Gl. (16.15):

$$(2M^2 - t)\frac{x_t}{M^2(1-x_t^2)} = \frac{E_2}{(E_2 - M)\sqrt{1 + \frac{2M}{E_2 - M}}} = \frac{E_2}{\sqrt{E_2^2 - M^2}} = \frac{E_2}{p_2} = \frac{1}{\beta}\,, \tag{16.17}$$

Damit folgt dann weiterhin

$$x_t = \frac{\sqrt{\beta^2 E_2^2 + M^2} - \beta E_2}{M} = \frac{E_2 - p_2}{M} = \frac{E_2 - p_2}{\sqrt{E_2^2 - p_2^2}} = \sqrt{\frac{E_2 - p_2}{E_2 + p_2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,, \tag{16.18}$$

und mit

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,, \tag{16.19}$$

für $|x| < 1$ lässt sich der Ausdruck auf die folgende Form bringen:

$$\ln(x_t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = -\operatorname{arctanh}(\beta)\,. \tag{16.20}$$

Also gilt schlussendlich:

$$\mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\operatorname{artanh}(\beta) - \beta}{\beta}\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\,. \tag{16.21}$$

Da $\mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}}$ zusammen mit γ_μ vorkommt, muss die Ersetzung $e \mapsto e(1 + \mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}})$ vorgenommen werden, was in Wirkungsquerschnitten bzw. Zerfallsbreiten auf $e^2 \mapsto e(1 + 2\mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}}) + \mathcal{O}(\alpha^2)$ führt. Die IR-divergenten Terme in der differentiellen Zerfallsbreite, die von der virtuellen Korrektur herrühren, lauten daher:

$$\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{e}^\pm \to \mathrm{e}^\pm\widetilde{\gamma})|_{\mathrm{IR}} = 2\mathcal{C}_1|_{\mathrm{IR}}\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{e}^\pm \to \mathrm{e}^\pm\widetilde{\gamma})\,. \tag{16.22}$$

Kommen wir nun zur Amplitude der reellen Abstrahlung. Die differentielle Zerfallsbreite wird durch den Beitrag der reellen Abstrahlung korrigiert. Das abgestrahlte Photon $\widetilde{\gamma}'$ sei weich, dessen Energie liege also im Intervall $[0, \overline{\omega}]$, wobei $\overline{\omega} \ll m$ ist. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen, dass man den Beitrag des abgestrahlten weichen Photons von der restlichen Amplitude separieren kann [38]. Dann gilt:

$$\mathrm{d}\sigma(\mathrm{e}^\pm \to \mathrm{e}^\pm\widetilde{\gamma}\widetilde{\gamma}')|_{\mathrm{IR}} = \mathrm{d}\sigma(\mathrm{e}^\pm \to \mathrm{e}^\pm\widetilde{\gamma})\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\,|\mathcal{M}|^2\,, \tag{16.23}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^2}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{2p_1\cdot p_2}{(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_2)} - \frac{M^2}{(p_2\cdot k_2)^2} - \frac{M^2}{(p_1\cdot k_2)^2} = \\ &= \frac{2E_2}{\omega(\omega E_2 - kp_2\cos\theta)} - \frac{M^2}{(\omega E_2 - kp_2\cos\theta)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \\ &\overset{\omega=k}{=} \frac{p_2^2\sin^2\theta}{k^2(E_2 - p_2\cos\theta)^2}\,.\end{aligned} \tag{16.24}$$

Um die IR-Divergenz zu erfassen, muss auch die Integration über den Phasenraum in dimensionaler Regularisierung behandelt werden. Dazu benötigen wir das Phasenraummaß in

$d = 4 - 2\varepsilon_{\mathrm{IR}}$ Dimensionen [91]:

$$\int \frac{\mathrm{d}^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}2\omega}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2(4\pi^2)^{d/4}}\frac{1}{\Gamma\left(d/2-1\right)}\int\limits_0^{\overline{\omega}}\mathrm{d}k\,\frac{k^{d-2}}{\omega}\int\limits_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,(1-x^2)^{d/2-2}|\mathcal{M}|^2 =$$

$$\overset{\omega=k}{=}\frac{1}{2(4\pi^2)^{1-\varepsilon_{\mathrm{IR}}/2}}\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon_{\mathrm{IR}})}\int\limits_0^{\overline{k}}\mathrm{d}k\,k^{1-2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\int\limits_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,(1-x^2)^{-\varepsilon_{\mathrm{IR}}}|\mathcal{M}|^2\,, \quad (16.25)$$

mit der Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(x)$. Setzen wir nun $\cos\vartheta = x$ und $\sin\vartheta = \sqrt{1-x^2}$, so ergibt sich:

$$\int \frac{\mathrm{d}^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}2\omega}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^2}{2(4\pi^2)^{1-\varepsilon_{\mathrm{IR}}/2}}\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon_{\mathrm{IR}})}\int\limits_0^{\overline{k}}\mathrm{d}k\,k^{-1-2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}$$
$$\times\int\limits_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,\frac{\beta^2(1-x^2)^{1-\varepsilon_{\mathrm{IR}}}}{(1-\beta x)^2}\,. \quad (16.26)$$

In diesem Ausdruck rührt die IR-Divergenz vom radialen Integral über k her:

$$\int\limits_0^{\overline{k}}\mathrm{d}k\,k^{-1-2\varepsilon_{\mathrm{IR}}} = \left[-\frac{1}{2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}k^{-2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}\right]_0^{\overline{k}} = -\frac{\overline{k}^{-2\varepsilon_{\mathrm{IR}}}}{2\varepsilon_{\mathrm{IR}}} = -\frac{1}{2\varepsilon_{\mathrm{IR}}} + \mathcal{O}\{(\varepsilon_{\mathrm{IR}})^0\}\,. \quad (16.27)$$

Da wir uns nur für den divergenten Anteil interessieren, können wir nun in allen Termen $\varepsilon_{\mathrm{IR}} = 0$ setzen, wo dies keine Probleme verursacht. So gilt dann:

$$\int \frac{\mathrm{d}^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}2\omega}|\mathcal{M}|^2 = -(4\pi\alpha)\frac{\beta^2}{8\pi^2}\left[\int\limits_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^2}\right]\frac{1}{2\varepsilon_{\mathrm{IR}}} + \mathcal{O}\{(\varepsilon_{\mathrm{IR}})^0\} =$$
$$= -\frac{\alpha}{\pi}\frac{\operatorname{artanh}(\beta)-\beta}{\beta}\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{IR}}} + \mathcal{O}\{(\varepsilon_{\mathrm{IR}})^0\}\,. \quad (16.28)$$

Schließlich erkennen wir, dass sich die IR-Divergenzen der virtuellen und reellen Korrektur gegenseitig wegheben:

$$\mathrm{d}\sigma(\mathrm{e}^{\pm}\to\mathrm{e}^{\pm}\widetilde{\gamma})|_{\mathrm{IR}} + \mathrm{d}\sigma(\mathrm{e}^{\pm}\to\mathrm{e}^{\pm}\widetilde{\gamma}\widetilde{\gamma}')|_{\mathrm{IR}} = 0\,. \quad (16.29)$$

Somit wird der infrarot-divergente Term in Gl. (16.12), welcher von der Photonmasse λ abhängt durch die reelle Korrektur ausgeglichen. Es ergibt sich daher für die Zerfallsbreite in führender

Ordnung bezüglich der Energie und $\widetilde{\kappa}_{00}$ (sofern man nur die Vertexkorrektur berücksichtigt):

$$\Gamma^{\text{modMax}} = \left\{ \frac{8}{9}\alpha + \frac{39}{27\pi}\alpha^2 \right\} \widetilde{\kappa}_{00} E + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2) \,. \tag{16.30}$$

16.2. Behandlung des Lorentzsymmetrie-brechenden Anteils als Vertex-Einsetzung

In den nächsten Abschnitten geht es um die Berechnung von Quantenkorrekturen der modifizierten Theorie zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung bzw. dem Photonzerfall, die auf Amplitudenniveau bereits Lorentzsymmetrie-verletzende Propagatoren beinhalten. Diese führen im Amplitudenquadrat zu Abänderungen proportional zu $\widetilde{\kappa}_{00}$ und in der Zerfallsbreite zu Termen proportional zu $\widetilde{\kappa}_{00}^2$. In Theorien mit Lorentzsymmetrieverletzung entspricht die Berechnung solcher Korrekturen dem aktuellen Stand der Forschung, weshalb wir uns auf das Ein-Schleifen-Niveau beschränken möchten. Dabei wollen wir keinen speziellen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie betrachten, sondern gehen von folgender allgemeiner Überlegung aus. Die Bestimmung der zweiseitigen Schranke an das vollständige Parameterspektrum der modifizierten Maxwell-Theorie

$$\max_{\{\mu,\nu,\rho,\sigma\}} |\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}| < 5 \cdot 10^{-16} \,. \tag{16.31}$$

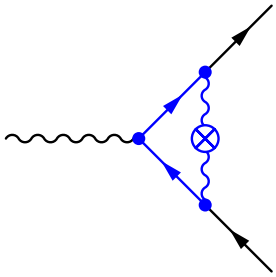
aus Abschnitt 8.4 bzw. [92] legt nahe, den modifizierten Photonterm als eine Störung in den kleinen Parametern $\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}$ zu betrachten. Die Verwendung des exakten Photonpropagators zur Berechnung der Quantenkorrekturen, wie beispielsweise des in Abschnitt 11.3 für den räumlich isotropen Fall hergeleiteten, erschwert die Rechnung sehr und macht die Anwendung von Standardmethoden unmöglich. Das eben beschriebene Vorgehen führt also zu einer Feynman-Regel in Form einer Vertexeinsetzung [23, 93, 57]:

$$= \mathrm{i} k_\alpha k_\beta \kappa^{\alpha\mu\beta\nu} \,, \tag{16.32}$$

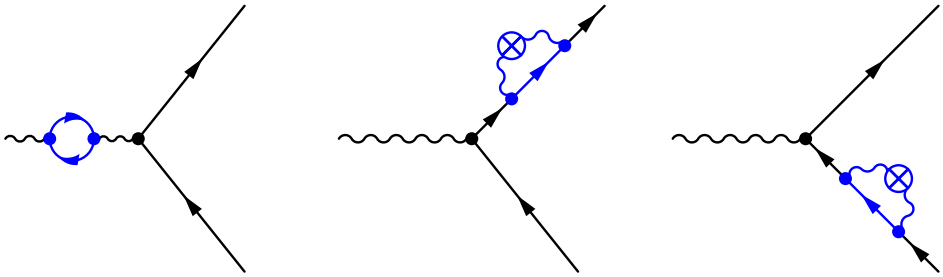
wobei k^μ der Viererimpuls ist, welcher durch die Vertexeinsetzung läuft. Physikalisch lässt sich die modifizierte Propagation für kleine Parameter also als punktförmige Störung auffassen. Dabei handelt es sich um ein Vorgehen analog zu der störungstheoretischen Entwicklung im Wechselwirkungsbild, wo die Wechselwirkung eines Quantenfelds in jedem einzelnen Term der Störungsreihe punktförmig vermittelt und die Propagation (also die Dynamik) weiterhin durch ein freies Feld beschrieben wird. Die Wechselwirkung (16.32) wirkt jedoch durch einen Tensor vierter Stufe, womit schon die Berechnung von Ein-Schleifen-Korrekturen vom technischen Standpunkte aus eine große Herausforderung darstellt. Die Behandlung der Lorentzsymmetrieverletzenden Terme als Vertexeinsetzung liefert einen großen Vorteil, da sich dann alle auftretenden Integrale auf gewöhnliche Tensorintegrale mit einer Masse und maximal zwei äußeren Impulsen zurückführen lassen. Diese können mit Standardmethoden aus der theoretischen Teil-

chenphysik angegangen werden, unter anderem auch mittels entsprechender Software mit kleineren Erweiterungen. Würden wir den exakten Propagator (beispielsweise von Gl. (11.17) für den räumlich isotropen Fall) gebrauchen, so hätte dies Schleifenintegrale zur Folge, in welchen bestimmte Richtungen der Raumzeit ausgezeichnet sind. Diese Tatsache verbietet aufgrund der zerstörten Isotropie der Raumzeit die Nutzung der gewöhnlichen Hilfsmittel zur Berechnung solcher Integrale, beispielsweise die Einführung von vierdimensionalen Kugelkoordinaten.

Wir interessieren uns für Quantenkorrekturen zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung $\mathrm{e}^{\pm} \to \mathrm{e}^{\pm}\widetilde{\gamma}$ bzw. zum Photonzerfall $\widetilde{\gamma} \to \mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-}$. Da die Matrixelemente beider Prozesse strukturell gleich sind und die Prozesse sich vor allem bezüglich des Phasenraums voneinander unterscheiden, reicht es aus, Korrekturen zu einem der beiden Diagramme zu berechnen. Im Endergebnis des Beitrags für den jeweils anderen Prozess sind dann nur Impulse zu vertauschen. Wir haben uns dazu entschlossen, Ein-Schleifen-Beiträge zum Photonzerfall zu berechnen. Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Quantenkorrekturen, die man betrachten muss, nämlich erstens die Vertexkorrektur



und zweitens den Selbstenergiebeitrag an externen Linien, welcher durch die folgenden drei Feynman-Diagramme beschrieben wird:



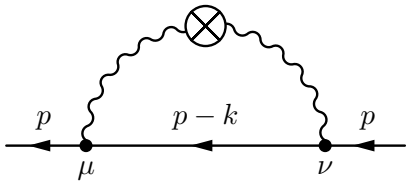
Da wir die Modifikation des Photonpropagators als Vertex-Einsetzung betrachten, handelt es sich bei den Selbstenergiebeiträgen um Drei-Punkt-Funktionen, wobei die Vertex-Korrektur bereits eine Vier-Punkt-Funktion darstellt. Zunächst werden die externen Teilchen als off-shell betrachtet.

Im Folgenden ist die Elementarladung als positiv definiert, also $e = |e| > 0$. Damit ist die Ladung des Elektrons $-e$.

16.3. Die fermionische Selbstenergie

Wir beginnen mit der Selbstenergie-Korrektur zum Fermionpropagator:

$$\mathrm{i}\Sigma^{\mathrm{modQED}}(p) = \quad + \mathcal{O}(e^3)\,, \tag{16.33}$$



mit

$$\Sigma^{\mathrm{modQED}}(p) = \mathrm{i}e^2 \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + M)\gamma_\nu}{(p-k)^2 - M^2} \frac{k_\alpha k_\beta \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}}{k^4} + \mathcal{O}(|\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}|^2)\,. \tag{16.34}$$

In der gewöhnlichen QED treten bei dieser Korrektur sowohl skalare als auch tensorwertige Schleifenintegrale ersten Ranges auf, die von einem äußeren Impuls und einer Masse abhängen. Außerdem handelt es sich um Zwei-Punkt-Funktionen, da nur zwei Propagatoren – der Fermion- und der Photonpropagator – auftreten. In der modifizierten Korrektur müssen jedoch aufgrund der Vertexeinsetzung ebenso tensorwertige Integrale zweiten und dritten Ranges ausgewertet werden, wobei es sich wegen einem zusätzlichen Faktor k^2 im Nenner sogar prinzipiell um Drei-Punkt-Funktionen handelt. Ein nützliches Hilfsmittel, um dies zu bewerkstelligen, ist die Passarino-Veltman-Reduktion, mit der sich solche tensoriellen Integrale auf gewöhnliche skalare Integrale zurückführen lassen [94, 95]. Die ausführliche Durchführung der Reduktion ist in den Abschnitt E.1.1 im Anhang verlagert. Das Ergebnis der Selbstenergie lautet[2]

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mathrm{modQED}}(p) &= \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + M)\gamma_\nu}{(p-k)^2 - M^2} \frac{k_\alpha k_\beta \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}}{k^4} = \\ &= \left\{ C_{\lambda\alpha\beta}\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu - 2\gamma_\nu C_{\mu\alpha\beta} + [(M - \not{p})\gamma_\mu\gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu] C_{\alpha\beta} \right\} \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}\,, \end{aligned} \tag{16.35}$$

mit den tensorwertigen Integralen $C_{\mu\nu}$ und $C_{\mu\nu\varrho}$

$$C_{\mu\nu} = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - M^2]k^4}\,, \quad C_{\mu\nu\varrho} = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\varrho}{[(p-k)^2 - M^2]k^4}\,, \tag{16.36}$$

die im zuvor genannten Abschnitt berechnet wurden. Man erkennt die direkte lineare Abhängigkeit des Ergebnisses von $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$ infolge der Linearisierung des Propagators. Der vierstufige Tensor ist zum Teil mit dem äußeren Impuls p^μ kontrahiert, womit die Selbstenergie (beispielsweise für den räumlich isotropen Fall) neben der Abhängigkeit von der relativistischen Invarianten $p_\alpha p^\alpha$ zusätzlich noch Terme $p_\alpha \xi^\alpha$ enthält. Das führt dazu, dass ein solcher Beitrag mit dem äußeren Impuls skaliert und sich somit direkt auf die Dispersionsrelation eines reellen Teilchens auswirken kann. Diese Tatsache wurde bereits in Abschnitt 6.5 kurz diskutiert und auf die Diskussion des Proton-Breakup-Prozesses im Partonmodell[3] angewendet.

[2] bis auf Terme höherer Ordnung in $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$

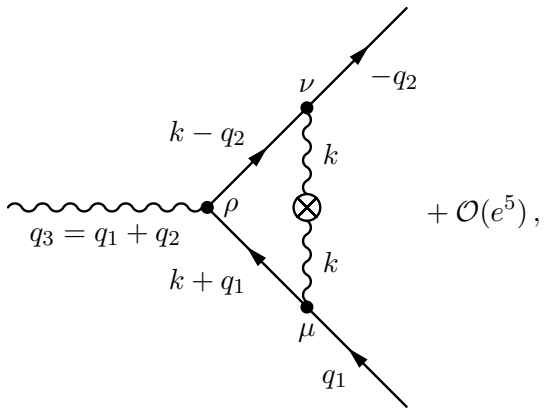
[3] siehe dazu Kapitel 6

Damit war es also möglich, die Selbstenergiekorrektur eines massiven Fermions in linearer Näherung bezüglich des Tensors $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$ auf skalare Integrale zurückzuführen, deren Ergebnis bekannt ist. Die Lorentzstruktur in Gl. (16.36) ist übersichtlich, weil es sich dabei um die linearisierte Version bezüglich der Lorentzsymmetrieverletzung handelt. Schon der quadratische Term wäre wesentlich schwieriger, denn dann müsste man einen Photonpropagator mit zwei Vertexeinsetzungen behandeln. Im Falle der Selbstenergie führte dies bereits auf tensorwertige Vier-Punkt-Funktionen. Zur exakten Behandlung der Lorentzsymmetrie sind alle diese Beiträge zu jeder Ordnung aufzusummieren und man kann annehmen, dass die funktionale Abhängigkeit von $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$ dann von komplizierter Natur ist. Die Kenntnis dieser Funktion wäre vom formalen Gesichtspunkt interessant,[4] vom phänomenologischen Standpunkt unter Berücksichtigung der experimentellen Schranken ist jedoch die lineare Näherung mehr als ausreichend.

Die Selbstenergie ist nur der erste Beitrag, den wir benötigen. Notwendig ist darüber hinaus die modifizierte Vertexkorrektur, auf die im Folgenden eingegangen werden soll.

16.4. Die Vertexkorrektur

Leider erweist sich die Berechnung der modifizierten Vertexkorrektur als wesentlich schwieriger:



mit[5]

$$\Gamma_{\varrho}^{\mathrm{modQED}}(q_1,q_2) = -\mathrm{i}e^2 \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^k} \frac{\gamma_\nu(\not{k} - \not{q}_2 + M)\gamma_\varrho(\not{k} + \not{q}_1 + M)\gamma_\mu}{[(k+q_1)^2 - M^2][(k-q_2)^2 - M^2]} \frac{k_\alpha k_\beta \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}}{k^4}\,. \quad (16.37)$$

In der gewöhnlichen QED setzt sich die Vertexkorrektur aus skalaren und tensoriellen Drei-Punkt-Funktionen ersten Ranges mit zwei äußeren Impulsen und einer Masse zusammen. Aufgrund der Modifikation durch die Vertexeinsetzung treten hier jedoch tensorielle Vier-Punkt-Funktionen zweiten, dritten und vierten Grades auf. Diese Tatsache verkompliziert die Berechnung der modifizierten Korrektur drastisch. Eine Passarino-Veltman-Zerlegung der tensoriellen

[4] auch in Bezug auf das optische Theorem, siehe dazu den letzten Abschnitt in diesem Teil der Dissertation
[5] zuzüglich Termen höherer Ordnung in $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$

Integrale ließ sich prinzipiell mit dem Computer durchführen. Jedoch erwies sich diese hier als ungemein aufwendiger im Vergleich zur Selbstenergiekorrektur, und das Ergebnis in Form von skalaren Integralen wird aufgrund des Umfangs der Entwicklung hier nicht angegeben.

Leider war es nicht möglich, die Berechnung der Vertexkorrektur fertig zu stellen. Dies lag daran, dass eine Menge der zuvor erwähnten skalaren Integrale IR-Divergenzen aufweist. Solche Divergenzen treten unter anderem dann auf, wenn das zugehörige Feynman-Diagramm zu viele masselose Linien enthält, was beispielsweise für die Drei-Punkt-Funktion C_0 mit zwei masselosen Linien der Fall ist. Im Prinzip kann man solche Divergenzen regularisieren, indem man eine kleine Photonmasse einführt. Dadurch enthalten die Integrale jedoch eine weitere Skala und sind schwieriger zu behandeln, auch wenn man die Photonmasse nur an den Stellen berücksichtigt, wo sie nötig ist. Eine andere Möglichkeit ist, dimensionale Regularisierung (also der Übergang zu $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen) auch in den Integralen durchzuführen, die keine UV-Divergenzen aufweisen. Auch dies erschwert deren Berechnung ungemein und die Organisation der IR-Divergenzen im kompletten Ergebnis der Vertexkorrektur erweist sich aufgrund der Menge der auftretenden Integrale und der umfangreichen Tensorzerlegung als heikel. Solche IR-Divergenzen müssen sich aufgrund des Bloch-Nordsieck-Theorems mit denen des Beitrags der reellen Abstrahlung eines Photons im Endzustand wegheben, siehe Abb. 16.3. Dazu wäre

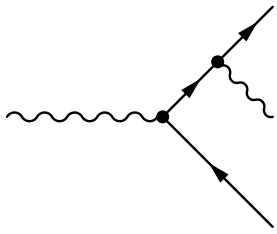


Abbildung 16.3.: Photonzerfall mit Abstrahlung eines reellen modifizierten Photons vom Fermion im Endzustand. Ein analoger Prozess ist auch für das Antifermion im Endzustand möglich.

die Zerfallsbreite dieses Beitrags durch Integration über den Phasenraum zu berechnen, was für allgemeines $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu\varrho\sigma}$ ebenso sehr umständlich ist.

Im Folgenden wird deshalb eine Technik vorgeschlagen, mit der sich zwar nicht die Ein-Schleifen-Korrektur zum Photonzerfall bzw. der Vakuum-Cherenkov-Strahlung berechnen lässt, die jedoch eine explizite Überprüfung der Ward-Identität und damit der UV-Endlichkeit der modifizierten Maxwell-Theorie auf Ein-Schleifen-Niveau erlaubt.

16.5. Techniken zur Berechnung der Quantenkorrekturen mit hierarchischen Skalen

16.5.1. Die asymptotische Entwicklung

Die Techniken zur Berechnung von Schleifenintegralen haben sich in den letzten Jahren stark weiterentwickelt. Nichtsdestotrotz stellt die exakte Berechnung von Integralen, die mehrere physikalische Skalen – beispielsweise äußere Impulse und Massen – beinhalten, eine große Herausforderung an Mensch und Computer dar und das bereits auf Ein-Schleifen-Niveau. Erkennbar ist dies an der tensorwertigen Selbstenergiekorrektur von Abschnitt 16.3, die im Rahmen der modifizierten QED benötigt wird. Das exakte Ergebnis ist prinzipiell bekannt, aber sehr länglich, von der modifizierten Vertexkorrektur aus Absatz 16.4 ganz zu schweigen.

Im Gegensatz dazu sind Schleifenintegrale mit nur einer einzigen physikalischen Skala auch auf Mehr-Schleifen-Ebene durchaus gut handhabbar. Wir benötigen daher ein Verfahren, das Integrale mit mehreren physikalischen Skalen auf solche mit einer einzigen Skala reduzieren kann. Das ist im Prinzip möglich, sofern eine Hierarchie von Skalen vorliegt, wenn also beispielsweise gewisse äußere Impulse kleiner sind als andere und diese wiederum kleiner als die Massen der Teilchen, die zu den Quantenkorrekturen beitragen.

Leider ist eine gewöhnliche Taylorentwicklung des Integranden, wie man zuerst naiv vermuten würde, nicht möglich. Eine solche kann auf zusätzliche künstliche IR-Divergenzen führen, die jedoch unphysikalisch sind und in der direkten Entwicklung des exakten Ergebnisses des Integrals nicht auftreten würden. Mathematisch rührt diese Problematik daher, dass man Differentiation und Integration vertauscht, was jedoch nur unter speziellen Voraussetzungen überhaupt möglich ist. Aus diesem Grund muss eine ausgefeiltere Methode zur Entwicklung eines Integrals bezüglich kleiner Skalen gefunden werden. Eine solche gibt es: die sogenannte asymptotische Entwicklung [96, 97, 98].

Das wesentliche Konzept der asymptotischen Entwicklung ist eine Aufteilung des Integrationsbereichs der Schleifenimpulse bezüglich der physikalischen Skalen, also äußerer Impulse und Massen. Um die Herangehensweise zu veranschaulichen, betrachten wir ein beliebiges Ein-Schleifen-Integral mit einem äußeren Impuls q und einer Masse M, wobei $M^2 \gg q^2$ sei. Dann gibt es für den Integrationsimpuls k zwei Möglichkeiten. Einerseits kann k^2 klein sein, also von der Größenordnung von q^2: $k^2 \approx q^2 \ll M^2$. Dann muss eine Taylorentwicklung des Integranden sowohl bezüglich k als auch q durchgeführt werden. Andererseits kann k^2 groß sein und in der Größenordnung von M^2 liegen: $q^2 \ll k^2 \approx M^2$. In diesem Falle ist nur eine Taylorentwicklung bezüglich q durchzuführen. Diese beiden Bereiche für k sind voneinander zu unterscheiden und deren Entwicklungen am Schluss zu addieren, so dass sich alle künstlichen Divergenzen gegenseitig wegheben.

16.5.2. Die diagrammatische Umsetzung der asymptotischen Entwicklung

Prinzipiell kann die asymptotische Entwicklung direkt für den Integranden eines Schleifenintegrals durchgeführt werden. Wesentlich sinnvoller erweist sich jedoch eine Herangehensweise, welche das Integral zunächst auf der Ebene seines entsprechenden Feynman-Diagramms bearbeitet. Das Verfahren unterscheidet sich für den Fall eines großen äußeren Impulses von dem eines kleinen.

16.5.2.1. Subgraphen und Ko-Subgraphen

Ein Feynman-Graph Γ lässt sich nach der Anzahl seiner internen bzw. externen Linien, Schleifen und Vertizes topologisch klassifizieren. An jedem Vertex können innere und äußere Linien aufeinandertreffen, prinzipiell kann man deshalb zwischen inneren und äußeren Vertizes unterscheiden. Ein Subgraph $\gamma \subset \Gamma$ ist ein Ausschnitt (also eine Unterstruktur) eines Graphen, innerhalb dessen alle Vertizes und Schleifen zu Γ gehören und alle Beziehungen zwischen den Impulsen ihre Gültigkeit haben. Der Quotientengraph Γ/γ – der sogenannte Ko-Subgraph – ergibt sich aus Γ, indem der Subgraph γ zu einem Punkt zusammengezogen wird. Letzteres entspricht dem Vorgehen, dass man alle Vertizes, an denen ein Subgraph mit dem restlichen Diagramm verbunden ist, miteinander identifiziert.

Da wir nun die grundlegenden Begriffe eingeführt haben, kann die asymptotische Entwicklung symbolisch mit folgender Gleichung dargestellt werden, wobei $\mathscr{F}(\bullet)$ für den mathematischen Ausdruck steht, welcher dem Feynman-Diagramm „$\bullet$“ entspricht:

$$\mathscr{F}(\Gamma) = \sum_{\{\gamma\}} \mathscr{F}(\Gamma/\gamma) \circ \mathcal{T}^{(N)}\{\mathscr{F}(\gamma)\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^N}\right) . \tag{16.38}$$

Hierbei ist $\mathscr{F}(\Gamma)$ das zu entwickelnde Schleifenintegral und Γ der zugehörige Feynman-Graph. Die Summe läuft über alle Subgraphen γ, welche bestimmte Bedingungen erfüllen müssen, und zwar abhängig davon, ob eine Entwicklung in kleinen äußeren Impulsen oder kleinen Massen durchgeführt wird. $\mathcal{T}$ steht für die Taylorentwicklung bezüglich aller Massen und äußeren Impulse (hier sind auch Schleifenimpulse zu berücksichtigen), die als klein angenommen werden. Diese Entwicklungen sind durchzuführen, bevor man über die Schleifenimpulse integriert. Zum Schluss muss die Entwicklung $\mathcal{T}^{(N)}\{\mathscr{F}(\gamma)\}$ in den Ausdruck für den Ko-Subgraphen $\mathscr{F}(\Gamma/\gamma)$ eingesetzt und die verbleibenden Integrale berechnet werden.

16.5.2.2. Das Vorgehen im Falle eines kleinen äußeren Impulses

Der diagrammatische Algorithmus für einen kleinen äußeren Impuls und eine große Masse funktioniert wie folgt. Im betreffenden Feynman-Graphen sind alle asymptotisch irreduziblen Subgraphen γ_{AI} zu finden. Die Kriterien für einen solchen Subgraphen sind, dass dieser erstens alle massiven Linien enthält und zweitens nach dem Durchschneiden einer massiven Linie

nicht in voneinander unabhängige Teile zerfallen darf. Der mathematische Ausdruck, welcher einem solchen Subgraphen γ_{AI} entspricht, ist nach den äußeren Impulsen zu entwickeln. Dazu gehören auch alle Schleifenimpulse, die externe Impulse bezüglich γ_{AI} sind. In Gl. (16.38) läuft die Summe über alle Familien $\{\gamma_{\mathrm{AI}}\}$ von sich nicht überlappenden asymptotisch irreduziblen Subgraphen, welche alle massiven Linien enthalten. Graphisch sind also alle Kombinationen von nicht überlappenden Kästchen zu bestimmen, welche so eingezeichnet werden, dass sich alle massiven Linien innerhalb eines solchen Kästchens befinden.

Wie aus Gl. (16.38) ersichtlich ist, werden die Propagatoren im Subgraphen entwickelt, danach die Integrale berechnet und das Ergebnis dann in den Ko-Subgraphen eingesetzt. Die Propagatoren des Ko-Subgraphen $\Gamma/\{\gamma_{\mathrm{AI}}\}$ sind alle masselos; also verbleibt zum Schluss die Berechnung der masselosen Integrale des Ko-Subgraphen.

16.5.2.3. Das Vorgehen im Falle eines großen äußeren Impulses

Das Vorgehen im Falle eines großen äußeren Impulses basiert ebenso auf Gl. (16.38), jedoch sind die Kriterien zur Auswahl der Subgraphen γ unterschiedlich. Die Summation muss über alle Subgraphen laufen, die

i) alle Vertizes beinhalten, an denen ein großer Impuls in den Graphen hinein läuft bzw. diesen verlässt und

ii) die ein-Teilchen-irreduzibel sind, falls diese Vertizes über eine zusätzliche Linie verbunden wären.

Laut Punkt (ii) müssen die Subgraphen für die asymptotische Entwicklung im Falle eines großen äußeren Impulses nicht notwendigerweise ein-Teilchen-irreduzibel sein.

16.5.3. Durchführung der asymptotischen Entwicklung auf dem Computer

Da die Komplexität der Berechnungen im Bereich der Hochenergiephysik in den letzten Jahrzehnten sehr stark zugenommen hat, ist es unerlässlich und zur Vermeidung von Fehlern auch sinnvoll, die Lösung von Problemen auf Computersysteme und Programmpakete zu stützen. Speziell zur asymptotischen Entwicklung existiert am Institut für Theoretische Teilchenphysik des KIT eine sehr mächtige Zusammenstellung von Computerprogrammen, welche vor allem für die Auswertung komplexer Probleme sehr dienlich ist. Jenes Softwarepaket beinhaltet die Programme `QGraf` [99], `Q2E/Exp` [100], `Matad` [101] und `Mincer` [102], wobei diese alle auf der Beschreibungssprache `Form` [103] basieren. Eine Zusammenfassung der vorgestellten Methoden und Programme findet sich in [104]; dessen ungeachtet soll an dieser Stelle noch kurz auf die Software eingegangen werden.

- Bei `Form` handelt es sich um eine mathematische Beschreibungssprache, die Gegenüber den gebräuchlichen Computeralgebrasystemen wie `Maple` oder `Mathematica` den Vorteil hat, dass es mit großen mathematischen Ausdrücken sehr effizient umgehen kann.

Schranken stellt theoretisch nur der freie Platz auf der Festplatte, jedoch nicht der Arbeitsspeicher. Dies macht die Sprache zu einem wesentlichen Werkzeug zu umfangreichen Berechnungen in der Teilchenphysik. `Form` beherrscht zwar wenige mathematischen Regeln direkt, arbeitet aber mit einem effektiven System, das es erlaubt, selbst Ersetzungsregeln zur Umformung mathematischer Ausdrücke zu definieren. Darüber hinaus arbeitet `Form` nicht numerisch, sondern mit rationalen Zahlen, wodurch Rundungsfehler vermieden werden, die sich ansonsten bei nachfolgenden Berechnungen aufaddieren könnten.

- `QGraf` ist ein `Fortran`-Programm, mit dessen Hilfe die Feynman-Graphen zu einem physikalischen Prozess erzeugt werden können. Der Algorithmus des Programms ist sehr effizient und zuverlässig. Dieser ist nämlich imstande, in wenigen Minuten Tausende von Graphen zu generieren. Dafür ist das zugrunde liegende physikalische Modell – also die Felder, Propagatoren und Kopplungen – sowie die für den jeweiligen Prozess charakteristischen Eigenschaften – nämlich zum Beispiel Anzahl der äußeren Teilchen und Schleifen – anzugeben. Mittels weiterer Optionen können Graphen, die nicht ein-Teilchen-irreduzibel sind, ausgeschlossen sowie zusätzliche Einstellungen vorgenommen werden.

- Die beiden Programme `Q2E` und `Exp` werden benötigt, um die asymptotische Entwicklung durchzuführen. `Q2E` verarbeitet die Ausgabe von `QGraf` weiter, so dass diese für `Exp` lesbar wird. `Exp` kann danach mittels eines ausgeklügelten Algorithmus die asymptotische Entwicklung auf diagrammatischer Ebene durchführen. Was schließlich noch bleibt, ist die Berechnung der verbleibenden massiven Tadpole-Integrale bzw. masselosen Integrale vom Propagatortyp.

- `Matad` ist ein `Form`-Programm, welches die Berechnung von massiven Tadpole-Integralen auf Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Niveau mit einer einzigen Masse in dimensionaler Regularisierung[6] erlaubt. Das Ergebnis kann je nach Anzahl der Schleifen bis zu einer bestimmten Ordnung in ε ausgegeben werden.

- Ebenso wie `Matad` basiert das Programm `Mincer` auf `Form`, dient jedoch der Berechnung von masselosen Integralen vom Propagatortyp (mit einem äußeren Impuls). Dies ist gleichwohl auf Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Niveau möglich. Sowohl `Matad` als auch `Mincer` verwenden die Ausgabe von `Exp` weiter.

Die eben aufgeführten Programme sind einzeln schon mächtig, stellen jedoch in der Kombination ein herausragendes System zur Berechnung von Quantenkorrekturen dar, denen eine Hierarchie von Skalen zugrunde liegt. Eine ausführlichere Beschreibung des vollständigen Programmpakets findet sich in der Diplomarbeit des Autors [105]. Das Paket wurde mit kleineren Erweiterungen versehen, um die speziellen Berechnungen im Rahmen der modifizierten QED durchführen zu können. Dazu gehört beispielsweise die Einführung des modifizierten Photonpropagators in Form der Vertexeinsetzung von Gl. (16.32), also

[6] mit Raumzeitdimension $d = 4 - 2\varepsilon$

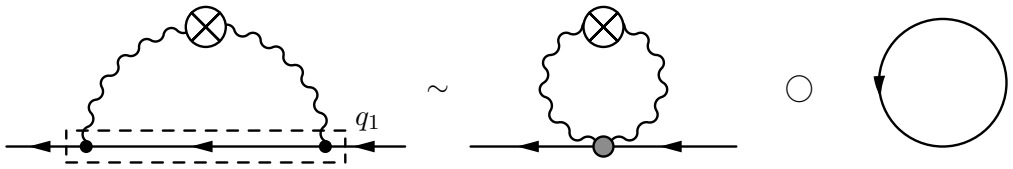
```
Dg2(i1?,i2?,?a) = ( - kappa(dummy1,i1,dummy2,i2) * Vec(dummy1,?a)
                        * Vec(dummy2,?a) * Den(?a) ) * Den(?a)
```

in der Datei `qcd_propagators`. Dabei sind `dummy1` und `dummy2` interne Summationsindizes. `i1` und `i2` sind die äußeren Lorentzindizes der Vertexeinsetzung und mit `a` wird der Impuls des Photons bezeichnet.[7]

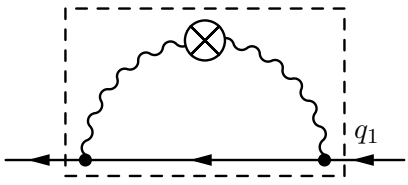
16.6. Anwendung der asymptotischen Entwicklung

16.6.1. Modifizierte Selbstenergie für kleinen äußeren Impuls

Da sich die exakte Berechnung der Ein-Schleifen-Beiträge als schwierig herausgestellt hat, möchten wir die Technik der asymptotischen Entwicklung hierauf anwenden. Dafür wählen wir die äußeren Impulse viel kleiner als die Fermionmasse. Widmen wir uns zuerst dem modifizierten Selbstenergiebeitrag mit dem äußeren Impuls q_1 und der Masse M des Fermions. Nach dem diagrammatischen Algorithmus der asymptotischen Entwicklung gibt es zwei asymptotisch irreduzible Subgraphen. Der erste setzt sich ausschließlich aus dem massiven Fermionpropagator zusammen:



Da jedoch der verbleibende Ko-Subgraph ein masseloser Tadpole ist, welcher in dimensionaler Regularisierung verschwindet, trägt dieser Term nicht bei. Dagegen gibt es nur noch den zweiten Subgraphen



welcher das gesamte amputierte Diagramm darstellt. Dieses ist bezüglich des kleinen Impulses q_1 ($q_1^2 \ll M^2$) des äußeren Fermions zu entwickeln. Die Ausgabe von `Exp` ist

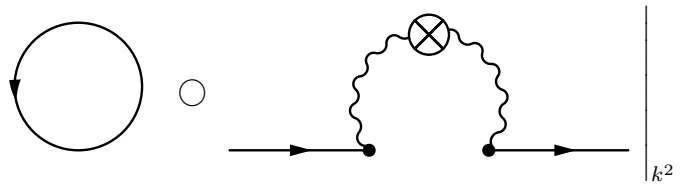
```
diagram : d1l1  subdiagram : 1
Q1 in : 1 ; out : 2
p1  :  1,2  M1   :: S 1 Q1 :  0   L0 :  1   Grp 1 . tad1l,  p1
p2  :  2,1       :: S 1 Q1 : -1 e L0 :  1   Grp 1 . tad1l,  p1
```

also lässt sich das entwickelte Diagramm auf eine Tadpole-Topologie abbilden.

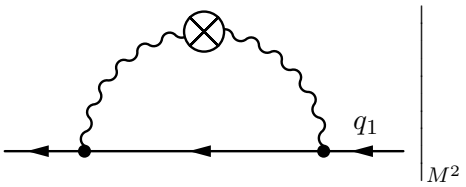
[7] zur Notation siehe [101] sowie [102]

16.6.2. Modifizierte Selbstenergie für kleine Fermionmasse

Nach den Regeln der asymptotischen Entwicklung für einen großen äußeren Impuls (also $q_1^2 \gg M^2$) gibt es zwei Subgraphen. Einer ergibt sich aus dem kompletten Feynman-Graphen, indem man die einzige massive Linie entfernt; dieser ist nach dem Schleifenimpuls k^2 zu entwickeln. Der zugehörige Ko-Subgraph ist ein massiver Tadpole:

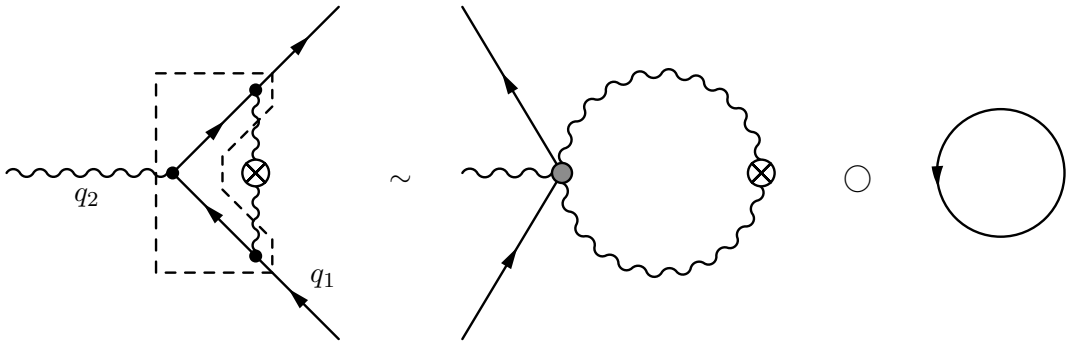


Der zweite Subgraph ist das vollständige Diagram, welches bezüglich M^2 entwickelt wird:

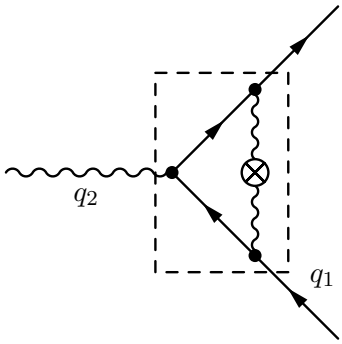


16.6.3. Modifizierte Vertexkorrektur für kleinen äußeren Impuls

Bei der Vertexkorrektur ist die Situation ähnlich. Der Impuls q_1 sei der des einlaufenden Fermions und q_2 der des Photons. Es gibt zwei asymptotisch irreduzible Subgraphen. Der erste setzt sich wieder ausschließlich aus den massiven Fermionpropagatoren zusammen:



Aus hier ist jedoch der verbleibende Ko-Subgraph ein masseloser Tadpole, der in dimensionaler Regularisierung verschwindet. Der zweite Subgraph ist das komplette amputierte Diagramm



welches nach dem Fermionimpuls $q_1^2 \ll M^2$ und dem Photonimpuls $q_2^2 \ll q_1^2 \ll M^2$ entwickelt wird. Dieses Vorgehen für den Photonimpuls genügt, wenn wir uns ausschließlich für die Überprüfung der Ward-Identität interessieren, was im nachfolgenden Abschnitt durchgeführt werden soll.[8]

Mit den obigen Annahmen lässt sich nun auch dieses Diagramm auf eine Tadpole-Topologie abbilden und die Ausgabe von `Exp` ist:

```
diagram : d1l1  subdiagram : 1
Q1 in : 1 ; out : 3
Q2 in : 2 ; out : 3
p1  :  1,2  M1  :: S 1 Q1 :  0   Q2 :  0   L0 :  1  Grp 1 . tad1l,  p1
p2  :  3,1      :: S 1 Q1 : -1 e Q2 :  0   L0 :  1  Grp 1 . tad1l,  p1
p3  :  2,3  M1  :: S 1 Q1 :  0   Q2 :  1 e L0 :  1  Grp 1 . tad1l,  p1
```

16.6.4. Modifizierte Vertexkorrektur für kleine Fermionmasse

Dieser Fall ist etwas komplizierter. Es ist nach dem Photonimpuls q_2 naiv zu entwickeln, da `Mincer` nur mit Zwei-Punkt-Funktionen umgehen kann. Der erste Subgraph ergibt sich aus dem kompletten Diagramm durch Entfernen der masselosen Photonlinie. Der Ko-Subgraph ist

[8] Wir merken jedoch an, dass für einen physikalischen Prozess, wie beispielsweise dem Photonzerfall, aufgrund der modifizierten Dispersionsrelation des Photons folgendes für den Photonimpuls gilt (für das Beispiel des räumlich isotropen Falls):

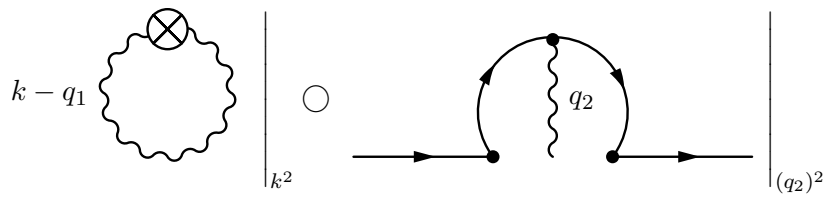
$$(q_2)^\mu (q_2)_\mu = (q_2)_0^2 - (\mathbf{q}_2)^2 = \frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} (\mathbf{q}_2)^2 - (\mathbf{q}_2)^2 = -\frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{2\widetilde{\kappa}_{00} + 3} (\mathbf{q}_2)^2 \,, \tag{16.39}$$

und deshalb für Impulse oberhalb des Schwellenimpulses

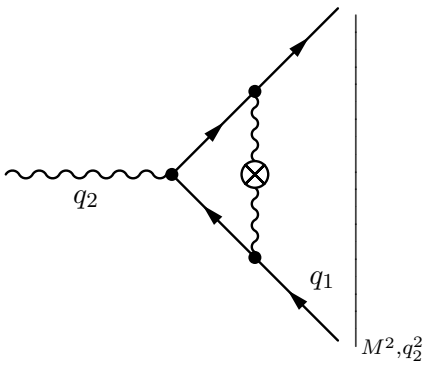
$$(q_2)^\mu (q_2)_\mu \gtrsim \frac{12}{3 - 2\widetilde{\kappa}_{00}} M^2 \sim M^2 \,. \tag{16.40}$$

Damit ist die Annahme $q_2^2 \ll M^2$ bei physikalischen Prozessen nicht gewährleistet.

ein Tadpole mit äußerer Skala q_1^2, der nach dem Schleifenimpuls k^2 zu entwickeln ist:



Der zweite Subgraph ist auch hier wiederum das komplette Diagram, welches bezüglich M^2 und q_2^2 entwickelt wird:



Damit haben wir jetzt alle Voraussetzungen beisammen, um die Ward-Identität in der modifizierten QED zu überprüfen.

Kapitel 17.

Die Ward-Identität in der Quantenelektrodynamik

17.1. Ward-Identitäten – quantenfeldtheoretische Erhaltungssätze

Eichtheorien basieren auf der sogenannten lokalen Eichinvarianz. In einer klassischen elektrodynamischen Feldtheorie mit Lagrangedichte[1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \overline{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x)\,, \tag{17.1}$$

äußert sich die lokale Eichinvarianz darin, dass eine lokale[2] Eichtransformation der Gestalt

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))\psi(x)\,, \quad \overline{\psi}(x) \mapsto \overline{\psi}'(x) = \exp(\mathrm{i}\alpha(x))\overline{\psi}(x)\,, \tag{17.2a}$$

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\,, \tag{17.2b}$$

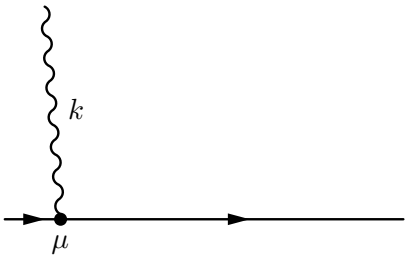
mit der Elementarladung e und einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion $\alpha(x)$ die Lagrangedichte und somit die Feldgleichungen nicht ändert. Was durch die Transformation in Gl. (17.2) geändert wird, ist also nicht die Physik, sondern letztlich nur die Art, wie wir diese beschreiben. Die lokale Eichinvarianz ist also nichts anderes als eine passive Symmetrie analog zur passiven Lorentzinvarianz, worauf in Kapitel 2 bereits ausführlich eingegangen wurde.

Das Noether-Theorem liefert zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße. Im Falle einer lokalen Eichsymmetrie gibt es einen erhaltenen Strom $j^\mu(x)$; für diesen gilt also die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ im Ortsraum bzw. $k_\mu j^\mu(k) = 0$ im Impulsraum. Beispielsweise entspricht in der Lagrangedichte von Gl. (17.1) der erhaltene Strom $j^\mu(x)$ dem bilinearen Term $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. Die Gewährleistung der lokalen Eichsymmetrie der klassischen Lagrangedichte führt zur Kopplung des Vektorpotentials $A_\mu(x)$ an den Strom $j^\mu(x)$ und beschreibt damit die Wechselwirkung zwischen elektrisch geladener Materie und elektromagnetischen Wellen.

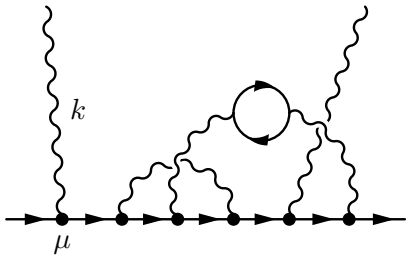
Quantisiert man eine klassische Feldtheorie, so werden die Gleichungen für die Stromerhaltung

[1] mit Vektorpotential $A_\mu(x)$ und Spinorfeldern $\psi(x)$, die den fermionischen Materieanteil beschreiben
[2] vom Raumzeitpunkt x abhängige

durch sogenannte Ward-Identitäten ersetzt. Dabei handelt es sich um die quantenfeldtheoretische Entsprechung der Kontinuitätsgleichung $k_\mu j^\mu(k) = 0$, die Beziehungen zwischen quantentheoretischen Amplituden herstellt. Wir betrachten eine QED-Amplitude $\mathcal{M}(k)$ mit einem äußeren Photon, das den Impuls k^μ tragen soll. Die Wechselwirkung des Photons soll an einem



(a) Elektromagnetisches Feld mit Impuls k^μ, das in einer klassischen elektrodynamischen Feldtheorie an einen erhaltenen Strom koppelt. Die Eichinvarianz diktiert Stromerhaltung: $k_\mu j^\mu = 0$.



(b) Photon mit Impuls k^μ, das in der QED an das Matrixelement $\mathcal{M}^\mu$ koppelt, welches gewissermaßen dem klassischen Strom mit zusätzlichen Quantenkorrekturen entspricht. Aus der Eichinvarianz folgt hier die Ward-Identität.

Abbildung 17.1.: Gegenüberstellung der Stromerhaltung in der klassischen Theorie und der Ward-Identität in der Quantentheorie.

Vertex mit Lorentzindex μ stattfinden. Entfernen wir aus der Amplitude den Polarisationsvektor $\varepsilon_\mu(k)$ bzw. $\varepsilon^*_\mu(k)$ (je nachdem ob es sich um ein ein- oder auslaufendes Photon handelt), so verbleibt ein restliches Matrixelement $\mathcal{M}^\mu$ mit einem freien Lorentzindex μ. Die Kontraktion dieses Matrixelements mit dem Viererimpuls des Photons führt zur sogenannten Ward-Identität $k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0$. Diese wiederum ist eine Folge der allgemeineren Ward-Takahashi-Identität, welche für Green-Funktionen in der QED gilt [38]:

$$-\mathrm{i}k_\mu \Gamma^\mu(p+k,p) = W^{-1}(p+k) - W^{-1}(p)\,, \quad W(p) = \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - M_0 - \Sigma(p)}\,, \tag{17.3}$$

wobei $W(p)$ den Propagator und Γ^μ die Vertexfunktion bezeichnet. $\Sigma(p)$ sind die Quantenkorrekturen zum Propagator und M_0 ist der nackte Massenparameter der Lagrangedichte. Die Ward-Takahashi-Identität stellt also eine Verbindung her zwischen Propagator und Vertexfunktion. Für kleine Photonimpulse k können wir die Gleichung entwickeln und erhalten in führender Ordnung

$$-\mathrm{i}k_\mu \Gamma^\mu(p,p) = W^{-1}(p) + k_\mu \frac{\partial W^{-1}(p)}{\partial p_\mu} - W^{-1}(p) = k_\mu \frac{\partial W^{-1}(p)}{\partial p_\mu}\,, \tag{17.4}$$

bzw.

$$-\mathrm{i}\Gamma^\mu(p,p) = \frac{\partial W^{-1}(p)}{\partial p_\mu}\,, \tag{17.5}$$

was äquivalent dazu ist. Aus dieser Gleichung lassen sich noch weitere Erkenntnisse ableiten.

Beispielsweise kann man die Quantenkorrekturen der Vertexfunktion in einem Summanden $\delta\Gamma^\mu$ abspalten, wobei γ^μ der Anteil ist, welcher sich aus der klassischen Feldtheorie ergibt. Außerdem führen wir Renormierungskonstanten Z_1, Z_2 und den renormierten Massenparameter M ein:

$$\Gamma^\mu(p,p) = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu = Z_1^{-1}\gamma^\mu\,, \quad W(p) = \frac{\mathrm{i}Z_2}{\not{p} - M}\,. \tag{17.6}$$

Aus Gl. (17.4) ergibt sich dann sofort

$$-\mathrm{i}k_\mu\Gamma^\mu(p,p) = -\mathrm{i}k_\mu Z_1^{-1}\gamma^\mu = -\mathrm{i}\not{k}Z_2^{-1}\,, \tag{17.7}$$

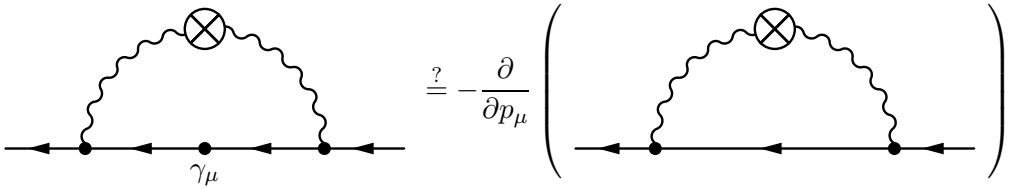
also die Gleichheit der Renormierungskonstanten Z_1 und Z_2. Schlussendlich folgt aus Gl. (17.5)

$$\delta\Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu}\,. \tag{17.8}$$

Dieser Spezialfall verknüpft die Quantenkorrekturen der Vertexfunktion mit einem verschwindenden äußeren Impuls mit der Ableitung der Quantenkorrekturen des Propagators. Die Gültigkeit der Ward-Takahashi-Identität garantiert die UV-Endlichkeit der gewöhnlichen QED und zwar in allen Ordnungen Störungstheorie.[3]

17.2. Die Ward-Identität in der modifizierten Quantenelektrodynamik

Die berechtigte Frage ergibt sich, ob Gl. (17.8) auch in der modifizierten QED gilt:



Das Auftreten von sogenannten Anomalien kann Symmetrien der klassischen Lagrangedichte – und dazu gehören auch Eichsymmetrien – auf Quantenebene zerstören. Deshalb ergibt eine Untersuchung dahingehend, dass man die Gültigkeit der Ward-Identität überprüft, durchaus Sinn. Wir benötigen dazu die modifizierte fermionische Selbstenergie $\Sigma^{\mathrm{modQED}}(p)$ sowie die Vertexkorrektur $\Gamma_\varrho^{\mathrm{modQED}}(p,p)$ aus den vorigen Abschnitten. Die Selbstenergie kann im Prinzip ohne weitere Probleme sogar exakt berechnet werden, wenn auch das Ergebnis länglich und unübersichtlich ist. Große Probleme traten jedoch im Zusammenhang mit der Berechnung von $\Gamma_\varrho^{\mathrm{modQED}}(p,q)$ auf, worauf bereits in Abschnitt 16.4 eingegangen wurde. Der für die Ward-Identität wichtige Grenzfall eines verschwindenden Photonimpulses $\Gamma_\varrho^{\mathrm{modQED}}(p,p)$ kann in der Tat mit der Technik der asymptotischen Entwicklung berechnet werden. Das in Abschnitt 16.5.3 beschriebene Programmpaket führt auf die UV-divergenten Anteile der Selbstenergie-

[3] Dies gilt bereits, wenn die Ward-Takahashi-Identität nur für die UV-divergenten Anteile sichergestellt ist.

und der Vertexkorrektur:

$$\Sigma^{\text{modQED}}(p) = \frac{\mathrm{i}e^2}{24\pi^2\varepsilon}\widetilde{\kappa}_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha}p^{\mu}\gamma^{\nu}\,, \tag{17.9a}$$

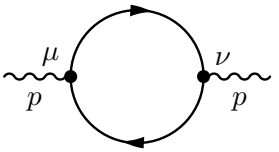
$$\delta\Gamma_{\mu}^{\text{modQED}}(p,p) = -\frac{\mathrm{i}e^3}{24\pi^2\varepsilon}\widetilde{\kappa}_{\mu\alpha\beta}{}^{\alpha}\gamma^{\beta}\,. \tag{17.9b}$$

Das Ergebnis für die modifizierte Selbstenergie konnte sowohl mit dem in Abschnitt 16.5.3 vorgestellten Programmpaket als auch aus dem exakten Ergebnis (16.34) ermittelt werden,[4] was eine sehr gute Gegenprobe darstellt. Ein ähnliches Vorgehen war ebenso bei der Vertexkorrektur erfolgreich. Beide Ergebnisse (17.9a), (17.9b) stimmen mit denen aus [23] überein bis auf einen zusätzlichen Faktor 1/2, der jedoch von anderen Konventionen für den Fermionterm in der Lagrangedichte im Vergleich zu [23] herrührt. Für die UV-divergenten Anteile lässt sich unschwer die Gültigkeit von Gl. (17.8) nachvollziehen:

$$\delta\Gamma_{\mu}^{\text{modQED}}(p,p) = -\frac{\partial\Sigma^{\text{modQED}}(p)}{\partial p^{\mu}}\,. \tag{17.10}$$

Beiträge zur Selbstenergie des Photons

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{modQED}}(p) = \quad + \mathcal{O}(e^3)\,, \tag{17.11}$$



verschwinden in allen Ordnungen Störungstheorie, da die Fermionen nicht von der Lorentzsymmetrieverletzung betroffen sind. Das alles garantiert uns bereits die UV-Endlichkeit der modifizierten Maxwell-Theorie auf Ein-Schleifen-Niveau. Zusätzlich zum divergenten Anteil können wir Terme des endlichen Anteils angeben, wobei wir uns wegen der Länge der Formeln auf den räumlich isotropen Fall beschränken wollen. Für $p^2 \ll M^2$ lauten die Entwicklungen bis $\mathcal{O}(1/M^7)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma^{\text{modQED}}}{\mathrm{i}e^2} = \frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{18}\Bigg[&\left(4\not{\xi}(p\cdot\xi) - \not{p}\xi^2\right)\frac{1}{\varepsilon} + \frac{9}{4}\xi^2 M \\
&+ \left(-\frac{5}{6}\not{p}\xi^2 - \not{p}\xi^2\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\} + \frac{4}{3}\not{\xi}(p\cdot\xi) + 4\not{\xi}(p\cdot\xi)\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\right) \\
&+ \frac{1}{M}\left(\frac{1}{4}p^2\xi^2 - (p\cdot\xi)^2\right) + \frac{1}{M^2}\left(-\frac{3}{4}\not{p}p^2\xi^2 + \frac{1}{2}\not{p}(p\cdot\xi)^2 + \frac{5}{2}\not{\xi}p^2(p\cdot\xi)\right) \\
&+ \frac{1}{M^3}\left(-\frac{1}{2}p^2(p\cdot\xi)^2 + \frac{1}{8}p^4\xi^2\right) \\
&+ \frac{1}{M^4}\left(\frac{3}{10}\not{p}p^2(p\cdot\xi)^2 - \frac{3}{10}\not{p}p^4\xi^2 + \frac{9}{10}\not{\xi}p^4(p\cdot\xi)\right)
\end{aligned}$$

[4] durch Einsetzen der divergenten Anteile der skalaren Integrale in die Passarino-Veltman-Zerlegung

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{M^5}\left(-\frac{3}{10}p^4(p\cdot\xi)^2+\frac{3}{40}p^6\xi^2\right)\\
&+\frac{1}{M^6}\left(\frac{1}{5}\not{p}p^4(p\cdot\xi)^2-\frac{1}{6}\not{p}p^6\xi^2+\frac{7}{15}\not{\xi}p^6(p\cdot\xi)\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{M^7},\varepsilon^0\right)\Bigg], \qquad (17.12)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma_\mu^{\text{modQED}}}{\mathrm{i}e^3}=&-\frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{18}\Bigg[\left(4\not{\xi}\xi_\mu-\gamma_\mu\xi^2\right)\frac{1}{\varepsilon}+\left(\frac{4}{3}\not{\xi}\xi_\mu+4\not{\xi}\xi_\mu\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}-\frac{5}{6}\gamma_\mu\xi^2-\gamma_\mu\xi^2\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\right)\\
&+\frac{1}{M}\left(\frac{1}{2}p_\mu\xi^2-2\xi_\mu(p\cdot\xi)\right)+\\
&+\frac{1}{M^2}\left(-\frac{3}{2}\not{p}p_\mu\xi^2+\not{\xi}\xi_\mu(p\cdot\xi)+5\not{\xi}p_\mu(p\cdot\xi)+\frac{5}{2}\not{\xi}\xi_\mu p^2-\frac{3}{4}\gamma_\mu p^2\xi^2+\frac{1}{2}\gamma_\mu(p\cdot\xi)^2\right)\\
&+\frac{1}{M^3}\left(\frac{1}{2}p_\mu p^2\xi^2-p_\mu(p\cdot\xi)^2-\xi_\mu p^2(p\cdot\xi)\right)\\
&+\frac{1}{M^4}\Bigg(-\frac{6}{5}\not{p}p_\mu p^2\xi^2+\frac{3}{5}\not{p}p_\mu(p\cdot\xi)^2+\frac{3}{5}\not{\xi}\xi_\mu p^2(p\cdot\xi)+\frac{18}{5}\not{\xi}p_\mu p^2(p\cdot\xi)\\
&\qquad+\frac{9}{10}\not{\xi}\xi_\mu p^4+\frac{3}{10}\gamma_\mu p^2(p\cdot\xi)^2-\frac{3}{10}\gamma_\mu p^4\xi^2\Bigg)\\
&+\frac{1}{M^5}\left(-\frac{6}{5}p_\mu p^2(p\cdot\xi)^2+\frac{9}{20}p_\mu p^4\xi^2-\frac{3}{5}\xi_\mu p^4(p\cdot\xi)\right)\\
&+\frac{1}{M^6}\Bigg(\frac{4}{5}\not{p}p_\mu p^2(p\cdot\xi)^2-\not{p}p_\mu p^4\xi^2+\frac{2}{5}\not{\xi}\xi_\mu p^4(p\cdot\xi)+\frac{14}{5}\not{\xi}p_\mu p^4(p\cdot\xi)\\
&\qquad+\frac{7}{15}\not{\xi}\xi_\mu p^6+\frac{1}{5}\gamma_\mu p^4(p\cdot\xi)^2-\frac{1}{6}\gamma_\mu p^6\xi^2\Bigg)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{M^7},\varepsilon^0\right)\Bigg]. \qquad (17.13)
\end{aligned}
$$

Auch hier lässt sich die Gültigkeit von Gl. (17.8) für jeden einzelnen Term nachprüfen, was bis $\mathcal{O}(1/M^7)$ explizit durchgeführt wurde. Entsprechend möchten wir die Ergebnisse der Entwicklungen für $p^2 \gg M^2$ bis $\mathcal{O}(M^3)$ angeben:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Sigma^{\text{modQED}}}{\mathrm{i}e^2}=&\frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{18}\Bigg[\left(-\not{\xi}\xi^2+4\not{\xi}(p\cdot\xi)\right)\frac{1}{\varepsilon}+\Bigg(-\not{p}p^{-2}(q\cdot\xi)^2-\frac{7}{6}\not{p}\xi^2+\not{\xi}\xi^2\ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\}\\
&\qquad+\frac{11}{3}\not{\xi}(p\cdot\xi)-4\not{\xi}(p\cdot\xi)\ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\}\Bigg)+M\left(3p^{-2}(q\cdot\xi)^2+\frac{3}{2}\xi^2\right)\\
&+M^2\left(-3\not{p}p^{-4}(q\cdot\xi)^2-\frac{3}{2}\not{p}p^{-2}\xi^2+9\not{\xi}p^{-2}(p\cdot\xi)\right)\\
&+M^3\Bigg(-6p^{-4}(q\cdot\xi)^2+6p^{-4}(q\cdot\xi)^2\ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\}+6p^{-4}(q\cdot\xi)^2\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\\
&\qquad+\frac{3}{2}p^{-2}\xi^2-\frac{3}{2}p^{-2}\xi^2\ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\}-\frac{3}{2}p^{-2}\xi^2\ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\Bigg)\Bigg], \qquad (17.14)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\delta\Gamma_\mu^{\text{modQED}}}{\mathrm{i}e^3}=-\frac{\widetilde{\kappa}_{00}}{18}\Bigg[\left(4\not{\xi}\xi_\mu-\gamma_\mu\xi^2\right)\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{p^6}\left\{\left(2\not{p}p_\mu p^2(q\cdot\xi)^2+2\not{p}p_\mu p^4\xi^2\right.\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 2\not{p}\xi_\mu p^4(q\cdot\xi) - 8\not{q}p_\mu p^4(q\cdot\xi) + \frac{11}{3}\not{q}\xi_\mu p^6 \\
&\quad - 4\not{q}\xi_\mu p^6 \ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\} - \gamma_\mu p^4(q\cdot\xi)^2 - \frac{7}{6}\gamma_\mu p^6\xi^2 \\
&\quad + \gamma_\mu p^6\xi^2 \ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\}\Big) \\
&+ M\left(6p_\mu p^2(q\cdot\xi)^2 + 6\xi_\mu p^4(q\cdot\xi)\right) \\
&+ M^2\left(3\not{p}p_\mu p^2\xi^2 + 12\not{p}p_\mu(q\cdot\xi)^2 - 6\not{p}\xi_\mu p^2(q\cdot\xi)\right. \\
&\quad \left. - 18\not{q}p_\mu p^2(q\cdot\xi) + 9\not{q}\xi_\mu p^4 - 3\gamma_\mu p^2(q\cdot\xi)^2 - \frac{3}{2}\gamma_\mu p^4\xi^2\right) \\
&+ M^3\left(-6p_\mu p^2\xi^2 + 3p_\mu p^2\xi^2 \ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\} + 3p_\mu p^2\xi^2 \ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\right. \\
&\quad + 36p_\mu(q\cdot\xi)^2 - 24p_\mu(q\cdot\xi)^2 \ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\} \\
&\quad - 24p_\mu(q\cdot\xi)^2 \ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\} - 12\xi_\mu p^2(q\cdot\xi) \\
&\quad \left.\left. + 12\xi_\mu p^2(q\cdot\xi) \ln\left\{\frac{-p^2+\mathrm{i}\epsilon}{\mu^2}\right\} + 12\xi_\mu p^2(q\cdot\xi) \ln\left\{\frac{\mu^2}{M^2}\right\}\right)\right\}\Big] \,.
\end{aligned}
\tag{17.15}
$$

Ebenso für $p^2 \gg M^2$ kann man die Gültigkeit von Gl. (17.8) für die einzelnen Terme der Entwicklung nachweisen.

Das Fazit ist, dass mit diesen Vorgehen der asymptotischen Entwicklung zwar kein Beweis der Ward-Identität der exakten Größen für Σ^{modQED} und $\delta\Gamma_\mu^{\mathrm{modQED}}$ erbracht werden kann. Jedoch liefert die Tatsache, dass sie für eine gewisse Entwicklungstiefe im Fall $p^2 \ll M^2$ für die Gln. (17.12), (17.13) und auch im entgegengesetzten Fall $p^2 \gg M^2$ für die Gln. (17.14), (17.15) gilt, bereits starke Anzeichen dafür, dass sie auch für die exakten Größen sichergestellt ist. Prinzipiell lässt sich die Überprüfung bei erträglicher Rechenzeit auf sehr große Potenzen in der Entwicklung erweitern.

Kapitel 18.

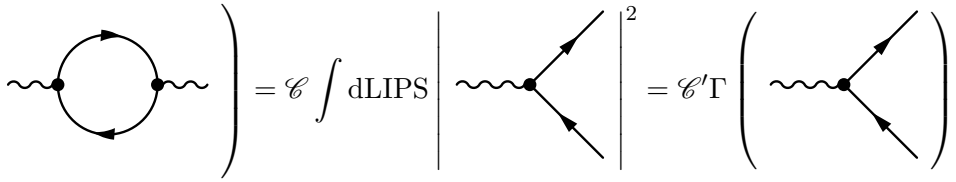
Zerfallsbreite des Photonzerfalls mittels des optischen Theorems

Abschließend möchten wir noch kurz auf das optische Theorem eingehen, mit dessen Hilfe sich die Berechnung der Zerfallsbreite für den Photonzerfall aus Kapitel 5 reproduzieren lässt. Über das optische Theorem ist der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude, bei der Anfangs- und Endzustand ein Photon mit demselben Impuls ist, verknüpft mit der Zerfallsbreite für den Photonzerfall. Gemäß des optischen Theorems gilt also bis $\mathcal{O}(\alpha)$:

$$\mathrm{Im}(\langle\gamma|T|\gamma\rangle) = \mathscr{C}\left(\int \mathrm{dLIPS}\,|\mathcal{M}_{|\gamma\rangle\mapsto|\mathrm{f\bar{f}}\rangle}|^2\right) = \mathscr{C}'\Gamma(\gamma\to\mathrm{f\bar{f}})\,, \tag{18.1}$$

gelten, wobei $|\gamma\rangle$ für einen Zustand mit einem asymptotischen Photon steht und $|\mathrm{f\bar{f}}\rangle$ für einen Zustand mit einem asymptotischen Fermion-Antifermion-Paar.[1] Die Übergangsmatrix T hängt mittels $S = \mathbb{1} + T$ mit der S-Matrix S zusammen und liefert daher den nichttrivialen Beitrag für den Übergang vom Anfangs- in den Endzustand. $\Gamma(\gamma\to\mathrm{f\bar{f}})$ ist die Zerfallsbreite und $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ sind skalare Vorfaktoren. Bei dLIPS handelt es sich um das Lorentz-invariante Phasenraummaß[2] des Zerfallsprozesses (siehe dazu beispielsweise Gl. (4.17)). Betrachten wir das Ganze diagrammatisch:

$$\mathrm{Im}\left(\quad\right) = \mathscr{C}\int \mathrm{dLIPS}\left|\quad\right|^2 = \mathscr{C}'\Gamma\left(\quad\right)\,. \tag{18.2}$$



In der gewöhnlichen QED ist der Prozess $\gamma\to\mathrm{f\bar{f}}$ (für ein reelles Photon γ und massive Fermionen) energetisch verboten, was wir schon in Kapitel 5 untersucht haben. Diese Tatsache bedeutet nichts anderes, als dass kein erlaubter Bereich im Phasenraum existiert. Damit existiert für das Ein-Schleifen-Diagramm kein Schnitt, für den beide Fermionen gleichzeitig auf der Massenschale sitzen können. Infolgedessen verschwindet der Imaginärteil des Diagramms nach dem optischen Theorem. Jedoch ändert sich die Situation in der modifizierten QED. Sei

[1] beispielsweise ein Elektron-Positron-Paar
[2] Lorentz invariant phase space measure

$s = k^\mu k_\mu$, wobei $(k^\mu) = (\omega(k), 0, 0, k)$ der Viererimpuls des Photons ist. Für das Photon im Anfangszustand gilt für den räumlich isotropen Fall

$$s = \omega(k)^2 - k^2 = -\frac{4\widetilde{\kappa}_{00}}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}} k^2 \,, \tag{18.3}$$

was in der gewöhnlichen QED gleich null ist. Handelte es sich um die gewöhnliche QED, so verhielte sich das Photon so, als ob es eine bestimmte Virtualität besitzen würde, welche durch Gl. (18.3) gegeben ist.[3] Diese „scheinbare" Virtualität sorgt dafür, dass der Photonzerfall $\widetilde{\gamma} \to \mathrm{f}\overline{\mathrm{f}}$ energetisch möglich ist, womit in diesem Falle der obige Ein-Schleifen-Beitrag einen nicht verschwindenden Imaginärteil aufweist.

Der renormierte skalare Anteil dieses Selbstenergiebeitrags in der gewöhnlichen QED ist wohlbekannt und kann auf die Form

$$\Pi_2(s) = \Pi_2(0) - \frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{3\beta - \beta^3}{2} \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) + \beta^2 - \frac{8}{3}\right], \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \,, \tag{18.4}$$

gebracht werden, wobei $\alpha = e^2/(4\pi)$ die elektromagnetische Feinstrukturkonstante ist. Für $s > 4M^2$ gibt es einen Imaginärteil und zwar

$$\mathrm{Im}(\Pi_2(s)) = \frac{\alpha}{6}(3\beta - \beta^3) \,. \tag{18.5}$$

Dabei muss es sich bereits um den richtigen funktionalen Zusammenhang der Zerfallsbreite des Photonzerfalls in der modifizierten QED handeln. Was jedoch noch fehlt, ist der richtige Vorfaktor $\mathscr{C}'$. Diesen bestimmen wir durch Vergleich der Taylorentwicklungen von Gl. (18.5) und Gl. (5.13) zu

$$\mathscr{C}' = \frac{12}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}} \frac{EM^2}{E_{\mathrm{th}}^2}, \quad E_{\mathrm{th}} = M\sqrt{2 - \frac{3}{\widetilde{\kappa}_{00}}} \,, \tag{18.6}$$

wobei E die Energie des einlaufenden Photons, M die Fermionmasse und E_{th} die Schwellenenergie ist, oberhalb derer dieser Prozess stattfinden kann. Die Schwellenenergie ergibt sich her aus der Bedingung $s > 4M^2$. Im Grenzfall der gewöhnlichen QED, also für verschwindenden isotropen Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$, geht auch die Konstante $\mathscr{C}'$ gegen null. Dies führt uns zurück zur anfänglich bemerkten Tatsache, dass der Prozess in der gewöhnlichen QED energetisch verboten ist und dass das obige Ein-Schleifen-Diagramm für ein reelles Photon in der Standard-QED keinen Imaginärteil besitzt. Das Endergebnis für die Zerfallsbreite lautet dann:

$$\boxed{\Gamma(\widetilde{\gamma} \to \mathrm{f}\overline{\mathrm{f}}) = \frac{2\alpha}{3 + 2\widetilde{\kappa}_{00}} \frac{EM^2}{E_{\mathrm{th}}^2}(3\beta - \beta^3), \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{E_{\mathrm{th}}^2}{E^2}} \,.} \tag{18.7}$$

Bemerkenswert ist, dass sich die Zerfallsbreite für den Photonzerfall auf diese Weise viel einfa-

[3] Jedoch befindet sich das modifizierte Photon $\widetilde{\gamma}$ auf seiner Massenschale, da dessen Dispersionsrelation ja modifiziert ist.

cher berechnen lässt, da der Ein-Schleifen-Beitrag zur Selbstenergie des Photons in der gewöhnlichen QED schon lange bekannt ist. Darüber hinaus kommt man so auf ein viel kompakteres Ergebnis, das aus Gl. (5.13) nicht ersichtlich war.

Kapitel 19.

Zusammenfassung zu Teil IV

Dieser Teil war der Berechnung von Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung bzw. dem Photonzerfall in der modifizierten QED gewidmet. Dabei haben wir den Lorentzsymmetrie-verletzenden Beitrag näherungsweise als tensorwertige Vertexeinsetzung behandelt. Bei den zu berechnenden Beiträgen für die physikalischen Prozesse handelt es sich um UV-divergente Propagator- und Vertexkorrekturen. Die Photon-Selbstenergie verschwindet, weil im beitragenden amputierten Diagramm auf Ein-Schleifen-Niveau nur gewöhnliche Fermionen auftreten. Die Selbstenergie des Fermions konnte mittels einer Passarino-Veltman-Zerlegung auf skalare Integrale zurückgeführt werden, wobei sich aus dem Ergebnis sowohl der UV-divergente als auch der endliche Anteil abspalten ließ. Leider erwies sich die Berechnung der Vertexkorrektur unweit problematischer aufgrund der komplizierteren Tensorstruktur und der zusätzlich auftretenden IR-Divergenzen. Zwar konnte auch diese Korrektur auf skalare Integrale reduziert werden, jedoch ließen sich die IR-Divergenzen nicht unter Kontrolle bringen. Zusammenfassend war auf diese Weise nur eine Abspaltung des UV-divergenten Anteils möglich; der endliche Anteil ließ sich jedoch nicht bestimmen.

Als Alternative wurde die Berechnung zusätzlich mittels der Technik der asymptotischen Entwicklung durchgeführt und zwar mit einem Programmpaket bestehend aus `QGraf`, `Q2E/Exp`, `Matad` und `Mincer`. Dabei war es jedoch nur möglich, aufgrund der Konzeption der Software, den Fall eines weichen äußeren Photons für die Vertexkorrektur zu behandeln. Der verbleibende Impuls des äußeren Fermions konnte entweder als klein oder groß im Vergleich zur Fermionmasse betrachtet werden. Also ließen sich auf diese Weise die Korrekturen in zwei unterschiedlichen Regimes des Fermionimpulses berechnen. Dies erlaubte eine explizite Überprüfung der Ward-Identität innerhalb der modifizierten Theorie, welche auf die endlichen Anteile ausgedehnt werden konnte, wohingegen in [23] nur die UV-divergenten Terme untersucht wurden.

Schlussendlich konnte gezeigt werden, dass sich unter Zuhilfenahme des optischen Theorems aus der Photon-Selbstenergie der gewöhnlichen QED mittels der modifizierten Dispersionsrelation des Photons das Ergebnis für die Zerfallsbreite des Photonzerfalls in der modifizierten Theorie reproduzieren lässt. Dabei handelt es sich um eine unabhängige Gegenprobe für das Resultat aus Kapitel 5.

Es ist immer angenehm, über strenge Lösungen einfacher Form zu verfügen.

Karl Schwarzschild

Teil V.

Compton-Streuprozess im Schwarzschild-Hintergrund mit modifizierter Photondispersionsrelation und Streuamplitude

Kapitel 20.

Einleitung

Die Kopplung von Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien an die Gravitation stößt zum Teil auf grundlegende Probleme. Eine dieser Schwierigkeiten fußt auf der Tatsache, dass in Modellen mit verletzter Lorentzsymmetrie kein symmetrischer kovariant-erhaltener Energie-Impuls-Tensor konstruiert werden kann. Die Eigenschaft eines symmetrischen Energie-Impuls-Tensors wird in der allgemeinen Relativitätstheorie jedoch von der Seite der Riemannschen Geometrie und der Einstein-Gleichungen gefordert. In [106] wurde gezeigt, dass sich dieses Problem im Rahmen der Riemann-Cartan-Geometrie behandeln lässt, sofern die Lorentzsymmetrie spontan gebrochen ist. Für den Fall einer expliziten Verletzung ist dies jedoch nicht möglich. In [81] hat sich herausgestellt, dass sich bestimmte Fälle der modifizierten Maxwell-Theorie konsistent an die Gravitation koppeln lassen.

Eine Verletzung der Lorentzsymmetrie kann fundamentale Folgen auf die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie, also die der Gravitation, haben. Ein Teil dieser Auswirkungen soll in diesem Abschnitt der Doktorarbeit untersucht werden. Als Basis dient dazu der Artikel [107].

Schwarzschild ist es im Jahre 1916 gelungen, eine exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Fall einer punktförmigen Masse M zu finden [108].[1] Diese sogenannte Schwarzschild-Metrik ist ebenso im Falle einer ausgedehnten Masse gültig und zwar in deren Außenbereich; es handelt sich nämlich um eine Vakuumlösung. Rückt die Ausdehnung des massiven Körpers unterhalb des sogenannten Schwarzschild-Radius $r_s \equiv 2GM/c^2$, so lässt sich zeigen, dass eine lichtartige Geodätische, sofern deren Anfangspunkt im Bereich mit $r < r_s$ liegt, nur innerhalb $r < r_s$ verläuft.[2] (Sitzt der Anfangspunkt bei $r = r_s$, so verläuft die Geodätische nur auf der Oberfläche, die durch $r = r_s$ gegeben ist.) Physikalisch hat dies zur Folge, dass weder Licht noch Materie den Bereich $r \leq r_s$ verlassen kann. Ein solches Objekt sendet von sich selbst keine Strahlung aus und erscheint deshalb vollkommen schwarz; man spricht von einem schwarzen Loch. Es soll hierbei noch bemerkt werden, dass Schwarzschild das Prinzip eines schwarzen Lochs unbekannt war; das Konzept fand erst später Einzug in die Gravitationsphysik.

[1] Einstein hatte dieses Problem zunächst näherungsweise mit einem störungstheoretischen Verfahren unter der Annahme $2GM/c^2 \ll r$ behandelt und war über Schwarzschilds Lösung sehr erfreut. Aus ihr folgte nämlich, dass das Problem eindeutig lösbar ist, was mit Einsteins Verfahren nur schwer nachzuweisen war.

[2] Hierbei ist G die Newtonsche Gravitationskonstante.

Aus dem Grund, dass schwarze Löcher klassisch keine Strahlung aussenden, sind diese astronomisch schwierig nachzuweisen. Ein direkter Nachweis ist noch nicht gelungen. Jedoch gibt es einige starke indirekte Hinweise auf die Existenz schwarzer Löcher, die bereits in Abschnitt 8.2 erläutert wurden. Sofern die beschriebenen Phänomene nicht durch schwarze Löcher verursacht werden, kann es sich nur um etwas handeln, das sich bis jetzt unserem physikalischen Verständnis entzieht. Doch auch wenn es keine schwarzen Löcher gibt, existiert die Schwarzschild-Lösung dennoch theoretisch, und die Physik schwarzer Löcher in einer Gravitationstheorie, in welcher die aktive Lorentzsymmetrie verletzt ist, eignet sich hervorragend als Spielwiese, um die Konsistenz einer solchen Theorie zu untersuchen. Das soll als Motivation dieses Teils der Dissertation dienen.

Wir wollen ein Gedankenexperiment konstruieren, das eine Untersuchung der Tatsache erlaubt, ob sich der räumlich isotrope Fall der modifizierten Maxwell-Theorie konsistent an die Gravitation koppeln lässt. Basis dieses Gedankenexperiments ist die Compton-Streuung an einem schwarzen Loch, welches aufgrund der Lorentzsymmetrie-Verletzung modifiziert ist. Aus diesem Grund folgt in den nächsten Kapiteln zunächst eine Wiederholung von Ergebnissen der gewöhnlichen Compton-Streuung im Minkowski-Raum. Danach wollen wir die Compton-Streuung auf den räumlich isotropen Fall übertragen und schlussendlich das Gedankenexperiment durchführen.

Kapitel 21.

Compton-Streuung

21.1. Compton-Streuung in gewöhnlicher Quantenelektrodynamik

Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung soll zunächst in der gewöhnlichen QED und im nächsten Abschnitt im räumlich isotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie berechnet werden. Die Quantenzahlen des Elektrons bzw. Photons seien (p_i, s_i) bzw. (k_i, r_i). Hier sind p_i und k_i die entsprechenden Viererimpulse. $s_i = \pm 1/2$ ist der Spin des Elektrons und r_i sind die physikalischen Polarisationen des Photons. $i = 1$ steht für den Anfangszustand und $i = 2$ für den Endzustand.

Die folgenden Feynman-Diagramme tragen zum Matrixelement bei: Im ersten Beitrag wird

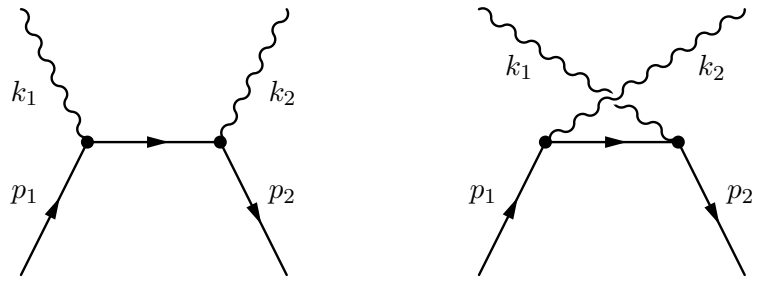


Abbildung 21.1.: Beitragende Feynman-Diagramme zur Compton-Streuung auf Baumgraphenniveau.

ein Photon mit Vierer-Impuls k_1 von einem Elektron mit Vierer-Impuls p_1 absorbiert. Dies führt zu einem angeregten virtuellen Zusand mit einer kurzen Lebenszeit. Diese kann für ein ultrarelativistisches Elektron mit Dreier-Impuls

$$p = \gamma m v\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{21.1}$$

und einem Photon der Frequenz

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}\,, \tag{21.2}$$

nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation abgeschätzt werden durch

$$\tau \approx \frac{\hbar}{2E^*} = \frac{\hbar}{2(\sqrt{(m_\mathrm{e}c^2)^2 + (pc)^2} + \hbar\omega)} \approx 9,1 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{s}\,, \tag{21.3}$$

wobei E^* die Energie des angeregten Zustands des Elektrons ist. Der obige Zahlenwert folgt mit $v \simeq c$ und einer infraroten Wellenlänge von 800 nm des Photons. Nach der Zeit τ emittiert das Elektron ein Photon mit Vierer-Impuls k_2 und befindet sich danach wieder auf der Massenschale mit Vierer-Impuls p_2. Da $\tau \ll 1$ ist, kann der Prozess im Ortsraum als lokal angenommen werden. Diese Tatsache ist im flachen Minkowski-Raum zunächst nicht von Belang, wird jedoch in der Schwarzschild-Metrik wichtig.

Im zweiten Beitrag werden die Vertizes der beiden Photonen, welche an die Elektronlinie koppeln, vertauscht. Das bedeutet, dass zuerst ein Photon mit Vierer-Impuls k_2 emittiert und danach ein Photon mit Impuls k_1 absorbiert wird. Die Amplituden beider Beiträge sind kohärent zu addieren, um Interferenzeffekte zu berücksichtigen.

In Abschnitt F.3 im Anhang wird der exakte Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung abgeleitet:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{e^4}{32\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{s^2[(mc^2)^2 - s]^3}\,\{&2[(mc^2)^2 - s](s^3 + 15(mc^2)^2 s^2 - (mc^2)^4 s + (mc^2)^6) \\ &-4s^2(s^2 - 6(mc^2)^2 s - 3(mc^2)^4)\ln\left(\frac{s}{(mc^2)^2}\right)\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{21.4}$$

Für $\sqrt{s} \mapsto mc^2$ finden wir den Thomson-Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_\mathrm{Thomson} = \frac{8\pi}{3} r_\mathrm{e}^2\,, \quad r_\mathrm{e} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \approx 2,82 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}\,, \tag{21.5}$$

mit dem klassischen Elektronenradius r_e. Der Thomson-Wirkungsquerschnitt beschreibt die Streuung von Strahlung an einem Elektron auf klassischer Ebene, was sich ebenso in der Tatsache widerspiegelt, dass in Gl. (21.5) kein $\hbar$ vorkommt. Andererseits findet man im entgegengesetzten Fall hoher Schwerpunktsenergie, also für $\sqrt{s} \gg mc^2$, die sogenannte Klein-Nishina-Formel:

$$\sigma_\text{Klein-Nishina} = \frac{(mc^2)^2}{s}\pi r_e^2 \left\{2\ln\left(\frac{s}{(mc^2)^2}\right) + 1\right\}\,. \tag{21.6}$$

$\sigma_\text{Klein-Nishina}$ enthält im Gegensatz zu σ_Thomson Quantenkorrekturen, da der Hochenergie-Limes des Streuquerschnitts von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ abhängig ist, welche ihrerseits $\hbar$ enthält. Analog gilt diese Tatsache auch für den exakten Wirkungsquerschnitt σ.

21.2. Compton-Streuung im isotropen Fall der modifizierten Quantenelektrodynamik

In diesem Abschnitt soll nun der Wirkungsquerschnitt im räumlich isotropen Fall der modifizierten QED berechnet werden. Ab jetzt möchten wir natürliche Einheiten verwenden, also $\hbar = c = G = 1$ setzen. In bestimmten Ausnahmen wird $\hbar$, c bzw. G wieder eingesetzt, um die Struktur der entsprechenden Gleichungen zu verdeutlichen.

Das spinsummierte und -gemittelte Amplitudenquadrat der modifizierten Compton-Streuung im Minkowski-Raum berechnet sich analog zur gewöhnlichen QED mit einigen Änderungen. Es lautet

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{r_1,r_2}|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma}\Pi_{\mu\varrho}\Pi_{\nu\sigma}\,, \tag{21.7a}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma} = \frac{e^4}{4}\mathrm{Sp}\Bigg\{(\not{p}_2 + m)\left[\frac{\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_1^\nu}{2p_1\cdot k_1 + k_1^2} + \frac{\gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1\cdot k_2 - k_2^2}\right] \\ \times(\not{p}_1 + m)\left[\frac{\gamma^\sigma \not{k}_1 \gamma^\varrho + 2\gamma^\varrho p_1^\sigma}{2p_1\cdot k_1 + k_1^2} + \frac{\gamma^\varrho \not{k}_2 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_1^\varrho}{2p_1\cdot k_2 - k_2^2}\right]\Bigg\}\,,\end{aligned} \tag{21.7b}$$

und der Polarisationssumme

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv \sum_{r=1,2}\overline{(\varepsilon^{(r)})}_\mu(\varepsilon^{(r)})_\nu\,. \tag{21.7c}$$

Die Gültigkeit der Ward-Identitäten

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma}k_{2,\mu} = 0\,,\quad \mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma}k_{1,\nu} = 0\,,\quad \mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma}k_{2,\varrho} = 0\,,\quad \mathcal{M}^{\mu\nu\varrho\sigma}k_{1,\sigma} = 0\,, \tag{21.8}$$

und damit die Eichinvarianz ist gewährleistet. Deshalb kann in 21.7 die Polarisationssumme durch den Ausdruck

$$\Pi_{\mu\nu} \mapsto \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\left\{-\eta_{\mu\nu} + \frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\xi_\mu\xi_\nu\right\}\,,\quad (\xi^\mu) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\,, \tag{21.9}$$

für den räumlich isotropen Fall ersetzt werden.[1] Für $k_1^2 = k_2^2 = 0$ und der Polarisationssumme der gewöhnlichen QED[2] ergibt sich das bekannte Ergebnis aus Gl. (5.81) in [38].

Hier soll der Wirkungsquerschnitt nicht im Schwerpunktsystem berechnet werden, sondern im Laborsystem, in dem sich das Elektron mit dem räumlichen Impuls $\mathbf{q}$ und das Photon mit

[1] Die Herleitung dieser Formel wird im Abschnitt A.2.1 in Anhang A präsentiert.
[2] in Kombination mit eichinvarianten Ausdrücken

dem Impuls **k** bewegt. Der Grund dieses Vorgehen ist, dass bei der Berechnung der Compton-Streuung im modifizierten Schwarzschild-Hintergrund der Streuprozess ähnlich parametrisiert werden soll. Ist die aktive Lorentzinvarianz gebrochen, treten zusätzliche Terme auf, die ebenfalls von $q \equiv |\mathbf{q}|$ abhängen, da das Elektron den Lorentzsymmetrie-verletzenden Hintergrund „spürt“ und zwar umso mehr, je höher der Impuls bezüglich des ausgezeichneten Koordinatensystems ist.

Der Einfachheit halber wollen wir uns bei dieser analytischen Betrachtung auf den Spezialfall beschränken, beim dem sich Elektron und Photon im Laborsystem entlang der z-Achse aufeinander zu bewegen. (Der Compton-Prozess im modifizierten Schwarzschild-Hintergrund wird für Elektronen und Photonen behandelt, die sich im lokalen Inertialsystem in beliebigen Richtungen zueinander bewegen; dann erfolgt die Berechnung des Wirkungsquerschnitts jedoch numerisch.) Der totale Wirkungsquerschnitt lässt sich prinzipiell für diesen Spezialfall exakt berechnen, jedoch ist das Endergebnis eine komplizierte Funktion der Impulse k, q und zusätzlich des isotropen Parameters $\widetilde{\kappa}_{00}$. Das Ergebnis ist nicht sehr aufschlussreich, kann jedoch für $k \ll m$ und zusätzlich $q \ll k \ll m$ in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$\frac{\sigma}{\pi\alpha^2} = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{8}{3} + \frac{56}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - 4\frac{q}{m}(1 + 2\widetilde{\kappa}_{00}) - \frac{4}{3}\frac{q}{k}\left(1 + \frac{14}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\right\} . \tag{21.10}$$

Die genaue Berechnung findet sich in Abschnitt F.4 im Anhang. Für $\{\widetilde{\kappa}_{00}, q, k\} \mapsto \{0, 0, 0\}$ ergibt sich der Thomson-Wirkungsquerschnitt aus Gl. (21.5), was auf jeden Fall eine gute Kontrolle für das Ergebnis ist.

Diese Vorbetrachtungen sind im Wesentlichen dazu gedacht, einige Vorgehensweisen und Näherungen bei der Berechnung im modifizierten Schwarzschild-Hintergrund zu motivieren und zu begründen. Außerdem stellen diese analytischen Ergebnisse eine sehr gute Gegenprobe dar für die folgenden numerischen Untersuchungen.

Kapitel 22.

Die Schwarzschild-Lösung

22.1. Isometrien und Killing-Vektoren

Eine Isometrie ist eine Abbildung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, unter welcher sich der Abstand zwischen zwei Punkten nicht ändert.[1] Wenn φ eine Isometrie und p, q zwei beliebige Punkte auf der Mannigfaltigkeit sind, dann gilt also $d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$ mit der Längenmetrik d. In den Isometrien, die eine Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt, spiegeln sich globale Symmetrien dieser Mannigfaltigkeit wider. Je mehr es gibt, umso symmetrischer ist der Raum und umso leichter lassen sich allgemeine Aussagen über ihn treffen, was bei asymmetrischen Mannigfaltigkeiten nicht ohne Weiteres möglich ist. Aus diesem Grunde sind Isometrien von grundlegender Bedeutung in der Riemannschen Geometrie. In der allgemeinen Relativitätstheorie hängen sie zudem mit physikalischen Erhaltungsgrößen zusammen. Damit ist es für die folgenden Berechnungen notwendig, über diese Abbildungen der Schwarzschild-Raumzeit Bescheid zu wissen.

Um mit (kontinuierlichen) Isometrien geschickt umgehen zu können, benötigt man die sogenannten Killing-Vektorfelder.[2] Dabei handelt es sich um die Erzeugenden (Generatoren) einer Isometrie in Analogie zu den Erzeugenden einer Lie-Gruppe. So, wie sich die Linearisierung der Lie-Gruppe in Form der Lie-Algebra der zugehörigen Erzeugenden einfacher untersuchen lässt als die Gruppe selbst, so gilt dies auch für abstandserhaltende Abbildungen. Damit $\xi_\mu(x)$ ein Killing-Vektorfeld ist[3], muss dessen symmetrische kovariante Ableitung verschwinden:

$$\nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x) = 0\,. \tag{22.1}$$

Man bezeichnet diese Gleichung auch als Killing-Gleichung. Die kovariante Ableitung eines Vektorfelds $H_\nu(x)$ ist definiert durch

$$\nabla_\mu H_\nu(x) = \partial_\mu H_\nu(x) - \Gamma^\varrho{}_{\nu\mu}(x) H_\varrho(x)\,, \tag{22.2}$$

[1] Beispielsweise ist das Aufklappen eines Zylinders zu einer Ebene eine Isometrie.

[2] benannt nach dem deutschen Mathematiker Wilhelm Killing

[3] Hierbei sind Killing-Vektorfelder $\xi_\mu(x)$ nicht mit ausgezeichneten Lorentzsymmetrie-verletzenden Vektoren zu verwechseln. Killing-Vektoren werden mit einer zusätzlichen Nummer in Klammern gekennzeichnet.

mit den Christoffel-Symbolen (dem affinen Zusammenhang der Metrik $g_{\mu\nu}$)

$$\Gamma^{\varrho}{}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} g^{\varrho\sigma}(x)[\partial_\mu g_{\nu\varrho}(x) + \partial_\nu g_{\mu\varrho}(x) - \partial_\varrho g_{\mu\nu}(x)]\,. \tag{22.3}$$

$g_{\mu\nu}(x)$ ist hierbei der metrische Tensor und $g^{\mu\nu}(x)$ sein Inverses, für das $g_{\mu\varrho}(x)g^{\varrho\nu}(x) = \delta_\mu{}^\nu$ gilt.

Wir benutzen nun Schwarzschild-Koordinaten $\{t, r, \vartheta, \varphi\}$, um die Schwarzschild-Raumzeit zu parametrisieren. Diese Koordinaten sind nicht die beste Wahl, da die von ihnen erzeugte Karte die Raumzeit nicht komplett überdeckt und sie außerdem bei $r = 2M$ eine Singularität aufweisen, welche nicht physikalischen Ursprungs ist.[4] Dennoch sind diese die naheliegendsten zur Parametrisierung der Schwarzschild-Raumzeit und sofern es notwendig ist, werden wir an gegebener Stelle auch andere Koordinaten verwenden. Das Quadrat des Linienelements in Schwarzschild-Koordinaten lautet nun:

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)\,\mathrm{d}t^2 - f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}\,. \tag{22.4}$$

Die explizite Lösung der Killing-Gleichung für diese Metrik ist in Abschnitt F.1 im Anhang demonstriert. Es ergeben sich die folgenden Killing-Vektoren:

$$(\xi^{(1)}_\mu) = \begin{pmatrix} f(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad (\xi^{(2)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\sin\varphi \\ r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix}\,, \tag{22.5a}$$

$$(\xi^{(3)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\cos\varphi \\ -r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \end{pmatrix}\,, \quad (\xi^{(4)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}\,. \tag{22.5b}$$

Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass es zu jeder Invarianz unter bestimmten Transformationen (Symmetrien) eine Erhaltungsgröße gibt. Beispielsweise ist für Zeittranslationen diese Erhaltungsgröße die Energie. Für Isometrien einer gekrümmten Raumzeit ist die Situation ähnlich. Besitzt man Kenntnis der Killing-Vektoren, so lassen sich mit deren Hilfe Erhaltungsgrößen für die spezielle Raumzeit konstruieren. Im Falle der Schwarzschild-Metrik entspricht der erste Killing-Vektor $\xi^{(1)}$ der Isometrie bezüglich Zeittranslationen. Die skalare Größe $\xi^{(1)}_\mu k^\mu$ mit dem Viererimpuls k^μ entspricht einer Erhaltungsgröße, die man als Killing-Energie bezeichnet. Dabei handelt es sich um die Energie, die ein Beobachter im asymptotisch flachen Bereich der Raumzeit messen würde. Analog dazu kann man über die Kontraktion mit den anderen Killing-Vektoren $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ und $\xi^{(4)}$ weitere Erhaltungsgrößen festlegen wie beispielsweise Killing-Drehimpulse. Die Betrachtung solcher Erhaltungsgrößen ist für den später zu untersuchenden Compton-Streuprozess wie auch sonst in gekrümmten Raumzeiten von

[4] analog zur z-Achse, die in Zylinderkoordinaten nicht wohldefiniert ist

wesentlicher Bedeutung.

22.2. Thermodynamik schwarzer Löcher

22.2.1. Hauptsätze der Thermodynamik schwarzer Löcher

Die Physik schwarzer Löcher ist sehr eng mit der Thermodynamik verflochten. Laut Hawkings vielfach zitiertem Artikel [109] gilt die differentielle Beziehung

$$\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi}\,\mathrm{d}A + \Omega\,\mathrm{d}L\,, \tag{22.6}$$

wobei M die Masse, κ die Oberflächengravitation, A die Fläche des Ereignishorizonts, L der Drehimpuls und Ω die Winkelgeschwindigkeit des schwarzen Lochs ist. Die Oberflächengravitation κ ist die Beschleunigung, die ein Objekt aufwenden muss, um eine feste Position direkt am Horizont eines schwarzes Lochs einzunehmen. Es handelt sich dabei um die Beschleunigung, welche ein Beobachter im asymptotisch flachen Bereich messen würde. Sie ergibt sich aus der Gleichung $\xi^a\nabla_a\xi^b|_{r=2M} = \kappa\xi^b|_{r=2M}$ mit dem zeitartigen Killing-Vektor $\xi \equiv \xi^{(1)}$ und der kovarianten Ableitung $\nabla_a\xi^b = \partial_a\xi^b + \Gamma^b{}_{\mu a}\xi^\mu$. In Schwarzschild-Koordinaten produziert diese Gleichung eine triviale Identität, weshalb andere Koordinaten wie beispielsweise Eddington-Finkelstein-Koordinaten verwendet werden müssen. Sie führt dann auf $\kappa = 1/(4M)$.

Eine Ähnlichkeit von Gl. (22.6) zum ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\mathrm{d}U = \delta q + \delta w = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N + \dots\,, \tag{22.7}$$

ist offensichtlich. Hierbei ist U die innere Energie eines thermodynamischen Systems, T dessen Temperatur, S die Entropie, P der Druck, V das Volumen, μ das chemische Potential und N die Teilchenzahl. Mit δq wird die infinitesimale Zu- oder Abfuhr einer Wärmemenge und mit δw die infinitesimale Arbeit bezeichnet, die das System leistet bzw. die am System geleistet wird. Da die Oberflächengravitation κ am Horizont konstant ist, kann man sie mit der Temperatur T und sogleich auch mit dem 0. Hauptsatz der Thermodynamik in Verbindung bringen, der besagt, dass T im thermodynamischen Gleichgewicht eine Konstante ist. Analog ergibt sich sofort eine Identifikation von A und S in Bezug auf die Tatsache, dass sowohl die Entropie (des betrachteten Systems zuzüglich seiner Umgebung) als auch die Fläche des Ereignishorizonts eines schwarzen Lochs durch keine (klassischen) physikalischen Prozesse abnehmen kann.

In Gl. (22.7) können noch weitere Terme auftreten, deren Ursprung in mechanischer oder elektrischer Arbeit liegt. Diese sind jedoch für uns jetzt nicht von Belang, ebenso wie in Gl. (22.6) der Term $L\,\mathrm{d}Q$, weil wir uns hier sowieso nur für schwarze Löcher ohne Ladung und Drehimpuls interessieren. Fassen wir also die Hauptsätze der Thermodynamik schwarzer Löcher zusammen:

- 0. Hauptsatz: Die Oberflächengravitation κ eines stationären schwarzen Lochs ist eine

Konstante.

- 1. Hauptsatz: Es gilt der differentielle Zusammenhang $\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi}\,\mathrm{d}A + L\,\mathrm{d}Q$.
- 2. Hauptsatz: Die Fläche des Ereignishorizonts nimmt niemals mit der Zeit ab: $\mathrm{d}A \geq 0$.

Bisher handelt es sich „nur“ um mathematische Analogien zwischen der Thermodynamik und der Physik schwarzer Löcher. Dass diese jedoch in der Tat einen tiefgreifende physikalischen Hintergrund haben, hat Hawking gezeigt. Wie die klassische Thermodynamik keine Quanteneffekte berücksichtigt, gilt dies auch für die allgemeine Relativitätstheorie. Bezieht man jedoch quantentheoretische Effekte mit ein, was aufgrund einer fehlenden vereinheitlichten Theorie von Gravitation und Quantentheorie nur bis zu einem gewissen Grade möglich ist, so ergeben sich hieraus physikalische Konsequenzen für schwarze Löcher. Dies soll im folgenden Kapitel erläutert werden.

22.2.2. Hawking-Strahlung

Quantenfeldtheorie im flachen Minkowski-Raum fußt auf der Tatsache, dass man freie Felder in Fourier-Moden entsprechend ein- und auslaufender ebener Wellen zerlegen kann. Dies ist beispielsweise für ein reelles skalares Feld $\phi(x)$ in der Form

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)) + a^\dagger(\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t))\right], \qquad (22.8)$$

mit Erzeugern $a^\dagger(\mathbf{k})$ und Vernichtern $a(\mathbf{k})$ möglich. Leider funktioniert ein solcher Ansatz in einer gekrümmten Raumzeit nicht, da man eine Welle nicht global als ein- oder auslaufend festlegen kann. Ein Vakuumzustand, welcher in einer asymptotisch flachen Umgebung der gekrümmten Raumzeit definiert wurde, muss in einer anderen asymptotisch flachen Umgebung nicht notwendigerweise ein Vakuumzustand sein, da Teilchen von einem Gravitationsfeld erzeugt werden können (analog zur Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren an einer Potentialstufe.[5])

Auf diese Tatsache im Zusammenhang schwarzer Löcher hat Hawking in [109] aufmerksam gemacht. Dabei hat er keine statische Schwarzschild-Lösung betrachtet, sondern einen Gravitationskollaps, aus dem ein schwarzes Loch hervorgeht und gezeigt, dass das schwarze Loch eine konstante Emissionsrate von Teilchen hat, die nicht von der Art des Kollapses abhängt. Mittels einer Zerlegung der ein- bzw. auslaufenden Lösungen der Wellengleichung in Fourier-Komponenten bezüglich ein- und auslaufender Eddington-Finkelstein-Koordinaten[6] lässt sich der Emissionsprozess geschickt beschreiben. In der Nähe des Ereignishorizonts sind die Frequenzen der Moden sehr stark blau-verschoben, was eine Näherung im Rahmen der geometrischen Optik plausibel und die Bestimmung der Phase zwischen den ein- und auslaufenden Komponenten ermöglicht. Die anschließende Überlagerung der Wellen zu einem Wellenpaket

[5] siehe dazu auch das Kleinsche Paradoxon
[6] diese Näherung ist unter bestimmten Annahmen zulässig

führt auf die Anzahl der Teilchen in Form einer Bose-Einstein-Verteilung für Bosonen und einer Fermi-Dirac-Verteilung für Fermionen:

$$\Gamma_{\text{Boson}} = \frac{\Gamma_{0,\text{Boson}}}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{k_B T_H}\right) - 1}\,, \quad \Gamma_{\text{Fermion}} = \frac{\Gamma_{0,\text{Fermion}}}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{k_B T_H}\right) + 1}\,, \quad T_H = \frac{\kappa\hbar}{2\pi c k_B}\,, \quad \kappa = \frac{c^4}{4GM}\,. \tag{22.9}$$

Hierbei ist T_H die sogenannte Hawking-Temperatur und κ die Oberflächengravitation eines schwarzen Lochs. Damit verhält sich ein schwarzes Loch unter Berücksichtigung quantentheoretischer Effekte wie ein schwarzer Körper der Temperatur T_H. Anschaulich kann man sich den Effekt durch folgendes vereinfachtes Bild klar machen: In der Nähe des Ereignishorizonts (wie überall im quantentheoretischen Vakuum) treten Quantenfluktuationen auf; es bilden sich also stets virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare. Diese Teilchen sitzen natürlich nicht auf ihrer Massenschale und prinzipiell kann man dem einen Partner eine positive und dem anderen eine negative Energie zuordnen. In einer gekrümmten Raumzeit sollte man jedoch von Killing-Energie sprechen, die ein Beobachter im asymptotisch flachen Raum misst. Tunnelt der Partner mit negativer Killing-Energie durch den Ereignishorizont, so kann dieser im inneren als reelles Teilchen existieren, da der Killing-Vektor $\xi^{(1)}(x)$ beim Übergang raumartig wird. Der Partner des Teilchens besitzt dann positive Killing-Energie und kann, sofern er ins Unendliche entkommt, als Teilchen aufgefasst werden, das vom schwarzen Loch abgestrahlt wurde. Infolge des negativen Beitrags an Killing-Energie des Teilchens, das durch den Ereignishorizont getunnelt ist, nimmt die Masse des schwarzen Lochs und damit die Fläche des Horizonts ab.

Somit sind die Größen κ und A nicht mehr nur mathematisch analog zu den thermodynamischen Größen T und S zu behandeln, sondern es kommt diesen durch den physikalischen Prozess der Teilchenabstrahlung tatsächlich eine thermodynamische Bedeutung zu. Jedoch kann der zweite Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher, so wie wir diesen in Abschnitt 22.2 definiert haben, so nicht aufrechterhalten werden, da Hawking ja gezeigt hat, dass die Fläche des Horizonts eines schwarzen Lochs durch Quanteneffekte tatsächlich abnehmen kann. Der zweite Hauptsatz ist dahingehend zu modifizieren, dass man zusätzlich auch die Entropie der umgebenden Materie des schwarzen Lochs mit einbezieht und geht damit über in den sogenannten verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher. Dieser besagt, dass sich die Summe $S + A/4$, wobei S die Entropie der umgebenden Materie ist, niemals verringern kann. Die Abstrahlung von Teilchen von schwarzen Löchern bezeichnet man heutzutage als Hawking-Strahlung.

Kapitel 23.

Kopplung der Gravitation an die modifizierte Maxwell-Theorie

23.1. Folgen für schwarze Löcher

Nachdem wir uns mit der physikalisch sehr interessanten Schwarzschild-Lösung und der Hawking-Strahlung beschäftigt haben, wollen wir uns anschauen, wie physikalische Effekte modifiziert werden, sofern die Gravitation an eine Lorentzsymmetrie-verletzende Theorie gekoppelt wird. Solche gekoppelten Theorien können interessante Effekte bezüglich schwarzer Löcher aufweisen. Beispielsweise wurde in [110, 111, 81] gezeigt, dass die Änderung von Dispersionsrelationen von Teilchen, die in Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien auftreten, zu einer multiplen Horizontstruktur schwarzer Löcher führen kann. Dies hat zur Folge, dass für eine Teilchenspezies der Horizont weiter außen liegt als für eine andere Spezies. Eine solche multiple Horizontstruktur kann die Konstruktion eines Perpetuum mobile zweiter Art ermöglichen, dass also Wärme von einer kalten zu einer warmen Umgebung transportiert wird, ohne dass sonst eine Änderung in der Umgebung stattfindet [110, 111].

23.2. Modifizierte Quantenelektrodynamik in gekrümmter Raumzeit

23.2.1. Einführung der Wirkung

Im Folgenden werden Lorentzindizes in gekrümmter Raumzeit mittels griechischer Buchstaben und Lorentzindizes in lokalen Inertialsystemen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet. Darüber hinaus sei $g_{\mu\nu}(x)$ die gekrümmte Einstein-Metrik, g deren Determinante – also $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ – und $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ die flache Minkowski-Metrik. Gekoppelt wird speziell der nicht-doppelbrechende Anteil der modifizierten QED an die Gravitation über die

folgende Wirkung:

$$S = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\mathrm{modMax}})\,, \tag{23.1a}$$

mit dem Standard-Einstein-Hilbert-Term

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{R}{16\pi}\,, \tag{23.1b}$$

dem Standard-Dirac-Term in einer gekrümmten Raumzeit

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}\left(\frac{1}{2}\gamma^a e^\mu{}_a\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\nabla}_\mu - m\right)\psi\,, \tag{23.1c}$$

und dem modifizierten Maxwell-Term

$$\mathcal{L}_{\mathrm{modMax}} = -\frac{1}{4}g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\varrho\sigma} - \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\varrho\sigma}\,,\quad \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} \equiv \kappa^{abcd}e^\mu{}_a e^\nu{}_b e^\varrho{}_c e^\sigma{}_d\,. \tag{23.1d}$$

welcher über den Vierbein-Formalismus an die Gravitation gekoppelt wurde. Der Vierbein-Formalismus erlaubt, zwischen Lorentz- und allgemeinen Koordinatentransformationen zu unterscheiden. Deshalb ist er besonders dafür geeignet, um eine Lorentzsymmetrie-verletzende Theorie an die Gravitation zu koppeln. Die Vierbeine genügen den Beziehungen

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab}\,,\quad e^\mu{}_a e_\mu{}^b = \delta_a{}^b\,,\quad e^\mu{}_a e_\nu{}^a = \delta^\mu{}_\nu\,. \tag{23.2}$$

Mit R wird der Ricci-Krümmungsskalar bezeichnet, γ^a sind die gewöhnlichen γ-Matrizen und

$$\nabla_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi + \Gamma_\mu\psi - eA_\mu\psi\,, \tag{23.3}$$

ist die eich- und Lorentz-kovariante Spinor-Ableitung mit dem Spin-Zusammenhang

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{ab}e_a{}^\nu\partial_\mu(e_{b,\nu})\,,\quad \Sigma_{ab} \equiv \frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a)\,. \tag{23.4}$$

23.2.2. Effektive Hintergrundmetrik für modifizierte Photonen

In [81] wurde gezeigt, dass man für den räumlich isotropen und den räumlich anisotropen Fall der modifizierten Maxwell-Theorie eine effektive Metrik $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$ definieren kann, so dass sich modifizierte Photonen auf Geodätischen bewegen, welche durch die Gleichung $\widetilde{\eta}^{ab}k_a k_b = 0$ bestimmt sind. Auf diese sogenannte effektive Metrik wurde bereits in Kapitel 14 Bezug genommen. Analog dazu definieren wir eine solche effektive Metrik im gekrümmten Raum:

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \frac{\kappa}{1+\kappa/2}\xi_\mu(x)\xi_\nu(x)\,,\quad \kappa = 2\widetilde{\kappa}_{\mathrm{tr}}\,, \tag{23.5}$$

mit der inversen Metrik $\widetilde{g}^{\mu\nu}$, die sich aus $\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{g}_{\nu\varrho} = \delta^{\mu}{}_{\varrho}$ ergibt. Die Stellung von Indizes wird jedoch weiterhin mit der ursprünglichen Metrik $g_{\mu\nu}$ geändert, sofern nichts anderes vermerkt ist. In [81] wurde außerdem auch die Bewegung von modifizierten Photonen in einem Schwarzschild-Hintergrund betrachtet. Eine modifizierte Maxwell-Theorie im gekrümmten Hintergrund mit den Parametern

$$\xi^{\mu}(x) = e^{\mu}{}_{a}(x)\xi^{a}(x)\,, \quad (\xi^{\mu}(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \varepsilon \equiv \frac{\kappa}{1-\kappa/2}\,, \tag{23.6}$$

bildete dabei die Grundlage. Es konnte gezeigt werden, dass speziell für diesen Fall die effektive Metrik der modifizierten Photonen wieder eine Schwarzschild-Metrik ist:

$$\mathrm{d}\widetilde{s}^2 = \mathrm{d}\widetilde{\tau}^{\,2} - \left(\frac{3(\widetilde{R}-\widetilde{\tau})}{4\widetilde{M}}\right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}\widetilde{R}^2 - \left(\frac{3}{2}(\widetilde{R}-\widetilde{\tau})\right)^{\frac{4}{3}} (2\widetilde{M})^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}\Omega^2\,, \tag{23.7}$$

mit geeignet reskaliertem Parameter $\widetilde{M}$ und Lemaître-Koordinaten $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{R}$. Das schwarze Loch besitzt für die modifizierten Photonen eine reskalierte Masse $\widetilde{M} \equiv M(1+\varepsilon)$ und damit auch einen modifizierten Horizont $\widetilde{r}_{\mathrm{hor}} = 2M(1+\varepsilon)$. Wegen $\varepsilon > 0$ liegt der Horizont für modifizierte Photonen weiter außen als $r_{\mathrm{hor}} = 2M$ für massive Fermionen, welche nicht von der Lorentzsymmetrieverletzung betroffen sind. Wir bezeichnen den Bereich zwischen den beiden Horizonten, also $2M < r < 2M(1+\varepsilon)$ als Ergosphäre in Analogie zur Ergosphäre bei rotierenden schwarzen Löchern (Kerr-Lösungen). Teilchen in der Ergosphäre einer Kerr-Lösung sind nicht für immer gefangen, sondern können aus dieser wieder in den asymptotisch flachen Bereich der Raumzeit entkommen. Für unsere Ergosphäre gilt das ebenso, sofern es sich bei den Teilchen nicht um die modifizierten Photonen handelt. Im Folgenden parametrisieren wir diesen Bereich, indem wir zusätzlich einen Parameter $\varrho \in (0,1)$ einführen. Dann lässt sich über $r = 2M(1+\varepsilon\varrho)$ die gesamte Ergosphäre in radialer Richtung überdecken.

23.3. Untersuchungen zum Compton-Streuprozess in der Ergosphäre

An dieser Stelle haben wir die notwendigen Voraussetzungen geschaffen, um schließlich folgendes Gedankenexperiment durchzuführen: Ein Elektron und ein modifiziertes Photon sollen im asymptotisch flachen Bereich (also im Unendlichen) einer Schwarzschild-Raumzeit so präpariert werden, dass sie sich auf Geodätischen zum schwarzen Loch bewegen, um in der Ergosphäre miteinander zu streuen. Der Prozess soll deshalb in der Ergosphäre stattfinden, weil somit auf jeden Fall eine negative Killing-Energie des gestreuten modifizierten Photons gewährleistet wird, da sich dieses dann bereits hinter seinem eigenen Horizont befindet. Das Elektron hält sich jedoch stets vor seinem Horizont auf, kann ins Unendliche entkommen (sofern einige

weitere Bedingungen erfüllt sind) und zwar mit einer Killing-Energie, welche größer ist als die Summe der Killing-Energien von Elektron und Photon im Anfangszustand. Dies ist möglich,

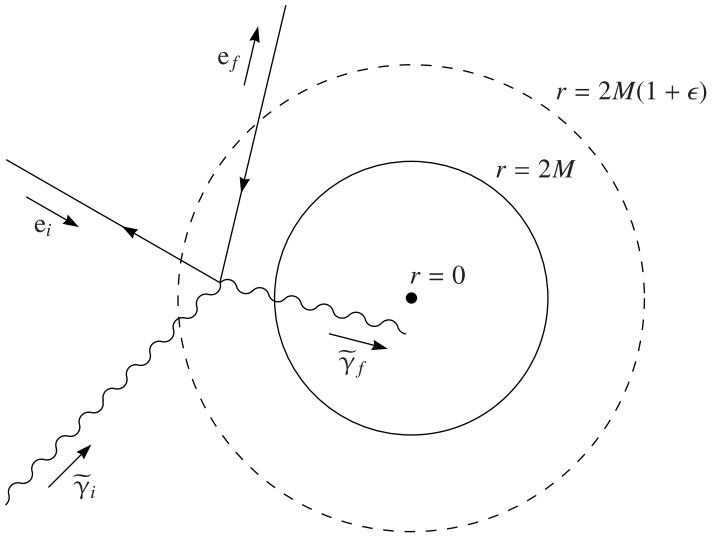


Abbildung 23.1.: Compton-Streuprozess, welcher in der Ergosphäre eines modifizierten schwarzen Lochs stattfindet. Mit e_i und $\widetilde{\gamma}_i$ werden Elektron bzw. modifiziertes Photon im Anfangszustand und mit e_f und $\widetilde{\gamma}_f$ Elektron bzw. modifiziertes Photon im Endzustand bezeichnet.

da das Photon (in Bezug auf einen Beobachter im Unendlichen) eine negative Killing-Energie besitzt. Physikalisch ist das wiederum, wie in Abschnitt 22.2.2 bereits besprochen, durchaus haltbar, denn das Photon befindet sich dann innerhalb seines Ereignishorizonts und ist nicht mehr beobachtbar.

23.3.1. Lokales Inertialsystem, Killing-Energie und Killing-Drehimpuls des Prozesses

Das starke Äquivalenzprinzip besagt, dass ein Beobachter allein durch Analyse der für ihn gültigen Naturgesetze nicht unterscheiden kann, ob er in einem Schwerefeld frei fällt oder weit entfernt von jeglichen Massen ruht.[1] Somit ist es möglich, in einer beliebigen Raumzeit lokal ein Inertialsystem zu wählen, was die Beschreibung der Physik vereinfacht. Mathematisch steckt hinter dem Äquivalenzprinzip, dass sich an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit eine Tangentialebene legen lässt, welche die Mannigfaltigkeit lokal linearisiert und die Definition beispielsweise einer Metrik erst ermöglicht. Aus dem starken Äquivalenzprinzip folgen Geodätische der Raumzeit als Trajektorien aller Teilchen. Die Bewegung auf Geodätischen erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit, also kräftefrei. Das lokale Inertialsystem ist also das eines frei fallenden Beobachters. Damit ist heuristisch klar, dass beide Formulierungen einander entsprechen.

[1] Das gilt jedoch nur lokal, streng genommen in einem einzigen Punkt. Auf ausgedehnte Objekte wirken in Gravitationsfeldern zusätzlich Gezeitenkräfte.

Zur Betrachtung des Compton-Streuprozesses ist es geschickt, das starke Äquivalenzprinzip auszunutzen und am Ort der Streuung

$$r_{\text{streu}} = 2M(1+\varepsilon\varrho)\,, \quad \theta_{\text{streu}} = \frac{\pi}{2}\,, \quad \phi_{\text{streu}} = 0\,, \tag{23.8}$$

in ein lokales Inertialsystem zu transformieren. Beim kovarianten Vierimpuls k_μ handelt es sich um den physikalischen Vierimpuls, der im Inertialsystem als k_a mit $a \in \{0,1,2,3\}$ bezeichnet werden soll. Die Verwendung von Lemaître-Koordinaten $\widetilde{x} = (\tau, R, \vartheta, \varphi)$ am Streupunkt ist zunächst geschickter, da diese bei $r = 2M$ keine Koordinatensingularität aufweisen. Kovariante Vierervektoren können dann mittels des Vierbeins

$$(e_\tau{}^0)_{\text{streu}} = 1\,, \quad (e_R{}^1)_{\text{streu}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varrho}}\,, \quad (e_\theta{}^2)_{\text{streu}} = (e_\phi{}^3)_{\text{streu}} = 2M(1+\varepsilon\varrho)\,, \tag{23.9}$$

am Streupunkt zu diesen Koordinaten transformiert werden. Im Abschnitt F.2 im Anhang ist gezeigt, dass sich Killing-Energie und Killing-Drehimpuls dann schreiben lassen als

$$E_{\text{Killing}} = k_0 + \frac{k_1}{\sqrt{1+\varepsilon\varrho}}\,, \quad L_{\text{Killing}} = 2M(1+\varepsilon\varrho)\sqrt{k_2^2+k_3^2}\,. \tag{23.10}$$

23.3.2. Bedingungen an den Compton-Prozess

1) Kriterium für radial ein- und auslaufende Teilchen:

   In Schwarzschild-Koordinaten ist ein Teilchen für $\dot{r}(t) > 0$ radial auslaufend und $\dot{r}(t) < 0$ radial einlaufend, wobei der Punkt für eine Ableitung bezüglich der Schwarzschild-Zeit t steht. Die r-Komponente des kontravarianten Vierer-Impulses ist proportional zu $\dot{r}$: $k^r \propto \dot{r}$. Somit muss man k^r aus dem Vierer-Impuls berechnen und dies wurde im Abschnitt F.2 in Anhang F bewerkstelligt. Damit ist k^r gegeben durch:

   $$k^r = -\frac{k_0}{\sqrt{1+\varepsilon\varrho}} - k_1\,. \tag{23.11}$$

   Infolgedessen ist ein Teilchen auslaufend, sofern

   $$-k_0 - k_1\sqrt{1+\varepsilon\varrho} > 0\,, \tag{23.12}$$

   und einlaufend für

   $$-k_0 - k_1\sqrt{1+\varepsilon\varrho} < 0\,. \tag{23.13}$$

2) Das effektive Potential in der Schwarzschild-Metrik für massive und masselose Teilchen:

   Die Lösung der Geodätengleichung liefert die Weltlinie von massiven bzw. masselosen Teilchen. Diese kann – analog zu Zentralkraftproblemen in der nicht-relativistischen Mechanik – auf die Bewegung des Teilchens in einem effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r)$ entlang der

radialen Schwarzschild-Koordinaten r beschränkt werden. Mit der Killing-Energie E und dem Killing-Drehimpuls L gilt:

$$\frac{E^2}{2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff,masselos}}(r)\,, \quad V_{\text{eff,masselos}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^3}{r^3}\,, \tag{23.14}$$

für masselose Teilchen und

$$\frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff,massiv}}(r)\,, \quad V_{\text{eff,massiv}}(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{r^2}+1\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)\,, \tag{23.15}$$

für massive Teilchen mit der spezifischen Energie $\varepsilon = E/m$ und dem spezifischen Drehimpuls $l = L/m$. Im masselosen Fall weist das effektive Potential ein Maximum bei $r = 3M$ auf:

$$V^{(\text{max})}_{\text{eff,masselos}} = \frac{1}{6}\left(\frac{L}{3M}\right)^2\,. \tag{23.16}$$

Der Potentialwall für masselose Teilchen besitzt immer ein Maximum unabhängig von

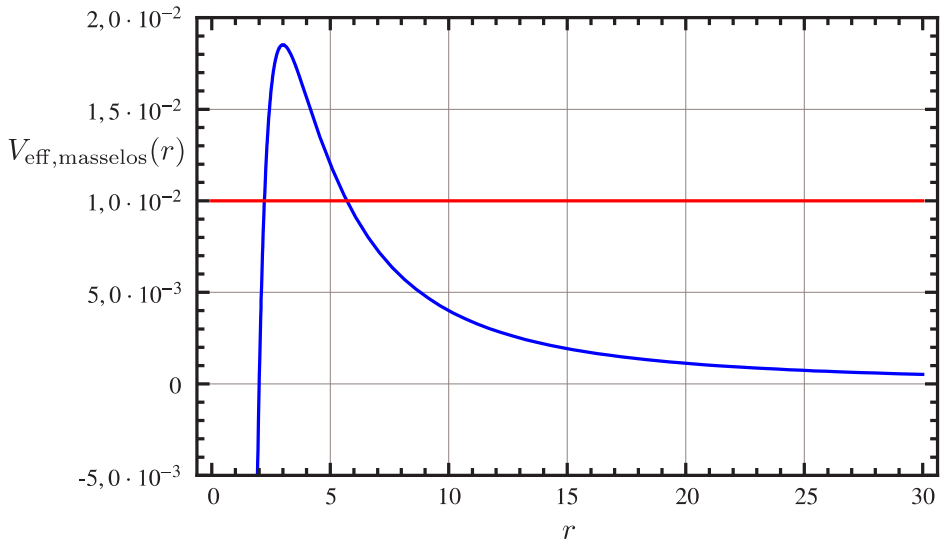


Abbildung 23.2.: Potentialwall der Schwarzschild-Metrik für masselose Teilchen in Abhängigkeit von r nach Gl. (23.14). Für das Schaubild wurden die Werte $M = 1$ und $L = 1$ gewählt. Die gestrichene (rote) Linie kennzeichnet einen bestimmten Wert für die Killing-Energie.

L und M. Die Situation ist anders im massiven Fall, bei dem das effektive Potential ein Maximum bei $r = r_-$ und ein Minimum bei $r = r_+$ aufweist, wobei $r_\pm$ gegeben sind durch

$$r_\pm = \frac{l^2 \pm l\sqrt{l^2 - 12M^2}}{2M}\,. \tag{23.17}$$

Sowohl ein Maximum als auch ein Minimum existieren nur dann, wenn $l^2 > 12M^2$ ist,

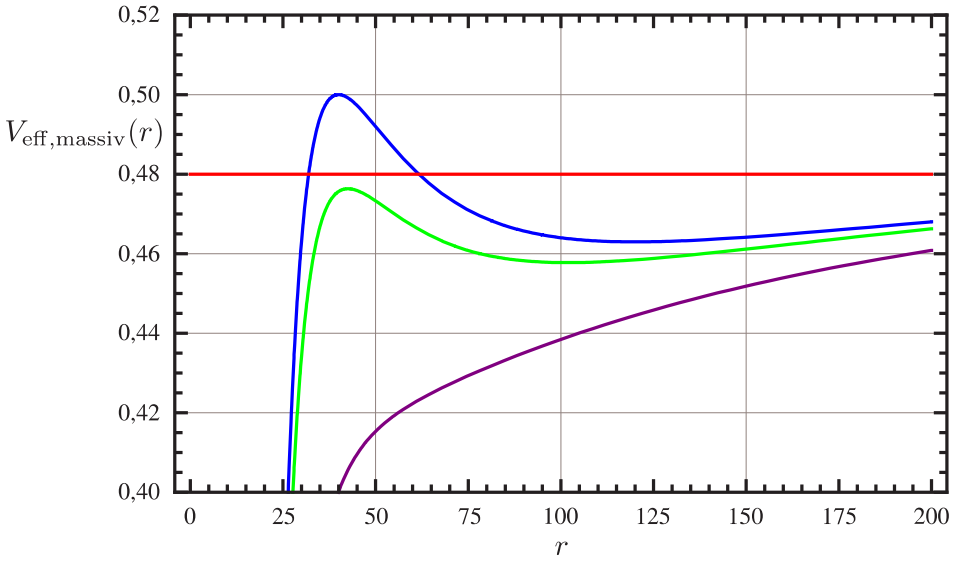


Abbildung 23.3.: Dargestellt sind Potentialwälle der Schwarzschild-Metrik für massive Teilchen mit $m = 1$ in Abhängigkeit von r nach Gl. (23.15); außerdem ist $M = 10$ gesetzt. Für die durchgezogene (blaue) Kurve wurde $L = 40$ verwendet, für die gestrichene (grüne) Kurve $L = 38$ und für die gepunktete/gestrichene (violette) Kurve $L = 31$.

also für einen ausreichend großen reduzierten Drehimpuls l. Für abnehmenden Drehimpuls l dämpft der Newtonsche Anteil $V_{\text{Newton}} = -M/r$ des Potentials dieses Maximum und die Positionen r_- bzw. r_+ rücken aufeinander zu. Für $l = 2\sqrt{3}M$ fallen sie zusammen und es bildet sich ein Sattelpunkt. Infolgedessen besitzt $V_{\text{eff,massiv}}$ für $l^2 < 12M^2$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Für masselose Teilchen gibt es den Newtonschen Anteil nicht und deshalb findet dann keine Dämpfung des Maximums statt, weshalb es für masselose Teilchen schwieriger ist, ins Unendliche zu entkommen.

Mittels dieser Vorbetrachtungen können die Bedingungen an die Teilchen für einen möglichen Compton-Streuprozess nun wie folgt zusammengefasst werden:

1) Die Killing-Energie sowohl des Elektrons als auch des modifizierten Photons müssen größer als null sein. Für das Elektron ist dies garantiert, aber nicht für das Photon, da sich dieses bereits hinter seinem eigenen Horizont befindet. Damit muss also gelten:

$$k_0^{\gamma,\text{in}} + \frac{k_1^{\gamma,\text{in}}}{\sqrt{1+\varrho\varepsilon}} > 0\,. \tag{23.18}$$

2) Sowohl Elektron als auch modifiziertes Photon im Anfangszustand müssen radial einlaufen. Für das Photon ist dies bereits erfüllt, für das Elektron jedoch explizit zu prüfen und zwar lautet die Bedingung:

$$-k_1^{\text{e,in}}\sqrt{1+\varrho\varepsilon} - k_0^{\text{e,in}} < 0\,. \tag{23.19}$$

3) Das einlaufende Photon muss den Potentialwall für masselose Teilchen überwinden:

$$\dot{r}^2 = (1+\varepsilon)^3 \left(E^{\gamma,\mathrm{in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - \frac{1}{27M^2}\left(L^{\gamma,\mathrm{in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 > 0\,. \tag{23.20}$$

4) Das einlaufende Elektron muss den Potentialwall für massive Teilchen überwinden. Weil ein Maximum in Abhängigkeit vom Drehimpuls des Elektrons auftritt, kann man eine Fallunterscheidung durchführen. Für $l^2 \leq 12M^2$ ist das Potential monoton steigend und es muss nur die Bedingung

$$m\dot{r}^2 = \left(E^{\mathrm{e,in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - m^2 > 0\,, \tag{23.21}$$

erfüllt sein. Für $l^2 > 12M^2$ muss dagegen

$$m\dot{r}^2 = \left(E^{\mathrm{e,in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - 2m^2 V_{\mathrm{eff,massiv}}(r_-) > 0\,, \tag{23.22a}$$

mit

$$r_- = \frac{\left(L^{\mathrm{e,in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - L^{\mathrm{e,in}}_{\mathrm{Killing}}\sqrt{\left(L^{\mathrm{e,in}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - 12M^2m^2}}{2Mm^2}\,, \tag{23.22b}$$

gelten.

5) Die Killing-Energie des Elektrons im Endzustand muss größer als null und die Killing-Energie des Photons im Endzustand kleiner als null sein. Die erste Bedingung ist ohnehin erfüllt, da sich das Elektron noch vor seinem Horizont befindet. Für die zweite muss

$$k_0^{\gamma,\mathrm{out}} + \frac{k_1^{\gamma,\mathrm{out}}}{\sqrt{1+\varrho\varepsilon}} < 0\,, \tag{23.23}$$

gelten.

6) Das Photon im Endzustand muss radial einlaufen und das Elektron im Endzustand radial auslaufen. Da das Photon sich hinter seinem eigenen Horizont befindet, ist die erste Bedingung automatisch gewährleistet. Die zweite Bedingung führt auf:

$$-k_1^{\mathrm{e,out}}\sqrt{1+\varrho\varepsilon} - k_0^{\mathrm{e,out}} > 0\,. \tag{23.24}$$

7) Das Elektron im Endzustand muss den Potentialwall wieder überwinden, um ins Unendliche zu gelangen. Analog zu Punkt (4) muss für $l^2 < 12M^2$ die Ungleichung

$$m\dot{r}^2 = \left(E^{\mathrm{e,out}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - m^2 > 0\,, \tag{23.25}$$

erfüllt sein und für $l^2 > 12M^2$:

$$m\dot{r}^2 = \left(E^{\mathrm{e,out}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - 2m^2 V_{\mathrm{eff,massiv}}(r_-) > 0\,, \tag{23.26a}$$

mit

$$r_- = \frac{\left(L^{\mathrm{e,out}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - L^{\mathrm{e,out}}_{\mathrm{Killing}}\sqrt{\left(L^{\mathrm{e,out}}_{\mathrm{Killing}}\right)^2 - 12M^2m^2}}{2Mm^2}\,. \tag{23.26b}$$

23.4. Numerische Analyse des Prozesses

23.4.1. Parametrisierung des Prozesses und numerische Integration

Um das Problem des Compton-Streuprozesses praktikabel anzugehen, ist eine sinnvolle Parametrisierung der Kinematik aller beteiligten Teilchen notwendig. Im Wesentlichen wurden die folgenden beiden Parametrisierungen gewählt und die entsprechenden Berechnungen mit beiden Arten von Parametrisierungen bestimmt, was sich als wertvolle Gegenprobe für die Richtigkeit der Ergebnisse erwiesen hat. Die erste Parametrisierung ist ähnlich zu der in [107]:

$$(k_a)^{\gamma,\mathrm{in}} = E_{\gamma,\mathrm{in}}\left(1, \zeta\beta_1, \zeta\beta_2, \zeta\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_2^2}\right)\,, \tag{23.27a}$$

$$(k_a)^{\mathrm{e,in}} = \left(\sqrt{p^2+m^2}, p_x, p_y, p_z\right)\,, \quad p^2 = p_x^2+p_y^2+p_z^2\,, \tag{23.27b}$$

$$(k_a)^{\gamma,\mathrm{out}} = \widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}\left(1, \zeta\delta_1, \zeta\delta_2, s\zeta\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}\right)\,, \tag{23.27c}$$

$$k_a^{\mathrm{e,out}} = k_a^{\mathrm{e,in}} + k_a^{\gamma,\mathrm{in}} - k_a^{\gamma,\mathrm{out}}\,. \tag{23.27d}$$

Die Energie $E_{\gamma,\mathrm{in}}$ des Photons im Anfangszustand ist beliebig, bis auf die Tatsache, dass sie größer als null sein sollte. $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ist der räumliche Impuls des Elektrons. Die Energie $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$ des Photons im Endzustand ist kein freier Parameter, sondern ergibt sich direkt aus der Energieerhaltung. Weiterhin ist $\zeta \equiv \sqrt{1+\varepsilon} > 1$ und β_1, β_2, δ_1, δ_2 variieren von -1 bis 1, wobei zusätzlich die Ungleichungen $\beta_1^2+\beta_2^2 \leq 1$ und $\delta_1^2+\delta_2^2 \leq 1$ erfüllt sein müssen. Der Vierervektor des Photons im Endzustand wurde hierbei in kartesischen Koordinaten parametrisiert, wobei für die Konstante s die Werte ± 1 gewählt werden müssen, um den kompletten Wertebereich der Komponenten des Vierervektors abzudecken. Möglich ist jedoch auch die direkte Parametrisierung dieses Vierervektors in Kugelkoordinaten mit den Winkeln (ϑ, φ), wo diese Konstante s entfällt, also

$$(k_a)^{\gamma,\mathrm{out}} = \widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}\left(1, \zeta\sin\vartheta\cos\varphi, \zeta\sin\vartheta\sin\varphi, \zeta\cos\vartheta\right)\,. \tag{23.28}$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes des Prozesses ist die letztere Art der Parametrisierung besser geeignet. Wie schon erwähnt, folgt $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$ aus der Energieerhaltung und zwar am

schnellsten aus der On-Shell-Bedingung des Elektrons im Endzustand

$$k_a^{\mathrm{e,out}} k_b^{\mathrm{e,out}} \eta^{ab} = m^2 \,, \tag{23.29}$$

Diese Gleichung führt auf zwei mögliche Lösungen für $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$. Eine entspricht dabei für verschwindenden Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter ε dem Wert für die Energie des Photons im Endzustand bei der gewöhnlichen Compton-Streuung. Die andere Lösung divergiert für $\varepsilon \mapsto 0$. Im Falle der gewöhnlichen QED liegt diese also im Unendlichen und sie kommt erst im Falle bestehender Lorentzsymmetrieverletzung als zusätzliche Lösung in Frage. Es hat sich im Laufe der Untersuchungen herausgestellt, dass letztere Lösung die für unsere Problemstellung brauchbare ist.

Zusammenfassend handelt es sich prinzipiell um einen zehndimensionalen Parameterraum. Die Elektronmasse m ist die physikalische Skala des Problems und $E_{\gamma,\mathrm{i}}/m$, p_x/m, p_y/m und p_z/m sind dimensionslose Größen. Somit wird der Parameterraum durch das zehndimensionale Tupel $(\varepsilon, \varrho, E_{\gamma,\mathrm{in}}/m, p_x/m, p_y/m, p_z/m, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2)$. aufgespannt. Analytische Voruntersuchungen in [112] haben gezeigt, dass der Prozess kinematisch für Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter ε in der Größenordnung von eins favorisiert ist. Genauer wurde festgestellt, dass es eine untere Schranke für ε gibt, ab welcher der Prozess kinematisch nicht mehr möglich ist. Auf diese Tatsache wird im späteren Verlauf dieses Teils der Dissertation eingegangen. Für diese Betrachtungen hier werden wir $\varepsilon = 1/2$ wählen. Darüber hinaus ist es für den modifizierten Compton-Prozess günstig, wenn der Streupunkt nahe am äußeren Rand der Ergosphäre liegt. Dies bedeutet $\varrho \lesssim 1$ und wir entscheiden uns für die Wahl $\varrho = 99/100$. Damit wird die Größe des Parameterraums zumindest um zwei Dimensionen reduziert. Den verbliebenen achtdimensionalen Raum analytisch zu untersuchen, ist zwar prinzipiell in einem gewissen Rahmen möglich, erweist sich aber dennoch als sehr schwierig. Zumindest konnte mit analytischen Methoden unter erheblichem Aufwand ein erlaubter Punkt im Phasenraum gefunden werden [112], und zwar:

$$\varepsilon = 1/2 \,, \quad \varrho = 99/100 \,, \quad E_{\gamma,\mathrm{in}} \approx 87,9082\, m \,, \quad \beta_1 = 9974/10000 \,, \quad \beta_2 = 0 \,, \tag{23.30a}$$

$$p_x = -82\, m \,, \quad p_y = 0 \,, \quad p_z = 6\sqrt{91}\, m \,, \quad \delta_1 = 74/100 \,, \quad \delta_2 = 0 \,, \quad s = 1 \,. \tag{23.30b}$$

Zusätzlich ergibt sich $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}} = 5\, m$. Numerisch lauten die Vierervektoren:

$$(k_a)^{\gamma,\mathrm{in}} \approx \begin{pmatrix} 87,9082 \\ -79,6722 \\ 0 \\ 72,4163 \end{pmatrix} m \,, \quad (k_a)^{\mathrm{e,in}} \approx \begin{pmatrix} 17,0968 \\ -8,44175 \\ 0 \\ -14,8337 \end{pmatrix} m \,, \tag{23.31a}$$

$$(k_a)^{\gamma,\mathrm{out}} \approx \begin{pmatrix} 5,00000 \\ -6,11393 \\ 0 \\ 0,346272) \end{pmatrix} m \,, \quad (k_a)^{\mathrm{e,out}} \approx \begin{pmatrix} 100,005 \\ -82,0000 \\ 0 \\ 57,2364 \end{pmatrix} m \,. \tag{23.31b}$$

Ein weiteres analytisches Studium des Prozesses ist nicht zwingend notwendig. Man kann nämlich aus einer numerischen Analyse schon einen großen Teil von physikalischen Erkenntnissen ziehen, wie im Folgenden gezeigt wird. Die numerische Untersuchung wird sich zunächst allein auf den Phasenraum beschränken. Das Ziel dabei ist, Bereiche in diesem hoch-dimensionalen Parameterraum aufzuspüren, wo unter Berücksichtigung der in Abschnitt 23.3.2 aufgeführten Bedingungen der Prozess kinematisch erlaubt ist. Um jedoch letztlich eine Aussage darüber zu treffen, ob man mit diesem Compton-Streuprozess tatsächlich den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz verletzen kann, ist zusätzlich eine Berechnung des Wirkungsquerschnittes notwendig. Nur allein die Aussage, dass der erlaubte Bereich im Phasenraum beispielsweise sehr klein ist, reicht nicht aus. Es könnte ja sein, dass gerade in diesem kleinen Bereich das Amplitudenquadrat große Werte annimmt, was zu einem großen Wirkungsquerschnitt für den Prozess führen könnte.

Sowohl die Durchsuchung des Parameterraums nach erlaubten Impulskonfigurationen als auch die Berechnung des Wirkungsquerschnitts wird mit der Monte-Carlo-Methode durchgeführt. Dabei handelt es sich um „Brute Force“ in dem Sinne, dass zufällige Punkte im Parameterraum gewürfelt und anschließend die notwendigen Bedingungen für einen erlaubten Streuprozess überprüft werden. Das Monte-Carlo-Verfahren ist eine effektive Technik, um komplizierte Integrale in hoch-dimensionalen Räumen zu berechnen, wenn andere Verfahren versagen. Das prinzipielle Vorgehen in einer Dimension ist, den Integranden an verschiedenen Punkten des Integrationsgebiets auszuwerten, diese Werte zu summieren und durch die Anzahl der Punkte zu dividieren:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \approx \frac{a-b}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,. \tag{23.32}$$

Allgemein für d Dimensionen ist das Ergebnis mit der Volumen $V(d)$ des Integrationsgebiets zu multiplizieren:

$$\int \mathrm{d}^d x\, f(\mathbf{x}) \approx \frac{V(d)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i)\,, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)\,, \tag{23.33}$$

Speziell im eindimensionalen Fall gilt $V(1) = a - b$ und wir erhalten das Ergebnis aus Gl. (23.32). Dieser Algorithmus wurde in einem `C++`-Programm umgesetzt. Das Programm durchsucht den Parameterraum nach kinematisch erlaubten Parametersätzen. Dazu ist das sechsdimensionale Tupel $\mathbf{i} \equiv (E_{\gamma,\mathrm{in}}/m, p_x/m, p_y/m, p_z/m, \beta_1, \beta_2)$ zu würfeln, wobei

$$E_{\gamma,\mathrm{in}}/m \in [0,\infty)\,, \quad (p_x, p_y, p_z)/m \in \mathbb{R}^3\,, \quad \beta_1,\, \beta_2 \in [-1,1]\,, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \leq 1\,. \tag{23.34}$$

Im Folgenden trage ein Parametertupel, welches die Gültigkeit der notwendigen Bedingungen gewährleistet, eine zusätzliche 0 als Index. Beispielsweise sei $\mathbf{i}_0 \equiv (E_{\gamma,\mathrm{in}}/m, p_x/m, p_y/m, p_z/m, \beta_1, \beta_2)$ ein Tupel, welches alle notwendigen Bedingungen im Anfangszustand erfüllt. Im Falle einer erfolgreichen Suche, wird also das entsprechende Tupel $\mathbf{i}_0$

abgespeichert. Danach findet die Berechnung des Wirkungsquerschnitts für diese Konfiguration statt und zwar nach dem anschließenden Schema:

1) Zunächst muss das Volumen des kinematisch erlaubten Teils des Phasenraums bestimmt werden.

   a) Würfeln des Parametertupels des Endzustands, also $\mathbf{j} \equiv (\delta_1, \delta_2)$ für Parametrisierung (1) bzw. $\widetilde{\mathbf{j}} \equiv (\vartheta, \varphi)$ für Parametrisierung (2). Die möglichen Werte sind aus den folgenden Intervallen zu wählen:

   $$\delta_1,\, \delta_2 \in [-1, 1]\,, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 \leq 1\,, \quad s \in \{-1, 1\}\,, \quad \vartheta \in [0, \pi]\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,. \tag{23.35}$$

   Die gesamte Anzahl der durchgeführten Würfe sei n_1.

   b) Berechnung der Energie $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$ des Photons im Endzustand nach Gl. (23.29).

   c) Prüfung aller notwendigen Bedingungen; dies führt zu einer Anzahl n_2 von Treffern.

   d) Damit ist das kinematisch erlaubte Volumen des Phasenraums gegeben durch $\Delta V_1 = \pi n_2/n_1$ für Parametrisierung (1) bzw. durch $\Delta V_2 = 2\pi^2 n_2/n_1$ für Parametrisierung (2).

2) Nachdem das kinematisch erlaubte Volumen bekannt ist, lässt sich der Wirkungsquerschnitt des modifizierten Compton-Prozesses berechnen. Hier werden zwei mögliche Prozesse betrachtet. Der erste soll so ablaufen, dass alle Bedingungen aus Abschnitt 23.3.2 erfüllt sind. Auf diese Art und Weise lässt sich nämlich die Fläche des Ereignishorizonts bzw. die Entropie des schwarzen Lochs verringern. Der andere verläuft so, dass mindestens eine der notwendigen Bedingungen im Endzustand verletzt sind. Dies führt dann dazu, dass die Entropie des schwarzen Lochs nicht verringert wird. Wir haben uns dafür entschieden, die Bedingung eines radial auslaufenden Elektrons im Endzustand zu verletzen. Unter solchen Umständen fällt das Elektron nach dem Streuprozess hinter seinen eigenen Ereignishorizont und damit in das schwarze Loch, was die Entropie erhöht. Die Berechnung der Wirkungsquerschnitte beider Prozesse erfolgt dann analog zur Berechnung des erlaubten Phasenraumvolumens:

   a) Würfeln des Parametertupels des Endzustands und Berechnung von $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$.

   b) Prüfung aller Bedingungen für Prozessverlauf (1) bzw. Prozessverlauf (2).

   c) Berechnung des Wirkungsquerschnitts für beide Prozessverläufe:

   $$\sigma \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta\sigma_i\,, \tag{23.36}$$

mit

$$\Delta\sigma_i = \frac{e^4}{4\pi^2}\frac{1}{4E_{\gamma,\mathrm{in}}E_{\mathrm{e,in}}}\frac{1}{4E_{\gamma,\mathrm{out}}E_{\mathrm{e,out}}}\frac{1}{|f_{\mathrm{kin}}|/\zeta}(\zeta E_{\gamma,\mathrm{out}})^2\sin\vartheta|\mathcal{M}|^2\frac{\Delta V_i}{N} = \\ = \frac{\alpha^2}{4E_{\gamma,\mathrm{in}}E_{\mathrm{e,in}}E_{\gamma,\mathrm{out}}E_{\mathrm{e,out}}}\frac{\zeta^3}{|f_{\mathrm{kin}}|}E_{\gamma,\mathrm{out}}^2\sin\vartheta|\mathcal{M}|^2\frac{\Delta V_i}{N}\,, \tag{23.37}$$

für $i = 1, 2$ und mit einer Funktion f_{kin}, die sich aus der Kinematik des Prozesses ergibt. Diese hängt außerdem von der Parametrisierung des Endzustandes ab und ist gegeben durch die Ableitung von

$$\Delta E = E_{\gamma,\mathrm{in}} + E_{\mathrm{e,out}} - E_{\gamma,\mathrm{out}} - E_{\mathrm{e,out}}\,, \tag{23.38}$$

nach $E_{\gamma,\mathrm{out}}$:

$$f_{\mathrm{kin}} = \frac{\partial\Delta E}{\partial E_{\gamma,\mathrm{out}}}\,. \tag{23.39}$$

Über die Gleichung $\Delta E = 0$ wird die Energieerhaltung festgelegt. Bei $E_{\gamma,\mathrm{out}}$ handelt es sich um die radiale Koordinate der Kugelkoordinaten $(E_{\gamma,\mathrm{out}}, \vartheta, \varphi)$ bzw. um die erste Komponente der alternativen Koordinaten $(E_{\gamma,\mathrm{out}}, \delta_1, \delta_2)$. Speziell für die erste Koordinatenwahl ergibt sich

$$f_{\mathrm{kin}} = -1 + \frac{\zeta\left(\delta_1 a + \delta_2 b + \sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}sc\right)}{\sqrt{m^2+a^2+b^2+c^2}}\,, \tag{23.40a}$$

mit

$$a = p_x + \beta_1 E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta - \delta_1 E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta\,, \quad b = p_y + \beta_2 E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta - \delta_2 E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta\,, \tag{23.40b}$$

$$c = p_z + \sqrt{1-\beta_1^2-\beta_2^2}E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta - \sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}E_{\gamma,\mathrm{out}}s\zeta\,. \tag{23.40c}$$

Für Kugelkoordinaten ist diese kinematische Funktion gegeben durch:

$$f_{\mathrm{kin}} = -1 + \frac{\zeta(-E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta + a\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + b\cos(\vartheta) + c)}{\sqrt{m^2+d^2+e^2+f^2}}\,, \tag{23.41a}$$

$$d = a - E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\,, \quad a = p_x + \beta_1 E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta\,, \tag{23.41b}$$

$$e = p_y + \beta_2 E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta - E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\,, \tag{23.41c}$$

$$f = b - E_{\gamma,\mathrm{out}}\zeta\cos(\vartheta)\,, \quad b = p_z + \sqrt{1-\beta_1^2-\beta_2^2}E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta\,, \tag{23.41d}$$

$$c = p_y\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + \beta_2 E_{\gamma,\mathrm{in}}\zeta\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\,. \tag{23.41e}$$

Weitere kleine Bemerkungen zur numerischen Analyse folgen in Anhang F.5.

Damit eine Untersuchung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik schwarzer Löcher mög-

lich ist, benötigen wir den Wirkungsquerschnitt zum einen für den Prozess, welcher alle Bedingungen aus Abschnitt 23.3.2 erfüllt und damit die Entropie verringert. Andererseits sind wir an dem Wirkungsquerschnitt für den Ablauf des Streuprozesses interessiert, welcher die Entropie ansteigen lässt. Dies geschieht, sofern eine der Bedingungen im Endzustand nicht erfüllt ist, also wenn beispielsweise die Killing-Energie des auslaufenden Photons größer als null ist oder das auslaufende Elektron in das schwarze Loch fällt. Den Wirkungsquerschnitt des ersten Falls wollen wir als $\sigma^{(1)}_{\text{Compton}}$ bezeichnen, den des zweiten Falls als $\sigma^{(2)}_{\text{Compton}}$.

23.4.2. Das Betragsquadrat des Matrixelements

Wie schon in Abschnitt 23.3.1 angemerkt wurde, ist aufgrund des starken Äquivalenzprinzips die Transformation in ein lokales Inertialsystem am Streupunkt möglich. Dennoch muss beachtet werden, dass die Compton-Streuung kein lokaler Prozess ist, da es in der (modifizierten) QED keine Viererkopplung zweier Fermionlinien und zweier Photonlinien gibt. Der Prozess läuft statt dessen nicht-lokal unter Erzeugung eines virtuellen Zwischenzustands, bestehend aus einem angeregten Elektron, ab. Wir haben jedoch in Abschnitt 21.1 diskutiert, dass die Lebensdauer dieses Zwischenzustands vernachlässigbar klein ist und der Prozess in guter Näherung doch in der Raumzeit als lokal stattfindend betrachtet werden kann. Für das spinsummierte und -gemittelte Betragsquadrat des Prozesses kann somit Gl. (21.7) verwendet werden. Mit der Notation dieses Kapitels gilt dann:

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{r_1,r_2}|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^{abcd}\Pi_{ac}\Pi_{bd}\,, \tag{23.42a}$$

mit

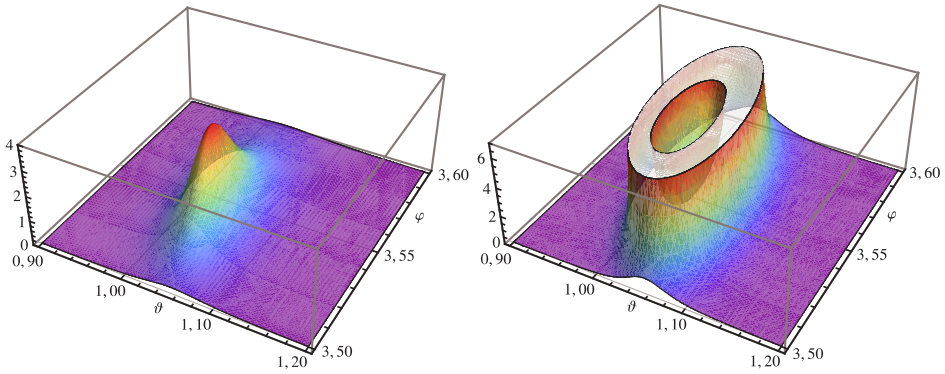
$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{abcd} = \frac{e^4}{4}\,\mathrm{Sp}\Bigg\{&(\not{k}_{e,\text{out}}+m)\left[\frac{\gamma^a\not{k}_{\gamma,\text{in}}\gamma^b+2\gamma^a k^b_{e,\text{in}}}{2k_{e,\text{in}}\cdot k_{\gamma,\text{in}}+k^2_{\gamma,\text{in}}}+\frac{\gamma^b\not{k}_{\gamma,\text{out}}\gamma^a-2\gamma^b k^a_{e,\text{in}}}{2k_{e,\text{in}}\cdot k_{\gamma,\text{out}}-k^2_{\gamma,\text{out}}}\right]\\ &\times(\not{k}_{e,\text{in}}+m)\left[\frac{\gamma^d\not{k}_{\gamma,\text{in}}\gamma^c+2\gamma^c k^d_{e,\text{in}}}{2k_{e,\text{in}}\cdot k_{\gamma,\text{in}}+k^2_{\gamma,\text{in}}}+\frac{\gamma^c\not{k}_{\gamma,\text{out}}\gamma^d-2\gamma^d k^c_{e,\text{in}}}{2k_{e,\text{in}}\cdot k_{\gamma,\text{out}}-k^2_{\gamma,\text{out}}}\right]\Bigg\}\,,\end{aligned} \tag{23.42b}$$

und der Polarisationssumme

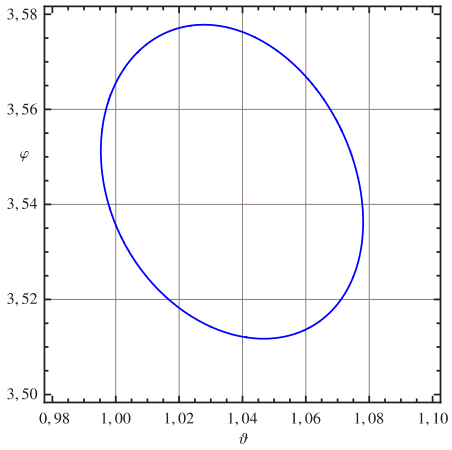
$$\Pi_{ab}\equiv\sum_{r=1,2}\overline{(\varepsilon^{(r)})_a}\,(\varepsilon^{(r)})_b\mapsto\frac{1}{1+\kappa/2}\left(-\eta_{ab}+\frac{\kappa}{1+\kappa/2}\,\xi_a\xi_b\right)\,. \tag{23.42c}$$

Für nicht-infinitesimalen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter ε tritt ein Problem bei der numerischen Berechnung des Wirkungsquerschnitts auf und zwar divergiert dieser in den meisten Fällen. Die Erstellung eines Schaubildes des Amplitudenquadrats für eine bestimmte Parameterwahl in Abhängigkeit von den Winkeln ϑ und φ offenbart den Grund für dieses zunächst sehr rätselhaften Verhaltens. Ab einem endlichen Wert für ε, welcher von den Parametern abhängt, gibt es einen Bereich in der ϑ-φ-Ebene, in welchem das Amplituden-

quadrat stark ansteigt. Eine weitere Analyse führt zu dem Ergebnis, dass für eine Menge $\{(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] | g(\vartheta, \varphi) = 0\}$ mit einer bestimmten Funktion $g(\vartheta, \varphi)$ das Betragsquadrat des Matrixelements sogar divergiert. In Abb. 23.4 ist dieses Verhalten des Matrixelements



(a) $\varepsilon_1 = 0,13$ (b) $\varepsilon_2 = 0,14$



(c) $\varepsilon_2 = 0,14$

Abbildung 23.4.: Amplitudenquadrat (skaliert) in Abhängigkeit von ϑ und φ für die Parameterwahl $E_{\gamma,\text{in}}/m \approx 1,7720$, $p_x/m \approx -7,3148$, $p_y/m \approx -1,6094$, $p_z/m \approx 4,7904$, $\beta_1 \approx -0,7247$, $\beta_2 \approx 0,4617$ für zwei unterschiedliche Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter ε_1 und ε_2 (oben). Kontur $g(\vartheta, \varphi) = 0$, für die das Matrixelement für ε_2 divergiert (unten).

für eine bestimmte Parameterwahl dargestellt. Für $\varepsilon \lesssim 0,13$ ist das Amplitudenquadrat wohldefiniert und weist keinerlei Divergenzen auf, was jedoch für $\varepsilon \gtrsim 0,14$ nicht mehr der Fall ist. Die entsprechende Kontur, für die das Matrixelement divergiert, wird in Abb. 23.4(c) präsentiert.

Eine Untersuchung des Amplitudenquadrats identifiziert als Ursache der Divergenz, dass es ab einem bestimmten Parameter ε Winkel ϑ und φ gibt, für die das virtuelle Elektron auf der Massenschale sitzt. Dann verschwindet einer der Nenner in Gl. (23.42), nämlich $2k_{e,\text{in}} \cdot k_{\gamma,\text{out}} - k^2_{\gamma,\text{out}}$, was die Divergenz verursacht. Die numerische Auswertung des Wirkungsquerschnitts für erlaubte Konfigurationen hat gezeigt, dass die obige Divergenz in den meisten Fällen Probleme

dahingehend verursacht, dass der Wirkungsquerschnitt ebenso divergent ist. In wenigen Fällen scheint sich jedoch die Divergenz des Amplitudenquadrats nicht direkt auf den Wirkungsquerschnitt auszuwirken. Beispielsweise ist dies für die Parameterwahl aus [107] der Fall, weshalb wir uns im Folgenden auf diese beschränken möchten. In Abb. 23.5 ist das Schaubild des Amplitudenquadrats in Abhängigkeit von ϑ und φ für diesen Fall dargestellt, wobei unschwer das divergente Verhalten erkennbar ist. Die Ursache des weißen eiförmigen Streifens ist, dass für

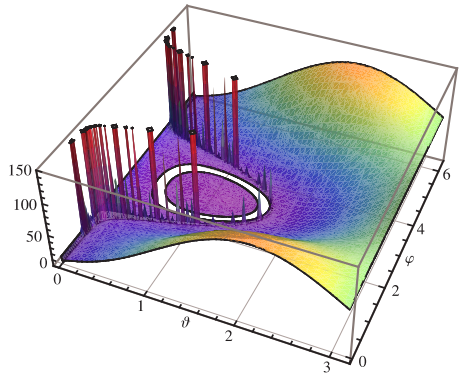
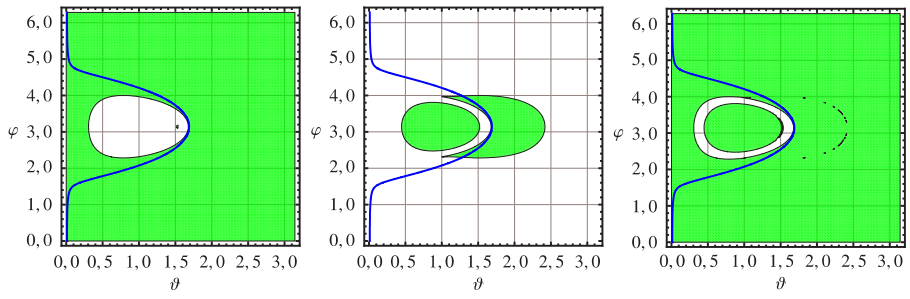


Abbildung 23.5.: Betragsquadrat (skaliert) des Matrixelements der Compton-Streuung am modifizierten schwarzen Loch für die Parameterwahl aus [107].

Werte von ϑ und φ innerhalb dieses Streifens die Energie $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$ komplexe Werte annimmt. Dies stellt jedoch kein Problem dar, weil diese Werte von vorn herein ausgeschlossen sind. Schauen wir uns nun die Einschränkungen an, welche durch die Bedingungen aus Abschnitt 23.3.2 dem ϑ-φ-Bereich $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ auferlegt werden; diese sind in Abb. 23.6 skizziert. Im ersten Schaubild ist der Bereich als grün markiert, wo die Killing-Energie des Photons im Endzustand kleiner ist als null. Die grünen Flächen im zweiten Schaubild stellen Gebiete dar, in denen die Bedingung eines radial auslaufenden Elektrons im Endzustand erfüllt ist. Im dritten Schaubild ist schließlich die Fläche als grün markiert, für deren Werte ϑ und φ das auslaufende Elektron den Potentialwall der Schwarzschild-Metrik für massive Teilchen überwinden kann. Weiterhin ist in allen drei Schaubildern die Kontur, an welcher das Amplitudenquadrat divergiert, als blaue



(a) Killing-Energie des Photons im Endzustand

(b) Radial auslaufendes Elektron im Endzustand

(c) Bedingung für den Potentialwall für das Elektron im Endzustand

Abbildung 23.6.: Konturen für notwendige Bedingungen des Endzustands des Compton-Streuprozesses

Kurve gezeichnet. Im ersten der drei Schaubilder ist in der eiförmigen weißen Fläche ein sehr kleiner Bereich erkennbar, wo die Killing-Energie des auslaufenden Photons kleiner als null ist. An dieser Stelle sind ebenso die beiden anderen Bedingungen erfüllt; jedoch verläuft die Kontur, an welcher das Amplitudenquadrat divergiert, daran vorbei. Dies führt zu einem endlichen Wirkungsquerschnitt für den kinematisch erlaubten Compton-Streuprozess, da der divergente Bereich durch alle drei Bedingungen ausgeschlossen ist. Ebenso ist der Wirkungsquerschnitt für den Prozess, bei dem keine der Bedingungen im Endzustand erfüllt ist, endlich, da auch dann die entsprechend angepassten Bedingungen (beispielsweise die einer Killing-Energie des auslaufenden Photons, die größer ist als null) die divergente Kontur ausschließen. Für den hier betrachtenden speziellen Fall führt die numerische Untersuchung auf

$$\sigma^{(1)}_{\text{Compton}} \approx 0,009\,\alpha^2\,, \quad \sigma^{(2)}_{\text{Compton}} \approx 0,690\,\alpha^2\,. \tag{23.43}$$

Damit ist $\sigma^{(2)}_{\text{Compton}} > \sigma^{(1)}_{\text{Compton}}$ und der Prozess, bei welchem die Entropie erhöht wird, ist bevorzugt.

Eine analoge Untersuchung lässt sich für weitere kinematische Anfangskonfigurationen durchführen. Dabei wurde kein einziges Beispiel gefunden, für welches der Wirkungsquerschnitt des Entropie-verringernden Prozesses größer ist als der des Entropie-erhöhenden. Dies liegt daran, dass der erlaubte Phasenraum für den ersteren Prozess viel kleiner ist als der des zweiten. Die Gewichtung durch das Betragsquadrat des Matrixelements kann diese Tendenz nicht ausgleichen. Somit scheint eine Verringerung der Entropie des modifizierten schwarzen Lochs im durchgeführten Gedankenexperiment nicht aufzutreten.

Kapitel 24.

Die endliche Lücke bezüglich der Lorentzsymmetrie-Verletzung

24.1. Numerische Überlegungen bezüglich des Phasenraums

Zu Anfang der analytischen Untersuchungen gab es bereits Anzeichen dafür, dass eine endliche Lücke ε_0 des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters ε existiert [107, 112]. Infolge dieser Lücke ist der modifizierte Compton-Prozess für $\varepsilon < \varepsilon_0$ kinematisch nicht mehr möglich. Woher diese endliche Lücke kommt und was deren physikalische Interpretation ist, soll in diesem Kapitel untersucht werden. Eventuell steckt dahinter ein tiefes physikalisches Konzept, das es zu ergründen gilt. Eine vorsichtige analytische Abschätzung lieferte $\varepsilon_0 < 0,10$, während die numerische Monte-Carlo-Analyse zum Ergebnis $\varepsilon_0 < 0,3506$ kam. Die Diskrepanz zwischen diesen beiden Schranken ist zu erklären.

Eine detaillierte Analyse offenbarte, dass die Bedingung nach einem radial auslaufenden Elektron im Endzustand

$$\mathcal{R}_{\mathrm{e,out}} \equiv -(k_0)_{\mathrm{e,out}} - (k_1)_{\mathrm{e,out}} \sqrt{1 + \varrho\varepsilon} > 0\,, \tag{24.1}$$

eine sehr starke Einschränkung des Phasenraums für abnehmende ε darstellt. In diesem Zusammenhang ist darüber hinaus die Bedingung für ein radial einlaufendes Elektron im Anfangszustand

$$\mathcal{R}_{\mathrm{e,in}} \equiv -(k_0)_{\mathrm{e,in}} - (k_1)_{\mathrm{e,in}} \sqrt{1 + \varrho\varepsilon} < 0\,, \tag{24.2}$$

wichtig. Was im Phasenraum passiert, kann am besten graphisch für ein spezielles Beispiel veranschaulicht werden. Für dieses treffen wir die Wahl $E_{\gamma,\mathrm{in}}/m = 100$, $p_y/m = -100$, $\beta_1 = -0,74$, $\beta_2 = 0$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 0$ und $s = 1$. Wir betrachten die folgenden drei Mengen Γ_1, Γ_2 und Γ_3 in der p_x-p_z-Ebene:

$$\Gamma_1 = \{(p_x, p_z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}} \geq 0\}\,, \tag{24.3a}$$

$$\Gamma_2 = \{(p_x, p_z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathcal{R}_{\mathrm{e,in}} \leq 0\}\,, \tag{24.3b}$$

$$\Gamma_3 = \{(p_x, p_z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathcal{R}_{\mathrm{e,out}} \geq 0\}\,. \tag{24.3c}$$

Der Rand von Γ_n werde als $\partial\Gamma_n$ bezeichnet für $n = 1, 2, 3$. In Abb. 24.1 zeigen wir $\partial\Gamma_1$ als dicke (blaue) Kurve, $\partial\Gamma_2$ als gestrichene/gepunktete (grüne) Kurve und $\partial\Gamma_3$ als gestrichene (rote) Kurve. Im ersten Schaubild (oben links) sind die Schnittpunkte der drei Kurven als schwarze Punkte markiert. $\partial\Gamma \equiv \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2 \cup \partial\Gamma_3$ umschließt das erlaubte Gebiet $\Gamma \equiv (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3) \setminus \partial\Gamma$ in der p_x-p_z-Ebene, welches gelb ausgemalt ist; dessen Fläche sei $\mathcal{A}$. Diese Fläche hängt vom Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter als, also ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varepsilon)$. Diese Funktion fällt monoton für abnehmendes ε, bis sie das Minimum $\mathcal{A}(\varepsilon_0) = 0$ an einem Wert ε_0 erreicht. Für $\varepsilon < \varepsilon_0$ ist der modifizierte Compton-Prozess nicht mehr möglich, weil dann $\Gamma(\varepsilon < \varepsilon_0) = \emptyset$ und sich somit die Bedingung eines radial einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons gegenseitig ausschließen. Dieses Verhalten ist in den Schaubildern (1) bis (6) für unterschiedliche Werte von ε dargestellt. Das Minimum ε_0 kann für dieses Beispiel numerisch mittels einer Intervallschachtelung zu 0,3531 bestimmt werden.

24.2. Robustheit des Ergebnisses

Dass es eine endliche Schranke gibt und wo diese herrührt, wurde für das obige spezielle Beispiel gezeigt. Variiert man nun die Parameter dieses Spezialfalls, so lässt sich folgendes beobachten:

- Für das Beispiel gilt $\delta_1 = -1$ und $\delta_2 = 0$. Analytisch führt die Bedingung, dass die Killing-Energie des Photons im Anfangszustand positiv und das des Photons im Endzustand negativ sein muss, auf folgende Einschränkung:

$$-1 \leq \delta_1 < -\sqrt{\frac{1+\varrho\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,. \tag{24.4}$$

  Die Variation von δ_1 und δ_2 unter Berücksichtigung von (24.4) und der Ungleichung $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq 1$ ändert den Wert ε_0 nur minimal.

- Eine Änderung von $E_{\gamma,\mathrm{in}}/m = 100$ und $p_y/m = -100$ hat sehr wenig Einfluss auf ε_0.

- Aus einer der Bedingungen das Elektron und Photon im Anfangszustand betreffend ergibt sich analytisch $\beta_1 \gtrsim -0,74$, weshalb wir auch hier $\beta_1 = -0,74$ gewählt haben. Anders als für die vorherigen Parameter hängt ε_0 stark von β_1 ab. Jedoch stellt man fest, dass ε_0 sich erhöht, sofern β_1 ansteigt.

24.3. Diskussion der Ergebnisse

Zusammenfassend kann man sagen, dass im Falle von $\varrho = 0,99$ der Wert $\varepsilon_0 \approx 0,35$ eine zuverlässige Schranke für die Lücke ist. Die in [107] angegebene Schranke von $\varepsilon = 0,10$ (für den Fall eines masselosen Elektrons) war zu großzügig gewählt. Zwar ergibt sich durch weitere numerische Betrachtungen, dass $\widetilde{E}_{\gamma,\mathrm{out}}$ für $\varepsilon \lesssim 0,14$ komplexe Werte annimmt, was jedoch keine Auswirkungen hat, weil der Prozess schon oberhalb dieses Werts kinematisch verboten

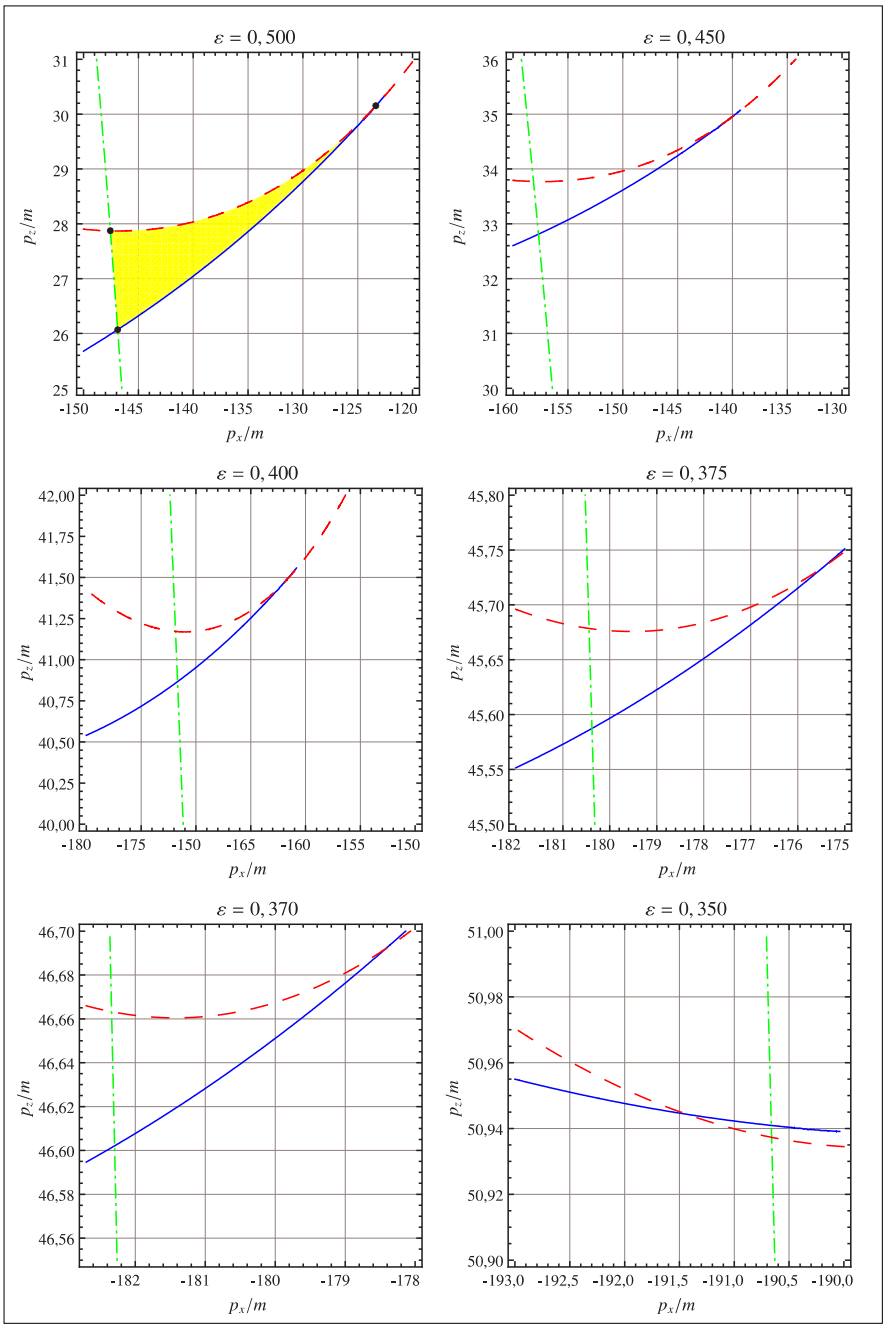


Abbildung 24.1.: Kurven $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ und $\partial\Gamma_3$ in der p_x-p_z-Ebene für die Parameterwahl $\varrho = 0,99$, $E_{\gamma,\mathrm{in}}/m = 100$, $p_y/m = -100$, $\beta_1 = -0,74$, $\beta_2 = 0$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 0$ und $s = 1$. Die sechs Schaubilder entsprechen den sechs unterschiedlich gewählten Werten des Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters ε, welche oberhalb eines jeden Schaubilds angegeben sind.

ist. Die Untersuchungen lieferten außerdem weitere Hinweise darauf, dass die Schranke ε_0 höher liegt – und zwar bei $\varepsilon_0 \approx 0,42$ – sofern man die Elektronen als masselos betrachtet. Dies wurde nicht weitergehend untersucht, kann jedoch damit zusammenhängen, dass im Falle masseloser

Teilchen das effektive Potential immer ein Maximum hat, was es für masselose Teilchen unter Umständen schwieriger macht, ins Unendliche zu gelangen als für massive Teilchen.

Kapitel 25.

Zusammenfassung zu Teil V

In diesem Teil der Dissertation wurde die Konsistenz der Kopplung eines speziellen Falls der modifizierten Maxwell-Theorie an die Gravitation untersucht. Lorentzsymmetrie-verletzende Theorien der Gravitation können Schwarzschild-Lösungen mit einer modifizierten Horizontstruktur aufweisen. Je nachdem, in welchem Sektor die Lorentzsymmetrie verletzt ist, kann der Horizont für eine Teilchensorte weiter außen liegen als der für eine andere Teilchensorte. Im Falle der modifizierten Maxwell-Theorie ist es so, dass der Horizont von Photonen außerhalb des Horizonts für massive Teilchen liegt, die von der Lorentzsymmetrieverletzung nicht betroffen sind; den Bereich dazwischen bezeichnen wir als Ergosphäre. Die Konsistenz der Theorie wurde mittels eines Gedankenexperiments überprüft, bei dem ein Elektron und ein Photon in der Ergosphäre des modifizierten schwarzen Lochs streuen. Unter gewissen Voraussetzungen könnte bei einer solchen Streuung die Masse des schwarzen Lochs verringert werden, was dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher widerspräche. Würde sich der zweite Hauptsatz als ungültig herausstellen, so wäre die Konsistenz der Theorie fragwürdig. Das Problem war aufgrund des zehndimensionalen Parameterraums analytisch schwer anzugehen, weshalb zusätzlich auf numerische Methoden zurückgegriffen wurde. Durch dementsprechend weitreichende numerische Untersuchungen deutet vieles darauf hin, dass sich der verallgemeinerte zweite Hauptsatz in diesem Gedankenexperiment nicht verletzen lässt. Dies ist zumindest ein Hinweis auf die Konsistenz der Theorie. Ein zuverlässiger analytischer Beweis für einen allgemeinen Parametersatz konnte jedoch aufgrund der Komplexität des Problems nicht geliefert werden.

Bereits in [107] gab es darüber hinaus Hinweise darauf, dass der Prozess unterhalb eines endlichen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameters ε_0 verboten ist. Zu dessen Bestimmung waren numerische Methoden sehr hilfreich und lieferten $\varepsilon_0 \approx 0,35$. Die Ursache dieses Verhaltens liegt in der Kinematik begründet. Nähert sich der Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter der Schranke ε_0, so sind die Bedingungen eines radial einlaufenden Elektrons im Anfangszustand bzw. eines radial auslaufenden Elektrons im Endzustand immer schwieriger miteinander in Einklang zu bringen, und unterhalb ε_0 widersprechen sich beide sogar. Für zu kleine Parameter ist es also dem streuenden Photon nicht mehr möglich, das Elektron aus der Ergosphäre des modifizierten schwarzen Lochs herauszustoßen.

Kapitel 26.

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Dissertation beschäftigte sich mit der Verletzung der Lorentzinvarianz im Photonsektor. Im ersten Teil der Dissertation wurde anschaulich erklärt, was es im Allgemeinen heißt, die Lorentzsymmetrie zu brechen. Zusätzlich war dieser Teil einer Einführung der modifizierten Maxwell-Theorie gewidmet. Bei der letzteren handelt es sich um eine der beiden möglichen Parametrisierungen einer Lorentzsymmetrie-Verletzung im Photonsektor. Jener galt das Augenmerk in dieser Doktorarbeit.

Im zweiten Teil der Dissertation konnten die Zerfallsbreiten der Vakuum-Cherenkov-Strahlung und des Photonzerfalls in der modifizierten Quantenelektrodynamik berechnet werden. Dies wurde sowohl für zunächst als punktförmig angenommene Spin-1/2-Fermionen also auch skalare Teilchen durchgeführt. Beide Prozesse sind schwelleninduziert, sie sind also für festen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter erst ab einer bestimmten Schwellenenergie erlaubt. Zusätzlich zur Zerfallsbreite war es möglich, die Abstrahlungsrate der Vakuum-Cherenkov-Strahlung zu berechnen, die aussagt, wie schnell ein geladenes Teilchen seine Energie durch diesen Prozess verliert. Neben der quantenfeldtheoretischen Herangehensweise konnten die Abstrahlungsrate und die Schwellenenergie der Vakuum-Cherenkov-Strahlung ebenso auf semiklassischem Wege ermittelt werden, indem für das Lorentzsymmetrie-verletzende Vakuum ein effektiver Brechungsindex eingeführt wurde. Die sich daraus ergebende Schwellenenergie stimmt exakt und die Abstrahlungsrate in führender Ordnung bezüglich der Energie des Teilchen mit dem quantenfeldtheoretischen Resultat überein. Das Photonspektrum der Vakuum-Cherenkov-Strahlung deutet darauf hin, dass ein Spin-1/2-Fermion durch Abstrahlung eines einzelnen Photons seine Energie instantan verliert, sofern sie oberhalb der Schwelle liegt. Das bestätigt ebenso eine Berechnung der Strahlungslänge eines geladenen Teilchens mit dem Ergebnis, dass diese nur einige Meter (oder weniger) beträgt. Nach einer solchen Entfernung hat das Teilchen seine Energie oberhalb der Schwelle durch Vakuum-Cherenkov-Strahlung verloren. Eine ähnliche Argumentation ist beim Photonzerfall möglich; ein modifiziertes Photon, dessen Energie oberhalb der entsprechenden Schwellenenergie liegt, wäre schon lange bevor es die Erde erreicht, in ein Fermion-Antifermion-Paar zerfallen. Mittels dieser Erkenntnisse und neuester experimenteller Daten des Pierre-Auger-Observatoriums und von H.E.S.S. war es möglich, die Schranken an den Parameter des räumlich isotropen Modells stark zu verbessern und darüber hinaus den negativen Parameterbereich durch eine untere Grenze einzuschränken. Eine

zusätzliche Berücksichtigung des Partoninhalts des Protons kann zusammen mit dem Proton-Breakup-Prozess $p \to p\overline{p}p$ die untere Schranke an den negativen Parameterbereich noch weiter verringern, jedoch gehen dann Annahmen über den Partoninhalt bei Energien von $10^2\,\mathrm{EeV}$ ein. Im Prinzip handelt es sich bei den Schranken nicht um astrophysikalische, sondern um terrestrische, weil weder genaue Kenntnisse über den Ursprung noch über die Propagation der Teilchen notwendig ist, sondern nur deren Detektion in der Erdatmosphäre.

Im dritten Teil der Dissertation wurden einige Spezialfälle des nicht-doppelbrechenden Teils der modifizierten Maxwell-Theorie auf formale Aspekte hin untersucht. Die Analyse umfasste die Mikrokausalität und Unitarität des räumlich isotropen Falls, des räumlich anisotropen Falls mit einer ausgezeichneten Raumrichtung und des anisotropen Falls mit zwei ausgezeichneten Richtungen der Raumzeit. Das Ergebnis ist, dass sowohl beim räumlich isotropen als auch beim anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Raumrichtung die Eigenschaften der Mikrokausalität und der Unitarität gewährleistet sind. Damit sind beide Fälle physikalisch sinnvoll und können zur Parametrisierung einer Lorentzsymmetrieverletzung im Rahmen der modifizierten Maxwell-Theorie verwendet werden. Der dritte Spezialfall mit zwei ausgezeichneten Richtungen erfüllt ebenso die Unitarität, jedoch steht eine Untersuchung der Mikrokausalität noch aus.

Im vierten Teil wurde versucht, Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung bzw. dem Photonzerfall zu berechnen. Im Nachhinein erwies sich diese Aufgabe vom technischen Standpunkte aus als schwierig aufgrund der reichhaltigen Tensorstruktur der modifizierten Maxwell-Theorie und der auftretenden infraroten Divergenzen. Die allgemeinen Berechnungen konnten somit nicht beendet werden. Nichtsdestotrotz war es möglich, die Ein-Schleifen-Korrekturen in gewissen Regimen zu berechnen, beispielsweise im Falle eines kleinen Photonimpulses im Vergleich zur Fermionmasse. Dies wiederum erlaubte eine Überprüfung der Ward-Identität sowohl der UV-divergenten Terme als auch – bis zu einem gewissen Grade – des endlichen Anteils, wobei letzteres in der Literatur zuvor noch nicht untersucht worden ist. Das Ergebnis ist eine gewährleistete Ward-Identität – in dem Maße, wie es die Berechnungen erlaubten. Hieraus lässt sich wiederum folgern, dass die modifizierte Maxwell-Theorie mit großer Sicherheit anomaliefrei ist. Ein einwandfreier Beweis würde jedoch die exakten Ausdrücke für die Quantenkorrekturen erfordern, deren Berechnung nicht möglich war. Zuletzt wurde darüber hinaus ein Weg gefunden, die Zerfallsbreite für den Photonzerfall mittels des optischen Theorems aus der bekannten Vakuumpolarisation der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik zu bestimmen. Das Ergebnis stimmt mit dem aus Teil II überein, ist von der funktionellen Form her sogar viel einfacher. Das Ganze stellt eine sehr gute Gegenprobe für die zuvor durchgeführten Berechnungen zum Photonzerfall dar.

Im fünften Teil wurde analysiert, ob sich der räumlich isotrope Fall der modifizierten Maxwell-Theorie konsistent an die Gravitation koppeln lässt. Gewisse gravitativ gekoppelte Lorentzsymmetrie-verletzende Theorien weisen modifizierte Schwarzschild-Lösungen mit einer multiplen Horizontstruktur auf. Diese kann so beschaffen sein, dass der Horizont für modifizierte Photonen weiter außen liegt im Vergleich zu dem massiver Teilchen. Wir haben ein Ge-

dankenexperiment derart durchgeführt, dass im Bereich zwischen den beiden Horizonten – der sogenannten Ergosphäre – ein Elektron mit einem Photon streut. Dabei handelt es sich um eine Art modifizierter Compton-Streuung. Da sich das Photon hinter seinem eigenen Horizont befindet, kann dieses eine negative Killing-Energie aufweisen. Für das Elektron ist es möglich, nach dem Streuprozess ins Unendliche entkommen, da der Streupunkt vor dem Horizont massiver Teilchen liegt. Sofern die Streuung auf diese Weise abläuft, trägt das Photon negative Killing-Energie ins schwarze Loch, was dessen Masse und Horizontfläche verringern würde. Wenn das ins Unendliche entkommende Elektron sich in einem reinen Zustand befindet, könnte durch einen solchen Vorgang die Entropie des schwarzen Lochs und die der Umgebung verringert werden, was im Widerspruch zum verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher steht. Dass dies zumindest energetisch möglich ist, wurde bereits in [112] gezeigt. Um den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz zu überprüfen, reicht dies jedoch nicht aus, sondern es sind weitere Untersuchungen notwendig. Da es sich um ein Problem mit vielen freien Parametern handelt, musste zum großen Teil auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Auf diese Weise war es möglich, viele weitere kinematische Konfigurationen zu finden, für welche ein solcher Prozess unter Verringerung der Entropie möglich ist. Zusätzlich wurden Wirkungsquerschnitte für derartige Konfigurationen berechnet, welche die Entropie verringern und für jene, welche die Entropie erhöhen, wenn nämlich beispielsweise das Elektron nach dem Streuprozess ins schwarze Loch fällt. Das Ergebnis davon ist, dass für alle gefundenen Parametersätze der Wirkungsquerschnitt für den entropieverringernden Prozess immer kleiner war als der einer entsprechenden Streuung, welche die Entropie erhöht. Es gibt also starke Hinweise dafür, dass der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik in diesem speziellen Gedankenexperiment nicht verletzt ist, was die Konsistenz des gravitativ gekoppelten räumlich isotropen Falls der modifizierten Maxwell-Theorie gewährleistet. Ein letztlicher analytischer Beweis konnte aufgrund des großen Parameterraums nicht durchgeführt werden. Weiterhin wurde in [112] festgestellt, dass die modifizierte Compton-Streuung unterhalb eines endlichen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter nicht mehr möglich ist. Die Ursache für dieses Verhalten konnte auf die Tatsache zurückgeführt werden, dass für kleine Parameter das modifizierte Photon das einlaufende Elektron nicht aus der Ergosphäre hinausstoßen kann.

Zusammenfassend hat sich im Laufe der Dissertationsarbeit ergeben, dass die modifizierte Maxwell-Theorie gute Eigenschaften in sich vereint, um eine mögliche Verletzung der Lorentzsymmetrie im Photonsektor zu parametrisieren. Dies betrifft sowohl formale aus auch phänomenologische Gesichtspunkte. Beispielsweise ist Mikrokausalität und Unitarität für bestimmte Spezialfälle gewährleistet, und das macht diese Fälle interessant, um eine Einschränkung von Lorentzsymmetrie-verletzenden Parametern mittels experimenteller Daten durchzuführen. Ebenso gibt es starke Hinweise dafür, dass eine Kopplung der Theorie an die Gravitation möglich ist. Jene Tatsache ist für eine Lorentzsymmetrie-verletzende Theorie nicht selbstverständlich und andere Theorien, wie beispielsweise die Maxwell-Chern-Simons-Theorie, führen in diesem Zusammenhang zu Problemen. Diese Arbeit kann als Fundament für zukünftige Untersuchungen der modifizierten Maxwell-Theorie dienen. Als Ausblick könnten weitere Spezialfälle untersucht werden, die eventuell noch interessantere Eigenschaften als die bisherigen

aufweisen. Vielleicht ist es möglich, die entsprechenden Analysen im Endeffekt auf die volle Theorie zu verallgemeinern. Letztlich ist eine Untersuchung der Lorentzsymmetrieverletzung sehr lohnend und aus ihr können sich Hinweise auf die noch nicht gefundene vereinheitliche Theorie von Quantenphysik und Gravitation ergeben, was dieses Forschungsgebiet sehr attraktiv macht.

Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen, wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und, wenn es Streitigkeiten unter Leuten gibt, man nur zu sagen braucht: „Rechnen wir!“ ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Teil VI.

Anhang

Anhang A.

Berechnung von Zerfallsbreiten

Berechnungen für die Vakuum-Cherenkov-Strahlung und den Proton-Breakup-Prozess, die nicht unbedingt zum Verständnis von Teil II wichtig waren, wurden in dieses Kapitel ausgelagert. Es wird allgemein dennoch als sinnvoll erachtet, das Vorgehen hier ausführlich zu dokumentieren.

A.1. Die δ-Funktion und einige ihrer Eigenschaften

Eine mögliche Definition der δ-Funktion ist über die folgende Funktionenfolge gegeben:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K\mapsto\infty} \int_{-K}^{+K} \exp(\mathrm{i}\kappa x)\,\mathrm{d}\kappa = \frac{1}{\pi} \lim_{K\mapsto\infty} \int_{0}^{K} \cos(\kappa x)\,\mathrm{d}\kappa = \frac{1}{\pi} \lim_{K\mapsto\infty} \frac{\sin(Kx)}{x}\,. \tag{A.1}$$

Für die δ-Funktion gilt

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)\,, \tag{A.2}$$

mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für eine differenzierbare Funktion $f(x)$

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0\in\mathscr{Z}} \frac{1}{f'(x)|_{x=x_0}}\delta(x-x_0)\,, \tag{A.3}$$

wobei $\mathscr{Z}$ die Menge aller einfachen Nullstellen von $f(x)$ ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Im Falle von mehrfachen Nullstellen ist die δ-Funktion nicht definiert. Daraus ergibt sich der Spezialfall für $(k^\mu) = (k^0, \mathbf{k})$

$$\delta(k_\mu k^\mu - \eta^2) = \delta(k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + \eta^2)) = \frac{1}{2E}\left\{\delta(k_0 - E) + \delta(k_0 + E)\right\}\,, \tag{A.4}$$

mit $E = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \eta^2}$ und weiterhin folgt

$$\mathrm{sign}(k_0)\delta(k_\mu k^\mu - \eta^2) = \frac{1}{2E}\left\{\delta(k_0 - E) - \delta(k_0 + E)\right\}\,. \tag{A.5}$$

A.2. Polarisationsvektoren und Polarisationssumme

A.2.1. Räumlich isotroper Fall

Im Impulsraum sehen die Bewegungsgleichungen für das Vektorfeld in der modifizierten Maxwell-Theorie wie folgt aus:

$$M^{\alpha\beta}A_\beta = 0\,, \quad M^{\alpha\beta} = k^\mu k_\mu \eta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - 2\kappa^{\alpha\mu\nu\beta}k_\mu k_\nu\,. \tag{A.6}$$

Dieses mal verwenden wir anders als im Abschnitt 3.5 in Kapitel 3 die Lorenz-Eichung $k^\nu A_\nu = 0$. Dann sind die Bewegungsgleichungen für die vier Komponenten des Eichfelds gegeben durch:

$$A_0\left\{\omega^2 - k^2\left(1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\right\} + A_1\left(\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}k\omega\right) = 0\,, \tag{A.7a}$$

$$A_0\left(\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}k\omega\right) - A_1\left\{\omega^2 - k^2\left(1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\omega^2\right)\right\} = 0\,, \tag{A.7b}$$

$$A_2\left(k^2 - \omega^2 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^2+\omega^2)\right) = 0\,, \tag{A.7c}$$

$$A_3\left(k^2 - \omega^2 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(k^2+\omega^2)\right) = 0\,. \tag{A.7d}$$

Die Komponenten der Polarisationsvektoren genügen dem Gleichungssystem ebenso wie die des Vektorpotentials, da das Vektorpotential eine Linearkombination der Polarisationsvektoren ist. Die Gleichungen (A.7c) und (A.7d) sind automatisch erfüllt, wenn die Dispersionsrelation verwendet wird, und es ergeben sich aus den beiden ersten Gleichungen zwei linear unabhängige transversale Polarisationsvektoren

$$(\varepsilon^{(1),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\,, \quad (\varepsilon^{(2),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\,, \tag{A.8}$$

mit Normierungsfaktor N. Dieser kann nicht aus den Feldgleichungen bestimmt werden, sondern ergibt sich aus der Bedingung

$$\langle \mathbf{k},\sigma|\, :P^0: \,|\mathbf{k},\sigma\rangle = \left\langle \mathbf{k},\sigma \left| \int \mathrm{d}^3x\ :T^{00}: \right| \mathbf{k},\sigma \right\rangle = \omega(\mathbf{k})\,, \tag{A.9}$$

wobei $|\mathbf{k},\sigma\rangle$ ein Photonzustand mit Impulsvektor $\mathbf{k}$ und Polarisation σ ist. Die T^{00}-Komponente des Energie-Impuls-Tensors ist

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \kappa^{0j0k}E^jE^k + \frac{1}{4}\kappa^{jklm}\varepsilon^{jkp}\varepsilon^{lmq}B^pB^q\,. \tag{A.10}$$

Somit benötigen wir die quantisierten physikalischen Felder **E** und **B**. Diese ergeben sich aus dem quantisierten Vektorpotential, wobei A^0 verschwindet (wegen $(\varepsilon^{(1)})^0 = (\varepsilon^{(2)})^0 = 0$ und der Tatsache, dass die Polarisationsvektoren in diesem Fall reell sind):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} [a^{(r)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) \\ + (a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)]\,. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Sowohl elektrisches als auch magnetisches Feld sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} [a^{(r)}(\mathbf{k})\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) \\ - (a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k})\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)]\,, \end{aligned} \tag{A.12a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} [a^{(r)}(\mathbf{k})\mathbf{b}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) \\ - (a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k})\mathbf{b}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)]\,, \end{aligned} \tag{A.12b}$$

wobei

$$\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) \equiv \mathrm{i}\,\omega(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k}), \tag{A.13a}$$

$$\mathbf{b}^{(r)}(\mathbf{k}) \equiv \mathrm{i}\,\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k})\,. \tag{A.13b}$$

Beispielhaft wird hier der Beitrag zu T^{00} berechnet, welcher bilinear im elektrischen Feld ist. Dies erreichen wir, indem wir die obige Darstellung für das **E**-Feld einsetzen:

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathbf{k},\sigma \middle| \int \mathrm{d}^3x\ :E_i(x)E_j(x): \middle| \mathbf{k},\sigma \right\rangle = \\ &\quad = \sum_{r,s=1,2} \left\langle \mathbf{k},\sigma \middle| \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k}')}} \int \frac{\mathrm{d}^3k''}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k}'')}} \right. \\ &\qquad :[a^{(r)}(\mathbf{k}')f_i^{(r)}(\mathbf{k}')\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) - (a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k}')f_i^{(r)}(\mathbf{k}')\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)] \\ &\qquad\quad \times [a^{(s)}(\mathbf{k}'')f_j^{(s)}(\mathbf{k}'')\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) \\ &\qquad\qquad \left. - (a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}'')f_j^{(s)}(\mathbf{k}'')\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)]: \middle| \mathbf{k},\sigma \right\rangle . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Die einzigen nicht-verschwindenden Terme sind diejenigen mit mindestens einem Erzeugungs- und einem Vernichtungsoperator. Mit der Standarddarstellung der dreidimensionalen δ-Distribution

$$\int \mathrm{d}^3x\, \exp(\mathrm{i}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')\mathbf{x}) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')\,, \tag{A.15}$$

erhält man

$$-\sum_{r,s=1,2}\left\langle \mathbf{k},\sigma\right|\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}')}}\int\frac{\mathrm{d}^3k''}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}'')}}\ :[a^{(r)}(\mathbf{k}')(a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}'')f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')$$
$$+(a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k}')a^{(s)}(\mathbf{k}'')f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')]:\left|\mathbf{k},\sigma\right\rangle . \tag{A.16}$$

Die folgende Regel für die Normalordnung $a^{(r)}(\mathbf{k}')(a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}'')\colon = (a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}'')a^{(r)}(\mathbf{k}')$ und $(a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}')a^{(r)}(\mathbf{k}')|\mathbf{k},\sigma\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{r\sigma}\delta_{s\sigma}$ führt auf:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{r,s=1,2}\left\langle \mathbf{k},\sigma\right|\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega(\mathbf{k}')}\,[f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}')(a^{(s)})^\dagger(\mathbf{k}')a^{(r)}(\mathbf{k}')\\
&\qquad+f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}')(a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k}')a^{(s)}(\mathbf{k}')]\left|\mathbf{k},\sigma\right\rangle=\\
&=-\sum_{r,s=1,2}\left\langle \mathbf{k},\sigma\right|\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega(\mathbf{k}')}\,[f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{r\sigma}\delta_{s\sigma}\\
&\qquad+f_i^{(r)}(\mathbf{k}')f_j^{(s)}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{r\sigma}\delta_{s\sigma}]\left|\mathbf{k},\sigma\right\rangle=\\
&=-\frac{1}{\omega(\mathbf{k})}f_i^{(\sigma)}(\mathbf{k})f_j^{(\sigma)}(\mathbf{k})\,.
\end{aligned}\tag{A.17}$$

Eine analoge Rechnung führt auf

$$\left\langle \mathbf{k},\sigma\right|\int\mathrm{d}^3x\ :B_i(x)B_j(x):\left|\mathbf{k},\sigma\right\rangle=-\frac{1}{\omega(\mathbf{k})}b_i^{(\sigma)}(\mathbf{k})b_j^{(\sigma)}(\mathbf{k})\,. \tag{A.18}$$

Nun können wir $\langle\mathbf{k},\sigma|\ :P^0\colon|\mathbf{k},\sigma\rangle$ berechnen:

$$\langle\mathbf{k},\sigma|\ :P^0\colon|\mathbf{k},\sigma\rangle=\frac{\omega(\mathbf{k})}{N}\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\overset{!}{=}\omega(\mathbf{k})\Rightarrow\sqrt{N}=\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\,. \tag{A.19}$$

Somit sind die Polarisationsvektoren gegeben durch

$$\boxed{(\varepsilon^{(1),\mu})=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad(\varepsilon^{(2),\mu})=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.} \tag{A.20}$$

Zur Berechnung der Polarisationssumme macht man am Besten den folgenden Ansatz:

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} (\alpha\eta^{\mu\nu} + \beta\xi^{\mu}\xi^{\nu} + \gamma\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\xi_{\varrho}k_{\sigma} + \delta k^{\mu}k^{\nu} + \varepsilon k^{\mu}\xi^{\nu} + \phi\xi^{\mu}k^{\nu}) \,. \tag{A.21}$$

Der obige Ansatz für die Polarisationssumme muss dem direkt berechneten Ausdruck für die Polarisationssumme entsprechen, welcher aus den Polarisationsvektoren folgt:

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{A.22}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, so erhält man

$$\alpha = -1 \,, \quad \beta = 1 - \frac{\omega(k)^2}{k^2} \,, \quad \gamma = 0 \,, \quad \delta = -\frac{1}{k^2} \,, \quad \varepsilon = \phi = \frac{\omega(k)}{k^2} \,. \tag{A.23}$$

Da die Polarisationssumme nur mit eichinvarianten Ausdrücken $R_{\mu\nu}$ kontrahiert wird, für die $k^{\mu}R_{\mu\nu} = 0$ und $k^{\nu}R_{\mu\nu} = 0$ gilt, sind Terme proportional zu k^{μ} oder k^{ν} nicht wichtig und können weggelassen werden.

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{\omega(k)^2}{k^2}\right) \xi^{\mu}\xi^{\nu} \right\} . \tag{A.24}$$

Schlussendlich kommt man nach dem Einsetzen der Dispersionsrelation $\omega(k)$ auf:

$$\boxed{\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^{\mu} (\varepsilon^{(r)})^{\nu} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\right) \xi^{\mu}\xi^{\nu} \right\} .} \tag{A.25}$$

A.2.2. Räumlich anisotroper Fall mit einer ausgezeichneten Richtung

Wir schauen uns auch hier die Bewegungsgleichungen im Impulsraum an. Die Lorenz-Eichung $k^{\nu}A_{\nu} = 0$ soll im Folgenden verwendet werden. Mit der Notation $\omega(\mathbf{k}) := \omega$ lauten die Feldgleichungen:

$$A_0[(-3+2\widetilde{\kappa}_{33})k_{\parallel}^2 - (3+2\widetilde{\kappa}_{33})k_{\perp}^2 + 3\omega^2] + 2\widetilde{\kappa}_{33}(A_1k_{\perp} + A_3k_{\parallel})\omega = 0 \,, \tag{A.26a}$$

$$A_1[(-3+2\widetilde{\kappa}_{33})k_{\parallel}^2 + (3+2\widetilde{\kappa}_{33})\omega^2 - 3k_{\perp}^2] - 2\widetilde{\kappa}_{33}(A_0\omega + A_3k_{\parallel})k_{\perp} = 0 \,, \tag{A.26b}$$

$$A_2[(-3+2\widetilde{\kappa}_{33})k_{\parallel}^2 - (3+2\widetilde{\kappa}_{33})(k_{\perp}^2 - \omega^2)] = 0 \,, \tag{A.26c}$$

$$A_3[(-3k_{\parallel}^2 + (-3+2\widetilde{\kappa}_{33})(k_{\perp}^2 - \omega^2)) + 2\widetilde{\kappa}_{33}k_{\parallel}(A_0\omega - A_1k_{\perp})] = 0 \,. \tag{A.26d}$$

Gl. (A.26c) ist automatisch erfüllt, wenn man die Dispersionsrelation des räumlich isotropen Falles verwendet. Die Lösung des Gleichungssystems führt auf die folgenden Polarisationsvektoren:

$$(\varepsilon^{(1),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N'}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k_\perp^2}{\omega(\mathbf{k})^2}}} \begin{pmatrix} k_\perp/\omega(\mathbf{k}) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon^{(2),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N'}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.27}$$

wobei – analog zum räumlich anisotropen Fall – N' ein Normierungsfaktor ist. Mit dem Ansatz

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^\mu (\varepsilon^{(r)})^\nu = \frac{1}{N'}(\alpha'\eta^{\mu\nu} + \beta'\xi^\mu\xi^\nu + \gamma'\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\xi_\varrho k_\sigma + \delta' k^\mu k^\nu + \varepsilon' k^\mu \xi^\nu + \phi' \xi^\mu k^\nu), \tag{A.28}$$

für die Polarisationssumme erhält man

$$\alpha' = -1, \quad \beta' = -1 + \frac{k_\parallel^2}{\omega(\mathbf{k})^2 - k_\perp^2}, \quad \gamma' = 0, \tag{A.29a}$$

$$\delta' = \frac{1}{\omega(\mathbf{k})^2 - k_\perp^2}, \quad \varepsilon' = \frac{k_\parallel}{k_\perp^2 - \omega(\mathbf{k})^2}, \quad \phi' = \frac{k_\parallel}{k_\perp^2 - \omega(\mathbf{k})^2}. \tag{A.29b}$$

Dieses Ergebnis führt auf die folgende Form für die Polarisationssumme, sofern diese mit eichinvarianten Ausdrücken kontrahiert wird:

$$\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^\mu (\varepsilon^{(r)})^\nu = \frac{1}{N'} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(-1 + \frac{k_\parallel^2}{\omega(\mathbf{k})^2 - k_\perp^2} \right) \xi^\mu \xi^\nu \right\}. \tag{A.30}$$

Mit Lorenz-Eichung ist die Komponente $(\varepsilon^{(1)})^0$ (des ersten Polarisationsvektors) nicht länger gleich null. Somit ist das **E**-Feld zu modifizieren gemäß

$$A^0 = \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [a(\mathbf{k})(\varepsilon^0)^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) + a^\dagger(\mathbf{k})(\varepsilon^0)^{(r)} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)], \tag{A.31}$$

und dessen Gradientenfeld

$$\boldsymbol{\nabla} A^0 = \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [a(\mathbf{k})\mathbf{g}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) - a^\dagger(\mathbf{k})\mathbf{g}^{(r)}(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t)], \tag{A.32a}$$

wobei

$$\mathbf{g}^{(r)}(\mathbf{k}) = \mathrm{i}\mathbf{k}(\varepsilon^0)^{(r)}(\mathbf{k}). \tag{A.32b}$$

Dies führt auf das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} A^0 = \\ &= \sum_{r=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[a(\mathbf{k}) (\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) - \mathbf{g}^{(r)}(\mathbf{k})) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega t) \right. \\ &\qquad \left. - a^\dagger(\mathbf{k}) (\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) - \mathbf{g}^{(r)}(\mathbf{k})) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega t) \right], \end{aligned} \tag{A.33a}$$

mit

$$\mathbf{f}^{(r)}(\mathbf{k}) = \mathrm{i}\,\omega(k) \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k}) \,. \tag{A.33b}$$

Die Bedingung

$$\langle \mathbf{k}| : P^0 : |\mathbf{k}\rangle = \left\langle \mathbf{k} \middle| \int \mathrm{d}^3 x \; : T^{00} : \middle| \mathbf{k} \right\rangle \stackrel{!}{=} \omega(\mathbf{k}) \,, \tag{A.34}$$

mit einer Linearkombination $\alpha^2 (\varepsilon^{(1)})^\mu + \beta^2 (\varepsilon^{(2)})^\mu$ der zuvor berechneten Polarisationsvektoren $(\varepsilon^{(1)})^\mu$ und $(\varepsilon^{(2)})^\mu$ (mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$) wird benötigt, um den Normierungsfaktor N' zu bestimmen:

$$\frac{1}{\sqrt{N'}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}(\alpha^2 + \beta^2)}} \,. \tag{A.35}$$

Der Faktor N' sollte nur von der Kombination $(\alpha^2 + \beta^2)$ abhängen. Diese Tatsache ist in der Tat erfüllt und ein guter Test für die Richtigkeit von N'. Setzen wir schließlich $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, so folgt als endgültiger Ausdruck für die Polarisationssumme, sofern diese mit eichinvarianten Ausdrücken kombiniert wird:

$$\boxed{\sum_{r=1,2} \overline{(\varepsilon^{(r)})}^\mu (\varepsilon^{(r)})^\nu = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \left\{ -\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \right) \xi^\mu \xi^\nu \right\} .} \tag{A.36}$$

A.2.3. Räumlich anisotroper Fall mit zwei ausgezeichneten Richtungen

Unter Verwendung der Lorenz-Eichung $k_\mu A^\mu = 0$ ergeben sich die Feldgleichungen des Vektorfeldes A^μ:

$$M^{\alpha\beta} A_\beta = 0 \,, \quad M^{\alpha\beta} = k^\mu k_\mu \eta^{\alpha\beta} - 2\kappa^{\alpha\mu\nu\beta} k_\mu k_\nu \,, \tag{A.37}$$

wobei $\kappa^{\alpha\mu\nu\beta}$ durch den nicht-doppelbrechenden Ansatz aus Gl. (3.13) mit $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ aus Abschnitt 3.7 gegeben ist. Aufgrund seiner Komplexität soll das Gleichungssystem an dieser Stelle nicht ausgeschrieben werden. Aus der Bedingung $\det(M) = 0$ ergibt sich erneut die physikalische Dispersionsrelation aus Abschnitt 13.1. Der Lösungsraum des Gleichungssystems unter Ver-

wendung dieser Dispersionsrelation ist im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Fällen eindimensional. Dies bedeutet, dass es nur einen einzigen Polarisationsvektor gibt; aus der Lösung des Gleichungssystems folgt dieser zu:

$$(\varepsilon^{(1),\mu}) = \frac{1}{\sqrt{N''}} \frac{1}{\sqrt{(\widetilde{\kappa}^{02}k_3 - \widetilde{\kappa}^{03}k_2)^2 + (\widetilde{\kappa}^{03}k_1 - \widetilde{\kappa}^{01}k_3)^2 + (\widetilde{\kappa}^{01}k_2 - \widetilde{\kappa}^{02}k_1)^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\kappa}^{03}k_2 - \widetilde{\kappa}^{02}k_3 \\ \widetilde{\kappa}^{01}k_3 - \widetilde{\kappa}^{03}k_1 \\ \widetilde{\kappa}^{02}k_1 - \widetilde{\kappa}^{01}k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{k}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}, \tag{A.38}$$

mit $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^\intercal$ und $\boldsymbol{\zeta} = (\widetilde{\kappa}^{01}, \widetilde{\kappa}^{02}, \widetilde{\kappa}^{03})$. N'' ist ein Normierungsfaktor, welcher analog zu den beiden vorherigen Fällen aus dem Energie-Impuls-Tensor bestimmt werden muss. Die Ursache dafür, dass es nur einen einzigen Polarisationsvektor gibt, liegt in der paritätsverletzenden Eigenschaft dieses Falls. Zwei Polarisationsvektoren ließen sich physikalisch als zwei unterschiedliche Polarisationsmoden auffassen (links- bzw. rechtshändig), die sich jedoch aufgrund der Paritätsverletzung unterschiedlich verhalten würden, beispielsweise in Bezug auf die Phasengeschwindigkeit der entsprechenden Moden. Doppelbrechung wäre eine Folge davon; diese ist jedoch aufgrund des nicht-doppelbrechenden Ansatzes (3.13) von vorn herein ausgeschlossen.

Um die „Polarisationssumme“ $\overline{(\varepsilon^{(1)})}^{\mu}(\varepsilon^{(1)})^{\nu}$ kovariant zu schreiben, machen wir hier den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\overline{(\varepsilon^{(1)})}^{\mu}(\varepsilon^{(1)})^{\nu} = \frac{1}{N''}(&\alpha''\eta^{\mu\nu} + \beta'' k^\mu k^\nu + \gamma''(k^\mu \xi^\nu + \xi^\mu k^\nu) + \delta''(k^\mu \zeta^\nu + \zeta^\mu k^\nu) \\ &+ \varepsilon'' \xi^\mu \xi^\nu + \iota'' \zeta^\mu \zeta^\nu + \kappa''(\xi^\mu \zeta^\nu + \zeta^\mu \xi^\nu)\,.\end{aligned} \tag{A.39}$$

Die Lösung des Systems führt auf

$$\alpha'' = -1\,, \quad \mathscr{N}\beta'' = -[(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]\,, \tag{A.40a}$$

$$\mathscr{N}\gamma'' = [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]\omega\,, \quad 2\mathscr{N}\delta'' = \widetilde{\kappa}^{01}k_1 + \widetilde{\kappa}^{02}k_2 + \widetilde{\kappa}^{03}k_3\,, \tag{A.40b}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{N}\varepsilon'' = {}& [(\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]k_1^2 + [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]k_2^2 + [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2]k_3^2 \\ &- 2(\widetilde{\kappa}^{01}\widetilde{\kappa}^{02}k_1 + \widetilde{\kappa}^{01}\widetilde{\kappa}^{03}k_1k_3 + \widetilde{\kappa}^{02}\widetilde{\kappa}^{03}k_2k_3) \\ &- [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]\omega^2\,,\end{aligned} \tag{A.40c}$$

$$4\mathscr{N}\iota'' = -k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\,, \quad 2\mathscr{N}\kappa'' = -[\widetilde{\kappa}^{01}k_1 + \widetilde{\kappa}^{02}k_2 + \widetilde{\kappa}^{03}k_3]\omega\,, \tag{A.40d}$$

mit dem Nenner $\mathscr{N}$

$$\begin{aligned}\mathscr{N} = {} & [(\widetilde{\kappa}^{02})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]k_1^2 + [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{03})^2]k_2^2 + [(\widetilde{\kappa}^{01})^2 + (\widetilde{\kappa}^{02})^2]k_3^2 \\ & - 2(\widetilde{\kappa}^{01}\widetilde{\kappa}^{02}k_1k_2 + \widetilde{\kappa}^{01}\widetilde{\kappa}^{03}k_1k_3 + \widetilde{\kappa}^{02}\widetilde{\kappa}^{03}k_2k_3)\,. \end{aligned} \tag{A.40e}$$

Mittels der charakteristischen Vierervektoren ξ^μ und ζ^μ dieses Falls lässt sich die Lösung kompakter schreiben:

$$\alpha'' = -1\,, \quad \mathscr{N}'\beta'' = \zeta^\mu\zeta_\mu\,, \quad \mathscr{N}'\gamma'' = -(\zeta^\mu\zeta_\mu)(\xi^\nu k_\nu)\,, \quad \mathscr{N}'\delta'' = -\zeta^\mu k_\mu\,. \tag{A.41a}$$

$$\mathscr{N}'\varepsilon'' = (k^\mu k_\mu)(\zeta^\nu\zeta_\nu) - (k^\mu\zeta_\mu)^2\,, \quad \mathscr{N}'\iota'' = (k^\mu k_\mu)(\xi^\nu\xi_\nu) - (k^\mu\xi_\mu)^2\,, \tag{A.41b}$$

$$\mathscr{N}'\kappa'' = -2k^\mu k_\mu + (k^\mu\xi_\mu)(k^\nu\zeta_\nu)\,, \tag{A.41c}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathscr{N}' = {} & -(4(k^\mu\xi_\mu)(k^\nu\zeta_\nu) + (\xi^\mu\xi_\mu)(k^\nu\zeta_\nu)^2 + (\zeta^\mu\zeta_\mu)(k^\nu\xi_\nu)^2 \\ & \qquad + (k^\mu k_\mu)[4 - (\xi^\nu\xi_\nu)(\zeta^\varrho\zeta_\varrho)]) = \\ = {} & (\zeta^\mu\zeta_\mu)[k^\nu k_\nu - (\xi^\nu k_\nu)^2] - (k^\mu\zeta_\mu)^2\,. \end{aligned} \tag{A.41d}$$

Nun ist noch die Normierungskonstante N'' über die Normierungsbedingung aus Gl. (A.9) zu bestimmen. Die Berechnung kann analog zum räumlich isotropen Fall durchgeführt werden, da $(\varepsilon^{(1)})^0 = 0$ ist. Mit Gl. (A.13a) und (A.38) ergibt sich, dass nur der erste Term in Gl. (A.10) zu T^{00} beiträgt, während sowohl der zweite als auch dritte Term verschwindet. Es folgt dann:

$$\langle \mathbf{k}, \sigma| : P^0 : |\mathbf{k}, \sigma\rangle = \frac{1}{N''}\frac{\omega^2 + \mathbf{k}^2}{2\omega} = \frac{1}{N''}\frac{2\mathbf{k}^2 - (k^\mu\zeta_\mu)\omega}{2\omega} = \frac{1}{N''}\left(\omega + \frac{k^\mu\zeta_\mu}{2}\right) \stackrel{!}{=} \omega\,. \tag{A.42}$$

Damit gilt für den Normierungsfaktor:

$$N'' = 1 + \frac{k^\mu\zeta_\mu}{2\omega} = \frac{\sqrt{k_\perp^2 + (1+\mathcal{C}^2)k_\parallel^2}}{\omega}\,. \tag{A.43}$$

Schlussendlich lautet die „Polarisationssumme“, sofern diese mit eichinvarianten Ausdrücken kombiniert wird:

$$\begin{aligned}\overline{(\varepsilon^{(1)})}^\mu(\varepsilon^{(1)})^\nu = {} & \frac{\omega}{\sqrt{k_\perp^2 + (1+\mathcal{C}^2)k_\parallel^2}}\Big\{-\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{(\zeta^\mu\zeta_\mu)[k^\nu k_\nu - (\xi^\nu k_\nu)^2] - (k^\mu\zeta_\mu)^2} \\ & \times \big([(k^\mu k_\mu)(\zeta^\nu\zeta_\nu) - (k^\mu\zeta_\mu)^2]\xi^\mu\xi^\nu + [(k^\mu k_\mu)(\xi^\nu\xi_\nu) - (k^\mu\xi_\mu)^2]\zeta^\mu\zeta^\nu \\ & -[2k^\mu k_\mu + (k^\mu\xi_\mu)(k^\nu\zeta_\nu)](\xi^\mu\zeta^\nu + \zeta^\nu\xi^\mu)\big)\Big\}\,. \end{aligned} \tag{A.44}$$

A.3. Proton-Breakup-Prozess

In Kapitel 6 haben wir uns ausführlich mit dem Proton-Breakup-Prozess $p \to pe^+e^-$ beschäftigt. Das zugehörige Feynman-Diagramm für den Prozess auf Baumgraphenniveau ist in Abb. A.1 dargestellt. Der große Anteil der zugehörigen Berechnungen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Hauptteil präsentiert, sondern ist an dieser Stelle zusammengefasst.

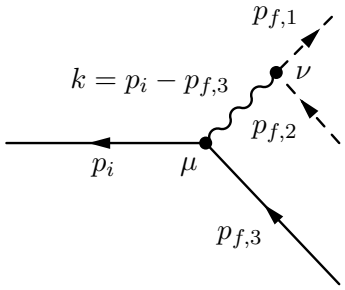


Abbildung A.1.: Proton-Breakup-Prozess mit Impuls p_i des einlaufenden Protons. Die Vierimpulse des auslaufenden Elektrons bzw. Positrons sind durch $p_{f,1}$ bzw. $p_{f,2}$ gegeben. Der Vierimpuls des auslaufenden Protons werde mit $p_{f,3}$ bezeichnet. Das virtuelle Photon trägt dann den Vierimpuls $k = p_i - p_{f,3} = p_{f,1} + p_{f,2}$.

A.3.1. Das Amplitudenquadrat

Beginnen wir mit der Berechnung des Matrixelements des Prozesses. Mit der Amplitude

$$\mathcal{M} = \overline{u}_\alpha(p_{f,3})(\mathrm{i}e\gamma^\mu_{\alpha\beta})u_\beta(p_i)K_{\mu\nu}(k)\overline{u}_\delta(p_{f,1})(\mathrm{i}e\gamma^\nu_{\delta\varepsilon})v_\varepsilon(p_{f,2})\,, \tag{A.45}$$

und ihrer komplex konjugierten

$$\mathcal{M}^* = \overline{v}_{\varepsilon'}(p_{f,2})(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu'}_{\varepsilon'\delta'})u_{\delta'}(p_{f,1})K_{\mu'\nu'}(k)\overline{u}_{\beta'}(p_i)(-\mathrm{i}e\gamma^\mu_{\beta'\alpha'})u_{\alpha'}(p_{f,3})\,, \tag{A.46}$$

wobei $K_{\mu\nu}(p_i - p_{f,3}) = K_{\mu\nu}(k)$ der modifizierte Photonpropagator ist, kommen wir auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 = e^4 u_{\alpha'}(p_{f,3})\overline{u}_\alpha(p_{f,3})\gamma^\mu_{\alpha\beta}u_\beta(p_i)\overline{u}_{\beta'}(p_i)\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}v_\varepsilon(p_{f,2}) \\ \times\, \overline{v}_{\varepsilon'}(p_{f,2})\gamma^{\nu'}_{\varepsilon'\delta'}u_{\delta'}(p_{f,1})\overline{u}_\delta(p_{f,1})\gamma^\nu_{\delta\varepsilon}K_{\mu\nu}(k)K_{\mu'\nu'}(k)\,.\end{aligned} \tag{A.47}$$

Die Mittelung über alle Spins im Anfangszustand und Summation über die Spins im Endzustand führt zu (wobei die k-Abhängigkeit des Photonpropagators zur Übersichtlichkeit im

Folgenden unterdrückt wird):

$$\begin{aligned}
A &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s_1}\sum_{s_2,s_3,s_4}|\mathcal{M}|^2 = \\
&= \frac{e^2}{2}\mathrm{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mathrm{p})\gamma^\mu(\not{p} + m_\mathrm{p})\gamma^{\mu'}] \cdot \mathrm{Sp}[(\not{p}_2 - m_\mathrm{e})\gamma^{\nu'}(\not{p}_1 + m_\mathrm{e})\gamma^\nu]K_{\mu\nu}K_{\mu'\nu'} = \\
&= 16(p_i)_\alpha(p_{f,3})^\alpha(p_{f,1})_\beta(p_{f,2})^\beta K^{\gamma\delta}K^{\gamma\delta} + 32\{(p_i)_\alpha(p_{f,1})_\beta K^{\alpha\beta}(p_{f,2})_\gamma(p_{f,3})_\delta K^{\gamma\delta} \\
&\quad + (p_i)_\alpha(p_{f,2})_\beta K^{\alpha\beta}(p_{f,1})_\gamma(p_{f,3})_\delta K^{\gamma\delta} - (p_{f,1})_\alpha(p_{f,2})^\alpha(p_i)_\beta(p_{f,3})_\gamma K^{\beta\delta}K^{\gamma\delta} \\
&\quad - (p_i)_\alpha(p_{f,3})^\alpha(p_{f,1})_\beta(p_{f,2})_\gamma K^{\beta\delta}K^{\gamma\delta}\}\,. \qquad \text{(A.48)}
\end{aligned}$$

Bisher haben wir die Zerfallsbreite ganz formal berechnet unabhängig von einer Lorentzsymmetrieverletzung im Photonsektor. Damit sind nun die folgenden Änderungen durchzuführen:

1.) Das Ergebnis des modifizierten Photonpropagators des räumlich isotropen Falles aus Gl. (11.20) muss eingesetzt werden. In diesen Berechnungen soll die Landau-Eichung $\zeta = 0$ verwendet werden, weil diese den Propagatorterm und damit die Rechnung vereinfacht.

2.) In den Spinsummen muss die abweichende maximale Geschwindigkeit der massiven Teilchen aufgrund der Partoninhalts der modifizierten Photonen berücksichtigt werden:

$$\sum_s u_s(p)\overline{u}_s(p) = c'_q(\not{p} + mc'_q)\,. \qquad \text{(A.49)}$$

A.3.2. Die Integration über den Phasenraum

Die modifizierten Dispersionsrelationen für Protonen

$$\Omega_\mathrm{p} = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2p^2 + (1+\varepsilon)^4m_\mathrm{p}^2} = (1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)p + \frac{m_\mathrm{p}^2}{2p} + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{p}^3}{p^2}, \varepsilon^2, \frac{m_\mathrm{p}^2}{p}\cdot\varepsilon\right), \qquad \text{(A.50)}$$

und für Elektronen

$$\Omega_\mathrm{e} = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^2p^2 + (1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^4m_\mathrm{e}^2} = (1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)p + \frac{m_\mathrm{e}^2}{2p} + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{p}^3}{p^2}, \varepsilon^2, \frac{m_\mathrm{p}^2}{p}\cdot\varepsilon\right), \qquad \text{(A.51)}$$

werden in den folgenden Rechnungen verwendet. Hierbei sei $p \equiv |\mathbf{p}|$ und m_p bzw. m_e die Proton- bzw. Elektronmasse. ξ_p steht für den Eichbosoninhalt des Protons und ξ_e für den des Elektrons. Für die Berechnung der Zerfallsbreite reicht es, die Dispersionsrelationen bis zur Ordnung m^2/p zu betrachten, da wir sowieso nur am Grenzfall hoher Energie interessiert sind. Sei p_i der Viererimpuls des einlaufenden Protons und $p_{f,1}$, $p_{f,2}$, $p_{f,3}$ die Viererimpulse des

Elektrons, Positrons bzw. Protons im Endzustand. Diese können wie folgt gewählt werden:

$$(p_i^\mu) = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{p},1} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad (p_{f,1}^\mu) = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{e},1} \\ 0 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \tag{A.52a}$$

$$(p_{f,2}^\mu) = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{e},2} \\ p_2 \sin\vartheta\cos\varphi \\ p_2 \sin\vartheta\sin\varphi \\ p_2\cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad (p_{f,3}^\mu) = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{p},1} - \Omega_{\mathrm{e},1} - \Omega_{\mathrm{e},2} \\ -p_2 \sin\vartheta\cos\varphi \\ -p_2 \sin\vartheta\sin\varphi \\ p - p_1 - p_2\cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{A.52b}$$

Hierbei ist ϑ der Winkel zwischen den räumlichen Impulsen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Für die Berechnung werden die Skalarprodukte der Viererimpulse (A.52a) und (A.52b) benötigt. Dazu drücken wir p_1 und p_2 über den Impuls p des Protons im Anfangszustand aus. Dann gilt $p_1 = x_1 p$ und $p_2 = x_2 p$, also

$$(p_i)_\alpha (p_{f,1})^\alpha = \Omega_{\mathrm{p},1}\Omega_{\mathrm{e},1} - p^2 x_1\,, \tag{A.53a}$$

$$(p_i)_\alpha (p_{f,2})^\alpha = \Omega_{\mathrm{p},1}\Omega_{\mathrm{e},2} - p^2 x_2\cos\vartheta\,, \tag{A.53b}$$

$$(p_i)_\alpha (p_{f,3})^\alpha = \Omega_{\mathrm{p},1}(\Omega_{\mathrm{p},1} - \Omega_{\mathrm{e},1} - \Omega_{\mathrm{e},2}) - p^2(1-x_1) + p^2 x_2\cos\vartheta\,, \tag{A.53c}$$

$$(p_{f,1})_\alpha (p_{f,2})^\alpha = \Omega_{\mathrm{e},1}\Omega_{\mathrm{e},2} - p^2 x_1 x_2\cos\vartheta\,, \tag{A.53d}$$

$$(p_{f,1})_\alpha (p_{f,3})^\alpha = \Omega_{\mathrm{e},1}(\Omega_{\mathrm{p},1} - \Omega_{\mathrm{e},1} - \Omega_{\mathrm{e},2}) - p^2 x_1(1 - x_1 - x_2\cos\vartheta)\,, \tag{A.53e}$$

$$(p_{f,2})_\alpha (p_{f,3})^\alpha = (\Omega_{\mathrm{p},1} - \Omega_{\mathrm{e},1} - \Omega_{\mathrm{e},2})\Omega_{\mathrm{e},2} + p^2 x_2^2 - p^2(1-x_1)x_2\cos\vartheta\,. \tag{A.53f}$$

Dieses Vorgehen erweist sich als sinnvoll, weil die Ausdrücke dann von einem einzigen dimensionsbehafteten physikalischen Impuls (und den Massen) abhängen, wohingegen die Integrationsvariablen x_1 und x_2 dimensionslos sind. Wenn wir Entwicklungen für große Impulse p durchführen, müssten wir außerdem auch berücksichtigen, dass sowohl p_1 als auch p_2 auch von derselben Größenordnung sind. Man erhält als Energiebilanz:

$$\begin{aligned}\Delta E(x_1, x_2, p, m_\mathrm{p}) = \Omega_{\mathrm{p},1}(p, m_\mathrm{p}) - \Omega_{\mathrm{e},1}(x_1, p, m_\mathrm{p}) \\ - \Omega_{\mathrm{e},2}(x_2, p, m_\mathrm{p}) - \Omega_{\mathrm{p},2}(x_1, x_2, p, m_\mathrm{p})\,,\end{aligned} \tag{A.54}$$

wobei

$$\Omega_{\mathrm{p},1}(p, m_\mathrm{p}) = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2 p^2 + (1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^4 m_\mathrm{p}^2}\,, \tag{A.55a}$$

$$\Omega_{\mathrm{e},1}(x_1, p) = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^2 p^2 x_1^2 + (1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^4 m_\mathrm{e}^2}\,, \tag{A.55b}$$

$$\Omega_{\mathrm{e},2}(x_2, p) = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^2 p^2 x_2^2 + (1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^4 m_\mathrm{e}^2}\,, \tag{A.55c}$$

und

$$\Omega_{\mathrm{p},2}(x_1,x_2,p,m_\mathrm{p}) = \sqrt{(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2p^2[(1-x_1)^2+x_2^2-2(1-x_1)x_2\cos\vartheta]+(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^4m_\mathrm{p}^2}\,. \tag{A.55d}$$

Hier ist $\Omega_{\mathrm{p},1}$ die Dispersionsrelation des einlaufenden Protons und $\Omega_{\mathrm{e},1}$, $\Omega_{\mathrm{e},2}$ bzw. $\Omega_{\mathrm{p},2}$ sind die Dispersionsrelationen der Teilchen im Endzustand. Aufgrund der Komplexität der auftretenden Integrale machen wir im Folgenden Gebrauch von der Skalenhierarchie $p \gg m_\mathrm{p} \gg m_\mathrm{e}$.

Dann kann die Zerfallsbreite über

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\Omega_{\mathrm{p},1}(\mathbf{p})}\int\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3 2\omega_i(\mathbf{p}_i)}\right)\\ \times(2\pi)^4\delta\left(\mathbf{p}-\sum_{j=1}^{3}\mathbf{p}_j\right)\delta\left(\Omega_{\mathrm{p},1}(\mathbf{p})-\sum_{l=1}^{3}\omega_l(\mathbf{p}_l)\right)A(\mathbf{p},\Omega_{\mathrm{p},1}(\mathbf{p}),\mathbf{p}_i,\omega_i(\mathbf{p}_i))\,,\end{aligned} \tag{A.56}$$

berechnet werden, wobei $\mathbf{p}$ der räumliche Impuls des einlaufenden Protons und $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ die räumlichen Impulse der Teilchen im Endzustand sind. Außerdem gilt $\omega_1 = \Omega_{\mathrm{e},1}$, $\omega_2 = \Omega_{\mathrm{e},2}$ und $\omega_3 = \Omega_{\mathrm{p},2}$. $A(\mathbf{p},\Omega(\mathbf{p}),\mathbf{p}_i,\omega_i(\mathbf{p}_i))$ ist das spin-summierte und -gemittelte Amplitudenquadrat, welches von den räumlichen Impulsen und den Dispersionsrelationen der Teilchen abhängt.

Wegen der Impulserhaltung ist eine der drei Integrationen trivial. Für die verbleibenden beiden Integrationen werden Kugelkoordinaten $(x_1,\vartheta_1,\varphi_1)$ und $(x_2,\vartheta_2,\varphi_2)$ eingeführt, wobei ϑ_2 gleich dem zuvor definierten Winkel ϑ zwischen den räumlichen Impulsen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ ist. Da das Amplitudenquadrat von den Azimutwinkeln φ_1, φ_2 und dem Polarwinkel ϑ_1 nicht abhängt, können diese Integrationen sofort ausgeführt werden. Dies führt zu folgendem Ergebnis

$$\begin{aligned}\Gamma(p) = \frac{1}{64\pi^3}\frac{1}{\Omega_{\mathrm{p},1}(p,m_\mathrm{p})}p^6\int_0^\infty\mathrm{d}x_1\,x_1^2\int_0^\infty\mathrm{d}x_2\,x_2^2\int_0^\pi\sin\vartheta\,\delta(\Delta E(x_1,x_2,m_\mathrm{p}))\\ \times\frac{1}{\Omega_{\mathrm{e},1}(x_1,p,m_\mathrm{e})\Omega_{\mathrm{e},2}(x_2,p,m_\mathrm{e})\Omega_{\mathrm{p},2}(x_1,x_2,p,m_\mathrm{p})}A(x_1,x_2,m_\mathrm{p})\,,\end{aligned} \tag{A.57}$$

mit dem Amplitudenquadrat $A(x_1,x_2,m_\mathrm{p})$.

A.3.3. Die nichttriviale Winkelintegration

Die Energieerhaltung $\Delta E(x_1,x_2,m_\mathrm{p}) = 0$, welche durch die δ-Distribution festgelegt wird, beschränkt den Phasenraum weiter. Die Integration über ϑ wird somit eliminiert, indem ϑ

durch den Wert ϑ_0 ersetzt wird, wobei $\cos\vartheta_0$ gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}\cos\vartheta_0 = \frac{1}{2p(1-x_1)x_2(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2}\Big\{&2(x_1+x_2)(1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)\sqrt{(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2(p^2+m_\mathrm{p}^2(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2)}\\&+p(x_1^2(\xi_\mathrm{p}-\xi_\mathrm{e})(2+(\xi_\mathrm{e}+\xi_\mathrm{p})\varepsilon)+x_2^2(\xi_\mathrm{p}-\xi_\mathrm{e})\varepsilon(2+(\xi_\mathrm{e}+\xi_\mathrm{p})\varepsilon)\\&-2x_1(x_2(1+\xi_\mathrm{e}\varepsilon)^2+(1+\xi_\mathrm{p}\varepsilon)^2)\Big\}\,.\end{aligned} \tag{A.58}$$

Die Bedingung $\vartheta_0 \in [0,\pi]$ beschränkt die Integration von $x_2 \in [0,\infty)$ auf das Intervall $[x_{2,i}, x_{2,f}]$, während sich die Ungleichungen $x_{2,i} > 0$ und $x_{2,f} > 0$ auf die Integration über $x_1 \in [0,\infty)$ auswirken und zwar derart, dass diese dann nur über den Bereich $[x_{1,i}, x_{1,f}]$ läuft. Eine Entwicklung für große Impulse und kleine ε führt auf die folgenden expliziten Intervalle:

$$x_2 \in \left[\frac{1}{2}(\xi_\mathrm{p}-\xi_\mathrm{e})\varepsilon\, x_1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{p}^2}{p^2}\right), 1 - x_1 + \frac{1}{2}(\xi_\mathrm{p}-\xi_\mathrm{e})\varepsilon + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{p}^2}{p^2\varepsilon}\right)\right]\,, \tag{A.59}$$

$$x_1 \in \left[0, 1 + \frac{1}{2}(\xi_\mathrm{p}-\xi_\mathrm{e})\varepsilon + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{p}^2}{p^2\varepsilon}\right)\right]\,. \tag{A.60}$$

Weiterhin benötigen wir aufgrund der Vorschrift aus Gl. (A.3) in Abschnitt A.1 die folgende Ableitung:

$$\left|\frac{\partial\Delta E(x_1,x_2,m_\mathrm{p})}{\partial\vartheta}\right| = \frac{p^2|(1-x_1)x_2|\sin\vartheta}{\sqrt{p^2((1-x_1)^2+x_2^2)-2p^2(1-x_1)x_2\cos\vartheta+m^2}}\,, \tag{A.61}$$

mit $\sin\vartheta > 0$ für $\vartheta \in [0,\pi]$. $\sin\vartheta$ tritt außerdem entsprechend im Volumenelement der Kugelkoordinaten auf und kürzt sich deshalb heraus. Außerdem geben wir der Vollständigkeit halber das Amplitudenquadrat in gewöhnlicher QED an:

$$A(x_1,x_2) = 32\frac{(p_i)_\alpha(p_{f,1})^\alpha(p_{f,2})_\beta(p_{f,3})^\beta + (p_i)_\gamma(p_{f,2})^\gamma(p_{f,1})_\delta(p_{f,3})^\delta}{(p_{f,1}+p_{f,2})_\lambda(p_{f,1}+p_{f,2})^\lambda}\,. \tag{A.62}$$

Der entsprechende Ausdruck in der modifizierten QED ist kompliziert und wird hier nicht aufgeführt. Nachdem wir die Integration über ϑ ausgeführt haben, kann die Ersetzung

$$\Omega_{\mathrm{p},2}(x_1,x_2,p,m_\mathrm{p}) = \Omega_{\mathrm{p},1}(p,m_\mathrm{p}) - \Omega_{\mathrm{e},1}(x_1,p,m_\mathrm{e}) - \Omega_{\mathrm{e},2}(x_2,p,m_\mathrm{e})\,, \tag{A.63}$$

aufgrund der Energieerhaltung durchgeführt werden.

A.3.4. Die verbleibenden radialen Integrationen und der Hochenergielimes

Die verbleibenden Integrationen über x_1 und x_2 sind mühsam, können aber analytisch durchgeführt werden, wenn wir den Integranden für kleine Lorentzsymmetrie-verletzende Parameter ε und große Impulse p entwickeln. Jedoch gibt es eine Feinheit, die im Folgenden erklärt werden soll. In der gewöhnlichen QED ist der Prozess – wie bereits gezeigt wurde – energetisch

verboten. Im Hochenergielimes jedoch, also im Prinzip für masselose Protonen und Elektronen, ist er energetisch erlaubt. Die räumlichen Impulse liegen in diesem Falle auf einer Linie und es gilt

$$(p_i^\mu) = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (p_{f,1}^\mu) = p \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (p_{f,2}^\mu) = p \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (p_{f,3}^\mu) = p \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{A.64}$$

wobei die gewöhnliche Dispersionsrelation für Teilchen mit verschwindender Masse, also $E = |\mathbf{p}| = p$, schon verwendet wurde. Aus der Impulserhaltung

$$p = p(x_1 + x_2 + x_3)\,, \tag{A.65}$$

folgt automatisch auch, dass die Energie erhalten ist:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \Leftrightarrow p = p(x_1 + x_2 + x_3)\,. \tag{A.66}$$

Somit verschwindet der Öffnungswinkel zwischen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$, was dazu führt, dass das virtuelle Photon sich auf der Massenschale befindet! Bezeichnen wir mit k_α den Viererimpuls des Photons, so gilt:

$$\begin{aligned} k_\alpha k^\alpha &= (p_i - p_{f,3})_\alpha (p_i - p_{f,3})^\alpha = (p_i)_\alpha (p_i)^\alpha + (p_{f,3})_\alpha (p_{f,3})^\alpha - 2(p_i)_\alpha (p_{f,3})^\alpha = \\ &= -2(p_i^0 p_{f,3}^0 - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{f,3}) = -2(pp_3 - pp_3) = 0\,. \end{aligned} \tag{A.67}$$

Somit erzeugt $k_\alpha k^\alpha$ im Falle masseloser Teilchen eine Singularität im Photonpropagator. Dieses pathologische Verhalten tritt ebenso in der modifizierten QED auf und muss durch Teilchenmassen m_p bzw. m_e regularisiert werden. Somit ist eine naive Berechnung im Grenzfall hoher Energien nicht möglich, im Gegensatz zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung oder zum Photonzerfall.

Die Ergebnisse der weiteren Berechnungen sind in Abschnitt 6.6 angegeben.

Anhang B.

Transformation der Lorentzsymmetrieverletzung vom Photonsektor zum Materiesektor

Unser Ziel ist es, mittels einer geeigneten Koordinatentransformation die Lorentzsymmetrieverletzung vom Photonsektor in den Materiesektor zu übertragen. Außerdem soll die modifizierte Dispersionsrelation der Materie abgeleitet werden. Die Tatsache, dass ein solches möglich ist, wurde bereits in [27] erwähnt; hier wollen wir die wichtigsten Schritte nachvollziehen. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden in Abschnitt 6 zur Betrachtung des Proton-Breakup-Prozesses benötigt.

Ausgangspunkt stellt die Lagrangedichte der modifizierten QED dar:

$$\mathcal{L}_{\text{modQED}} = \mathcal{L}_{\text{standMax}} + \mathcal{L}_{\text{modMax}} + \mathcal{L}_{\text{standDirac}} \,, \tag{B.1}$$

mit dem standardmäßigen kinetischen Photonterm

$$\mathcal{L}_{\text{standMax}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{B.2}$$

dem modifizierten Photonsektor

$$\mathcal{L}_{\text{modMax}} = -\frac{1}{4} \kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\varrho\sigma} \,, \tag{B.3}$$

und dem Materiesektor

$$\mathcal{L}_{\text{standDirac}} = \sum_{s=\text{p,e}} \overline{\psi}_s (\gamma^\mu (\mathrm{i}\partial_\mu - q_s A_\mu) + m_s) \psi_s \,. \tag{B.4}$$

Zur besseren Übersichtlichkeit in den folgenden Berechnungen haben wir den Photonanteil in den Standard-Maxwell-Term (B.2) und in den modifizierten Term (B.3) aufgespalten. In (B.4) bezeichnet s die Teilchenspezies und q_s die zugehörige Ladung.

Die parametrisierte Lorentzsymmetrieverletzung vom Photon- in den Materiesektor zu transformieren, funktioniert jedoch nur in führender Ordnung bezüglich der Lorentzsymmetrie-

verletzenden Parameter [113]. Korrekturterme höherer Ordnung verbleiben im Photonsektor. Somit werden in den folgenden Berechnungen nur Terme linear bezüglich der Lorentzsymmetrieverletzung betrachtet; höhere Ordnungen sind zu vernachlässigen. Damit muss man sich bei jeder Gleichung (außer die erste von Gl. (B.5)) klarmachen, dass Terme $\sim \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}^2)$ auftreten; wir wollen das Landau-Symbol jedoch der Übersichtlichkeit halber weglassen; die durchgeführte Näherung wird durch das Symbol „$\simeq$“ gekennzeichnet. Kommen wir nun zur relevanten Koordinatentransformation (und ihrer Inversen):

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}\,, \tag{B.5a}$$

$$x^{\mu} \simeq x'^{\mu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu}\,. \tag{B.5b}$$

Damit ergibt sich sofort die entsprechende Transformation der Viererableitung zu:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{\delta^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \simeq \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \simeq \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\,. \tag{B.6}$$

Die Transformation des Vektorpotentials wiederum lautet:

$$A^{\varrho}(x^{\mu}) \simeq A^{\varrho}\left(x'^{\mu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu}\right) \simeq A^{\varrho}(x'^{\mu}) + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu}\partial'_{\mu}A^{\varrho}(x'^{\mu})\,, \tag{B.7a}$$

$$A^{\varrho}(x'^{\mu}) \simeq A^{\varrho}(x^{\mu}) - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu}\partial'_{\mu}A^{\varrho}(x^{\mu})\,. \tag{B.7b}$$

Diese Transformationen sollen auf den Standard-Maxwell-Term angewendet werden. Dabei gehen wir von den ungestrichenen Größen aus und ersetzen diese durch gestrichene Variablen in führender Ordnung. Im Folgenden setzen wir der Übersichtlichkeit halber $A(x'^{\mu}) \equiv A'$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{standMax}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left\{\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}\right\} = \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\left(\partial'_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\alpha}{}_{\mu}\partial'_{\alpha}\right)\left(A'_{\nu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}x'^{\gamma}\partial'_{\beta}A_{\nu}\right)\right. \\
&\qquad \times \left(\partial'^{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu}{}_{\varrho}\partial'^{\varrho}\right)\left(A'^{\nu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\sigma}{}_{\kappa}x'^{\kappa}\partial'_{\sigma}A'^{\nu}\right) \\
&\qquad\quad - \left(\partial'_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\alpha}{}_{\mu}\partial'_{\alpha}\right)\left(A'_{\nu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}x'^{\gamma}\partial'_{\beta}A'_{\nu}\right) \\
&\qquad\qquad \left.\times \left(\partial'^{\nu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\nu}{}_{\varrho}\partial'^{\varrho}\right)\left(A'^{\mu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\sigma}{}_{\kappa}x'^{\kappa}\partial'_{\sigma}A'^{\mu}\right)\right\}\,.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Ausmultiplizieren führt erneut auf den Standard-Maxwell-Term in gestrichenen Koordinaten und zusätzliche Terme, die direkt proportional zur Lorentzsymmetrieverletzung sind. Der letztere Term wird mit dem Index „(2)“ gekennzeichnet. Als Beispiel geben wir die Berechnung

eines solchen Terms an; die Berechnung der restlichen funktioniert analog:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}\partial'_{\mu}(x'^{\gamma}\partial'_{\beta}A'_{\nu})\partial'^{\mu}A'^{\nu} &= \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}\delta_{\mu}{}^{\gamma}\partial'_{\beta}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}x'^{\gamma}\partial'_{\mu}\partial'_{\beta}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} = \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\mu}\partial'_{\beta}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}\partial'_{\beta}(x'^{\gamma}\partial'_{\mu}A'_{\nu})\partial'^{\mu}A'^{\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\gamma}\delta^{\gamma}{}_{\beta}\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} = \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\mu}\partial'_{\beta}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu}\,. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Im zweiten Schritt haben wir partielle Integration benutzt. Dabei verschwindet im Ergebnis der zweite Summand, nach Integration über x' (in der Wirkung), da dieser eine totale Ableitung, also einen Randterm produziert. Der dritte Summand ist null wegen der Spurfreiheit von $\kappa^{\mu\nu}$, nämlich $\kappa^{\mu}{}_{\mu} = 0$. Es gilt also

$$\mathcal{L}_{\text{standMax}} = \mathcal{L}'_{\text{standMax}} + \mathcal{L}'^{(2)}_{\text{standMax}}\,, \tag{B.10}$$

mit

$$\mathcal{L}'_{\text{standMax}} = -\frac{1}{2}(\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} - \partial_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\nu}A'^{\mu}) = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}\,, \tag{B.11}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'^{(2)}_{\text{standMax}} &\simeq \frac{1}{4}\Big\{\widetilde{\kappa}^{\alpha}{}_{\mu}\partial'_{\alpha}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\nu} + \widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\nu}\partial'_{\mu}A'_{\beta}\partial'^{\mu}A'^{\nu} + \widetilde{\kappa}_{\varrho}{}^{\mu}\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\varrho}A'^{\nu} + \widetilde{\kappa}_{\sigma}{}^{\nu}\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\mu}A'^{\sigma} \\ &\qquad -\widetilde{\kappa}^{\alpha}{}_{\mu}\partial'_{\alpha}A'_{\nu}\partial'^{\nu}A'^{\mu} - \widetilde{\kappa}^{\beta}{}_{\nu}\partial'_{\mu}A'_{\beta}\partial'^{\nu}A'^{\mu} - \widetilde{\kappa}_{\varrho}{}^{\nu}\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\varrho}A'^{\mu} - \widetilde{\kappa}_{\sigma}{}^{\mu}\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'^{\nu}A'^{\sigma}\Big\} = \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\widetilde{\kappa}^{\alpha\mu}\partial'_{\alpha}A'^{\nu}\partial'_{\mu}A'_{\nu} + \widetilde{\kappa}^{\beta\nu}\partial'^{\mu}A'_{\beta}\partial'_{\mu}A'_{\nu} - \widetilde{\kappa}^{\nu\varrho}\partial'^{\mu}A'_{\nu}\partial'_{\varrho}A'_{\mu} - \widetilde{\kappa}^{\mu\sigma}\partial'^{\mu}A'^{\nu}\partial'_{\nu}A'_{\sigma}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Im Anteil $\mathcal{L}_{\text{modMax}}$ können die Ableitung und das Vektorpotential direkt durch ihre gestrichenen Größen ersetzt werden, weil die zusätzlichen Beiträge sowieso höherer Ordnung sind. Mit dem nicht-doppelbrechenden Ansatz

$$\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\nu\varrho} - \eta^{\nu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\mu\varrho})\,, \tag{B.13}$$

ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{\text{modMax}} &\simeq -\frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}F'_{\mu\nu}F'_{\varrho\sigma} = -\kappa^{\mu\nu\varrho\sigma}(\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'_{\varrho}A'_{\sigma}) = \\ &= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\nu\varrho} - \eta^{\nu\varrho}\widetilde{\kappa}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\widetilde{\kappa}^{\mu\varrho})\partial'_{\mu}A'_{\nu}\partial'_{\varrho}A'_{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{\kappa}^{\nu\varrho}\partial'^{\sigma}A'_{\nu}\partial'_{\varrho}A'_{\sigma} + \widetilde{\kappa}^{\mu\sigma}\partial'_{\mu}A'^{\varrho}\partial'_{\varrho}A'_{\sigma} - \widetilde{\kappa}^{\mu\varrho}\partial'_{\mu}A'^{\sigma}\partial_{\varrho'}A'_{\sigma} - \widetilde{\kappa}^{\nu\sigma}\partial'^{\varrho}A'_{\nu}\partial'_{\varrho}A'_{\sigma})\,. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Hier treten somit dieselben Terme wie in Gl. (B.12) auf und zwar alle mit einem entgegengesetzten Vorzeichen. Damit ist zur führenden Ordnung in $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ die parametrisierte Lorentz-

symmetrieverletzung auf dem Photonsektor beseitigt. Die Transformation (B.5) führt dann zu zusätzlichen Beiträgen im Materiesektor. Wir benötigen das Transformationsverhalten einer beliebigen Funktion $f(x^\mu)$, die keine Ableitungen ∂_μ enthält (da diese sich anders transformieren als x^μ):

$$\begin{aligned} f(x^\mu) &\simeq f\left(x'^\mu + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\mu{}_\nu x'^\nu\right) = f(x'^\mu) + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\mu{}_\nu x'^\nu \partial'_\mu f(x'^\mu) = \\ &= f(x'^\mu) + \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\mu{}_\nu \partial'_\mu (x'^\nu f(x'^\mu)) - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\mu f(x'^\mu) = f(x'^\mu)\,. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Auch dies ergibt sich mittels partieller Integration über x'. Der zweite Summand ist wieder ein Randterm, der nach Integration über x' verschwindet, und der dritte Summand fällt erneut aufgrund der Spurfreiheit von $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$ weg. Wir wenden diese Regel im Folgenden auf die Funktionen $g^\mu(x^\alpha) \equiv (\overline{\psi}A^\mu\psi)(x^\alpha)$ und $h(x^\beta) = (\overline{\psi}\psi)(x^\beta)$ an. Mit $\overline{\psi}(x'^\mu) \equiv \overline{\psi}'$ bzw. $\psi(x'^\mu) \equiv \psi'$ resultiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{standDirac}} &= \sum_{s=\text{p,e}} \overline{\psi}_s[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - q_s A_\mu) + m_s]\psi \simeq \\ &\simeq \sum_{s=\text{p,e}} \overline{\psi}'_s \left\{\gamma^\mu\left[\mathrm{i}\left(\partial'_\mu - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^\varrho{}_\mu \partial'_\varrho\right) - q_s A'_\mu\right] + m_s\right\}\psi'_s = \\ &= \sum_{s=\text{p,e}} \left\{\overline{\psi}'_s\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial'_\mu - q_s A'_\mu)\psi'_s - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}\overline{\psi}'_s\gamma_\nu(\mathrm{i}\partial'_\mu)\psi'_s + m_s\overline{\psi}'_s\psi'_s\right\}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Somit lautet die Lagrangedichte in gestrichenen Koordinaten in führender Ordnung bezüglich $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$, wobei wir von jetzt ab auf die Striche verzichten wollen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{standMax}} + \mathcal{L}_{\text{modMax}} + \mathcal{L}_{\text{standDirac}} + \mathcal{L}_{\text{modDirac}}\,. \tag{B.17}$$

$\mathcal{L}_{\text{standMax}}$, $\mathcal{L}_{\text{modMax}}$ und $\mathcal{L}_{\text{standDirac}}$ sind durch die Gl. (B.2), (B.3) bzw. (B.4) gegeben. $\mathcal{L}_{\text{modDirac}}$ ist von der folgenden Gestalt:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{modDirac}} \simeq -\frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}\sum_{s=\text{p,e}}\overline{\psi}_s\gamma_\nu(\mathrm{i}\partial_\mu)\psi_s\,.} \tag{B.18}$$

Wir erkennen also, dass der freie kinetische Term des Materiesektors modifiziert wird, während der Wechselwirkungsterm zwischen Photon- und Materiesektor unberührt bleibt.

B.1. Modifizierte Dispersionsrelation für massive Spin-1/2-Fermionen

Infolge der obigen Transformation ändert sich auch die Dispersionsrelation von Spin-1/2-Teilchen. Um diese zu berechnen, benötigen wir die zuvor abgeleitete modifizierte freie La-

grangedichte des Materiesektors:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^{\text{frei}}_{\text{modDirac}} \simeq \overline{\psi}\left(\left\{\gamma^{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}\gamma_{\nu}\right\} \mathrm{i}\partial_{\mu} - m\right)\psi\,. \tag{B.19}$$

Diese beschreibt eine Teilchenspezies und dient als Ausgangspunkt. Zur Berechnung der Feldgleichungen des Spinorfelds ψ benötigen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\partial^{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\overline{\psi})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} = 0\,, \tag{B.20}$$

Mittels der Ableitungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\overline{\psi})} = \mathrm{i}\left(\gamma_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\right)\,, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} = -m\psi\,, \tag{B.21}$$

ergibt sich die modifizierte Diracgleichung im Ortsraum. Durch Fourier-Transformation folgt zusätzlich die Dirac-Gleichung im Impulsraum. Die letztere wird zur Herleitung der modifizierten Energie-Impuls-Beziehung benötigt. Wir geben jedoch der Vollständigkeit halber beide Gleichungen an:

$$\left\{\mathrm{i}\partial^{\mu}\left(\gamma_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\right) + m\right\}\psi = 0\,, \quad p^{\mu}\left(\gamma_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\right) + m = 0\,. \tag{B.22}$$

Aus der modifizierten Diracgleichung im Impulsraum müssen wir die γ-Matrix-Struktur entfernen. Dies erreicht man durch Multiplikation von Gl. (B.22) mit

$$p^{\varrho}\left(\gamma_{\varrho} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma}\right) - m\,, \tag{B.23}$$

und mittels der Berücksichtigung der Clifford-Algebra der γ-Matrizen. Auch hier werden Terme höherer Ordnung bezüglich der Lorentzsymmetrieverletzung vernachlässigt. Die kurze Rechnung

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\gamma_{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\right)p^{\mu}\left(\gamma_{\varrho} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma}\right)p^{\varrho} - m^2 \simeq \\
&\simeq \left(\gamma_{\mu}\gamma_{\varrho} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\gamma_{\varrho} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\varrho\sigma}\gamma_{\mu}\gamma^{\sigma}\right)p^{\mu}p^{\varrho} - m^2 = \\
&= \not{p}^2 - \left(\frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\gamma_{\varrho} + \widetilde{\kappa}_{\varrho\sigma}\delta_{\mu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}\widetilde{\kappa}_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu}\right)p^{\mu}p^{\varrho} - m^2 = p^{\alpha}p_{\alpha} - \widetilde{\kappa}^{\mu\varrho}p_{\mu}p_{\varrho} - m^2\,,
\end{aligned} \tag{B.24}$$

führt somit zu der folgenden Off-Shell-Dispersionsrelation bis zur führenden Ordnung in $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$:

$$\boxed{p^{\alpha}p_{\alpha} - \widetilde{\kappa}^{\mu\varrho}p_{\mu}p_{\varrho} - m^2 \simeq 0\,.} \tag{B.25}$$

Diese gilt allgemein für alle nicht-doppelbrechenden Parametrisierungen der modifizierten Maxwell-Theorie. Zur Untersuchungen im Zusammenhang teilchenphysikalischen Prozessen (beispielsweise dem Proton-Breakup-Prozess) benötigen wir die modifizierte Dispersionsrelation der Spin-1/2-Teilchen für den räumlich isotropen Fall. Für diesen gilt

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left((p^\alpha\xi_\alpha)^2 - (p^\beta p_\beta)\frac{\xi^\gamma\xi_\gamma}{4}\right) = \widetilde{\kappa}_{00}\left(p_0^2 + \frac{1}{3}p^2\right), \tag{B.26}$$

und als Endergebnis resultiert:

$$p_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\widetilde{\kappa}_{00}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)p^2 + m^2}\,. \tag{B.27}$$

Die Angabe dieses „exakten“ Ergebnisses, welches aus der Dispersionsrelation folgt, ist nicht unbedingt sinnvoll, da während der Herleitung der Dispersionsrelation nur Terme bis zur linearen Ordnung der Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter berücksichtigt wurden. Viel besser ist daher die Angabe folgender Entwicklung:

$$\boxed{p_0 = \left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00} + \mathcal{O}(\widetilde{\kappa}_{00}^2)\right)p + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{p}\right).} \tag{B.28}$$

Diese Entwicklung gilt auf jeden Fall auch mit den Näherungen, die zuvor bei der Herleitung gemacht wurden. Somit haben wir gezeigt, dass mittels einer Koordinatentransformation die Lorentzsymmetrieverletzung vom Photon- zum Materiesektor transformiert werden kann, jedoch nur zur führender Ordnung der Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter. Die „exakte“ modifizierte Energie-Impuls-Beziehung für Materieteilchen besitzt eine ähnliche Gestalt wie die für Photonen. Der Unterschied rührt wohl von der Tatsache her, dass bei der Transformation Terme höherer Ordnung in den Parametern vernachlässigt wurden. Deswegen wurde zusätzlich Gl. (B.28) angegeben, welche auf jeden Fall ihre Gültigkeit hat. Sie ist als Entwicklung für große Impulse linear bezüglich des Impulses; Massenterme sind durch den Impuls unterdrückt.

Darüber hinaus erkennen wir an Gl. (B.28) folgendes: So wie sich für $\widetilde{\kappa}_{00} > 0$ die maximale Geschwindigkeit von Photonen reduziert, während die für Materieteilchen gleich bleibt, erhöht sich die Geschwindigkeit nach der Transformation gleichermaßen für Materieteilchen und die der Photonen bleibt. Darin spiegelt sich das relative Verhalten beider Spezies bezüglich der Lorentzsymmetrieverletzung im nicht-doppelbrechenden Anteil der modifizierten Maxwell-Theorie wieder. Wie wir schon gesehen haben, bleibt die Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie konventionell, unabhängig davon, ob die Verletzung der Lorentzsymmetrie im Photon- oder im Materiesektor parametrisiert wird.

Anhang C.

Klassische Cherenkov-Strahlung

Dieses Kapitel basiert auf einigen Ergebnissen des Buchs von J. V. Jelley [40]. Das Buch benutzt das Gaußsche Einheitensystem; die hier folgenden Berechnungen werden jedoch im SI-System durchgeführt. Die Ergebnisse benötigen wir in Kapitel 7, wo es darum geht, die (Vakuum-)Cherenkov-Strahlung einer Ladungsverteilung zu untersuchen.

C.1. Abgestrahlte Energie einer einzelnen Ladung

Wir betrachten ein Punktteilchen der Ladung q, welches sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v durch ein Medium mit dem Brechungsindex n bewegt. Die Trajektorie des Teilchens zeige in z-Richtung.

Das Vektorpotential $\mathbf{A}$ wird in eine Fourier-Reihe entwickelt und zwar von der Gestalt

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_\omega \exp(\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{C.1}$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems ist es am geschicktesten, Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) zu gebrauchen. Somit kann das Vektorpotential $\mathbf{A}_\omega$ geschrieben werden als

$$\mathbf{A}_\omega = A_{\omega,\varrho}\mathbf{e}_\varrho + A_{\omega,\varphi}\mathbf{e}_\varphi + A_{\omega,z}\mathbf{e}_z\,. \tag{C.2}$$

Die beiden ersten Komponenten verschwinden: $A_{\omega,\varrho} = 0 = A_{\omega,\varphi}$. Es sei $\beta = v/c$ mit der Lichtgeschwindigkeit c. Bei hohen Geschwindigkeiten des Teilchens – was $\beta n > 1$ entspricht – lautet die dritte Komponente von $\mathbf{A}$ in großer Entfernung zu Ladung

$$A_{\omega,z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c\sqrt{2\pi s\varrho}}\exp\left\{\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{n}{c}(z\cos\theta + \varrho\sin\theta) + \frac{3}{4}\pi\mathrm{i}\right)\right\}\,, \tag{C.3}$$

mit

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(\beta^2 n^2 - 1)\,. \tag{C.4}$$

Die Frequenz der emittierten Cherenkov-Strahlung ist ω. Der Cherenkov-Winkel wird als θ bezeichnet berechnet sich über

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}\,. \tag{C.5}$$

A_z kann jetzt geschrieben werden als

$$\boxed{A_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c\sqrt{2\pi s\varrho}}\int\limits_0^\infty \sin(\chi)\,\mathrm{d}\omega\,, \quad \chi = \omega\left(t - \frac{n}{c}(z\cos\theta + \varrho\sin\theta)\right) + \frac{\pi}{4}\,.} \tag{C.6}$$

Mit $A_\varrho = A_\varphi = 0$ ergibt sich das skalare elektromagnetische Potential ϕ aus

$$\phi = -\frac{c}{n^2}\int^t \mathrm{d}t'\,\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \frac{\cos\theta}{n}A_z + C\,, \tag{C.7}$$

mit einer Integrationskonstanten C, welche der Einfachheit halber gleich null gesetzt wird. Das entsprechende Magnetfeld ergibt sich zu

$$H_\varrho = 0\,, \quad H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\,, \quad H_z = 0\,, \tag{C.8}$$

sowie das elektrische Feld

$$E_\varrho = -\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\,, \quad E_\varphi = 0\,, \quad E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\,. \tag{C.9}$$

Die abgestrahlte Energierate durch die Mantelfläche S eines Zylinders mit Radiusvektor

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\,, \tag{C.10}$$

kann aus

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_\varrho = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{e}_\varrho\,, \tag{C.11}$$

berechnet werden. Wir interessieren uns für die abgestrahlte Energierate für einen Beobachter, der sich weit entfernt von der Trajektorie des Teilchens befindet; dies entspricht $\varrho := R \gg 1$. Integration über die Mantelfläche des Zylinders mit Radius R und Länge l führt zur insgesamt abgestrahlten Energierate, wobei das Ergebnis aufgrund der Energieerhaltung nicht von R abhängt. Eine zusätzliche Integration über die Zeit mittels der Integrale in den Gl. (D.56),

(D.57) führt zu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{q^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\omega\,,} \tag{C.12}$$

also der bekannten Frank-Tamm-Gleichung.

C.2. Abgestrahlte Energie einer klassischen Ladungsverteilung

Im vorigen Abschnitt haben wir die abgestrahlte Energie einer Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x})$ berechnet, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der z-Achse durch ein Medium mit Brechungsindex n bewegt. Die Berechnung soll nun auf eine Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x})$ erweitert werden. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst eine diskrete Verteilung, welche aus n Punktladungen q_i besteht:

$$\varrho(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(x-x_i(t))\delta(y-y_i(t))\delta(z-z_i(t))\,, \tag{C.13}$$

mit

$$x_i(t) = a_i = \text{const.}\,, \quad y_i(t) = b_i = \text{const.}\,, \quad z_i(t) = c_i + vt\,. \tag{C.14}$$

Somit sitze die Punktladung q_i zur Zeit $t=0$ im Punkt $P_i = (a_i, b_i, c_i)$. Betrachtet man eine solche Punktladung, so sind Zylinderkoordinaten nicht länger geeignet. Das Vektorpotential A_z folgt aus Gl. (C.6) mit $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ und den Ersetzungen $x \mapsto x-a_i$, $y \mapsto y-b_i$, $z \mapsto z-c_i$. In A_z tritt eine neue Funktion $\chi := \chi(a_i, b_i, c_i)$ auf, welche nun von den Koordinaten des Punktes P_i abhängt:

$$\chi(a_i,b_i,c_i) = \omega\left\{t - \frac{n}{c}[(z-c_i)\cos\theta + \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}\sin\theta]\right\} + \frac{\pi}{4}\,. \tag{C.15}$$

Die Größen a_i, b_i und c_i werden als klein angenommen, so dass eine Taylor-Entwicklung in diesen Parametern sinnvoll ist. Physikalisch bedeutet diese Annahmen, dass die Ladungsverteilung für große Abstände genügend schnell verschwinden soll, so dass deren wesentlicher Anteil auf ein Volumen $V_D \sim \mathcal{O}(D^3)$ beschränkt ist. Hierbei ist D die typische Längenskala der Verteilung. Nachdem die Taylor-Entwicklung durchgeführt worden ist, können erneut Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ in den einzelnen Summanden verwendet werden. Mittels der Gl. (C.6) und der Taylor-Entwicklung von Gl. (C.15) folgt:

$$H_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\,, \quad H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\,, \quad H_z = 0\,, \tag{C.16a}$$

$$E_\varrho = -\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\,, \quad E_\varphi = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,, \quad E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\,, \tag{C.16b}$$

wobei man die φ-Abhängigkeit von A_z beachten muss. Hieraus resultieren die Feldstärken und die abgestrahlte Energie einer diskreten Ladungsverteilung, welche aus n Punktladungen q_i an den Punkten (a_i, b_i, c_i) besteht:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{c^2}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) + \frac{1-\beta^2}{c^4\beta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i c_i\right)^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega^2\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) + \frac{1}{2c^4}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} q_i b_i\right)^2\right\}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, n^2\omega^3\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 + \mathcal{O}\left\{\left(\frac{|\mathbf{P}|}{Q}\right)^4\right\}. \tag{C.17}$$

Der führende Term ist ähnlich zu dem, welcher bereits in der Frank-Tamm-Formel auftaucht. Anstelle der einzigen Ladung zum Quadrat tritt die Summe über alle Punktladungen der gesamten Ladungsverteilung, die danach quadriert wird. Damit sind also die relativen Vorzeichen der Ladungen zueinander wichtig und nicht nur deren Größe. Hier spielt also erst einmal die Gesamtladung der Verteilung rein. Ist diese gleich null, so verschwindet auch der führende Term in Gl. (C.17), welcher der bedeutendste Beitrag darstellt. Die nächsten beiden Beiträge hängen mit Komponenten des Dipolmoments der Ladungsverteilung zusammen. Diese sind jedoch bereits mit einem Faktor $D^2 \simeq |\mathbf{P}|^2/Q^2$ unterdrückt.

Gl. (C.17) kann für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x})$ verallgemeinert werden. Dabei sind die Summen über die einzelnen Ladungen durch Integrale über die Ladungsdichten zu ersetzen. Führen wir die Gesamtladung Q und das Dipolmoment $\mathbf{P}$ der kontinuierlichen Verteilung ein über

$$Q = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\varrho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathbf{x}\,\varrho(\mathbf{x}), \tag{C.18}$$

so ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{Q^2}{c^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) + \frac{P_z^2(1-\beta^2)}{c^4\beta^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega^3\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) + \frac{(\mathbf{P}-P_z\mathbf{e}_z)^2}{2c^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, n^2\omega^3\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 + \mathcal{O}\left\{\left(\frac{|\mathbf{P}|}{Q}\right)^4\right\}. \tag{C.19}$$

Hier tritt die z-Komponente des Dipolmoments und die Projektion des Dipolmoments in die x-y-Ebene auf:

$$P_z = \int \mathrm{d}^3x\, z\,\varrho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P} - P_z\mathbf{e}_z = \int \mathrm{d}^3x \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\varrho(\mathbf{x}). \tag{C.20}$$

Bei einer Bewegung der Verteilung in eine beliebige Richtung sind die entsprechenden Aus-

drücke durch Projektionen entlang bzw. senkrecht zur Bewegungsrichtung der Verteilung zu ersetzen.

C.2.1. Anwendung I: Ein Dipol in der x-y-Ebene

Wir betrachten einen Dipol, welcher entlang der y-Achse orientiert ist. Der Dipol bestehe aus einem Elektron am Punkt P_1 und einem Positron am Punkt P_2.

$$q_1 = -e,\, P_1 = \left(0, \frac{d}{2}\right) , \quad q_2 = e,\, P_2 = \left(0, -\frac{d}{2}\right) . \tag{C.21}$$

Mit der z-Komponente des Dipolmoments $P_z = 0$ und dem auf die x-y-Ebene projizierten Dipolmoment

$$\mathbf{P} - P_z \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -de \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{C.22}$$

erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{d^2 e^2}{2c^4} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, n^2 \omega^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 + \mathcal{O}(d^4) . \tag{C.23}$$

Die Cherenkov-Strahlung eines sich bewegenden Dipols wurde bereits von N. L. Balazs [114] behandelt, dessen Ergebnisse hier reproduziert werden konnten.

C.2.2. Anwendung II: Drei Ladungen in der x-y-Ebene

Wir betrachten ein Spielzeugmodell für das Neutron. Dieses bestehe aus einem Up- und zwei Down-Quarks, die auf den Ecken P_1, P_2 und P_3 eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge d sitzen sollen:

$$q_1 = -\frac{1}{3}e,\, P_1 = d\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) , \quad q_2 = -\frac{1}{3}e,\, P_2 = d\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) , \tag{C.24a}$$

$$q_3 = \frac{2}{3}e,\, P_3 = d\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) . \tag{C.24b}$$

Erneut erhalten wir mittels

$$P_z = 0\,, \quad \mathbf{P} - P_z \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ de/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{C.25}$$

das folgende Ergebnis für die abgestrahlte Energie:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{d^2e^2}{6c^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, n^2\omega^3\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)^2 + \mathcal{O}(d^4)\,. \tag{C.26}$$

Anhang D.

Berechnungen zur Unitarität und Mikrokausalität

Rechenschritte, die man beim ersten Lesen von Teil III dieser Dissertation nicht unbedingt verstehen muss, sollen im Folgenden präsentiert werden. Dabei gehen wir auf die wichtigsten Umformungen ein, welche für das ausführliche Nachvollziehen der Berechnungen notwendig sind. Ausgewertet werden unter anderem die Kommutatoren des Vektorpotentials bzw. der physikalischen Felder sowie die Bedingung der Reflexions-Positivität für verschiedene Fälle. Die Berechnungen dienen der Überprüfung von Mikrokausalität bzw. Unitarität dieser Fälle.

D.1. Berechnung der Kommutatorfunktion des Vektorpotentials

D.1.1. Erste Möglichkeit: direkte Berechnung

Mit der Fourier-Zerlegung des Vektorpotentials $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \sum_{r=1,2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}[a^{(r)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\\ +(a^{(r)})^\dagger(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)]\,,\end{aligned} \tag{D.1}$$

lässt sich der Kommutator direkt berechnen, indem die Integrationskontur $\mathcal{C}$ in der unteren Halbebene geschlossen wird und alle Pole im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Auf diese Weise ergibt sich:

$$\begin{aligned}K_{ij}(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})}\left\{\left(\sum_{r=1,2}\overline{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_i}(\mathbf{k})(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_j(\mathbf{k})\right)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})(t-t'))\right.\\ \left.-\left(\sum_{r=1,2}\overline{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_i}(\mathbf{k})(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_j(\mathbf{k})\right)\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})(t-t'))\right\} =\\ = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})}\,\Pi_{ij}(\mathbf{k})\left\{\exp(-\mathrm{i}k^\mu(x-y)_\mu)-\exp(\mathrm{i}k^\mu(x-y)_\mu)\right\} =\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\Pi_{ij}(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \exp(-\mathrm{i}k^\mu(x-y)_\mu)\Big|_{k^0=\omega(\mathbf{k})} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{-2\omega(\mathbf{k})} \exp(-\mathrm{i}k^\mu(x-y)_\mu)\Big|_{k^0=-\omega(\mathbf{k})} \right\} =$$
$$\overset{x^0\geq y^0}{=} \mathrm{i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\Pi_{ij}(\mathbf{k}) D(k) \exp(-\mathrm{i}k^\mu(x-y)_\mu)\,, \tag{D.2}$$

mit der Polarisationssumme

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \sum_{r=1,2} \overline{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_i}(\mathbf{k})(\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)})_j(\mathbf{k})\,, \tag{D.3}$$

und der skalaren Propagatorfunktion $D(k)$, welche das Inverse der Dispersionsrelation ist:

$$D(k)^{-1} = k_0^2 - \frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\mathbf{k}^2\,. \tag{D.4}$$

Mit dem Ergebnis der Polarisationssumme aus Abschnitt A.2.1 ergibt sich dann:

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right)\,. \tag{D.5}$$

D.1.2. Zweite Möglichkeit: allgemeiner Ansatz und Verwendung der Feldgleichungen

Als hilfreich erweist sich der allgemeine Ansatz

$$K_{ij}(x,0) = T_{ij}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})(\mathrm{i}D(x))\,, \tag{D.6}$$

wobei T_{ij} ein Differentialoperator ist, welcher die Indexstruktur des Kommutators berücksichtigt. $D(x)$ ist die skalare Kommutatorfunktion. Für $D(x)$ kann man einen Fourier-Ansatz machen:

$$D(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,D(k) \exp(-\mathrm{i}k^0x^0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,. \tag{D.7}$$

$T_{ij}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})$ erzeugt eine entsprechende Funktion $T_{ij}(k^0, \mathbf{k})$ im Impulsraum, indem dieser auf die Fourier-Transformierte $D(x)$ wirkt. Somit ist $K_{ij}(k)$ im Impulsraum gegeben durch

$$K_{ij}(k) = T_{ij}(k^0, \mathbf{k})(\mathrm{i}D(k))\,. \tag{D.8}$$

Da das Vektorpotential den Feldgleichungen genügt, sollte dies auch für den Kommutator des

Vektorpotentials gelten:

$$M_{ij}[A_j(x), A_k(0)] = 0\,, \tag{D.9}$$

wobei dies garantiert werden kann, indem $M_{ij}T_{jk} = \Pi_{ik}D^{-1}(k)$ mit einer noch unbekannten Funktion Π_{ik} gefordert wird. Dies kann durch Einsetzen des Kommutators mit der obigen Tensorstruktur T_{ij} gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})K_{jk}(x,0) &= \mathrm{i}M_{ij}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})T_{jk}(\mathrm{i}\partial^0, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})D(x) = \\
&= \mathrm{i}(2\pi)^{-4}\oint\limits_C \mathrm{d}k^0 \int \mathrm{d}^3k\, M_{ij}(k^0,\mathbf{k})T_{jk}(k^0,\mathbf{k})D(k)\exp(-\mathrm{i}k^0x^0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = \\
&= \mathrm{i}(2\pi)^{-4}\oint\limits_C \mathrm{d}k^0 \int \mathrm{d}^3k\, \Pi_{ik}(k^0,\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}k^0x^0 + \mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) = \\
&= \frac{\mathrm{i}(2\pi)^{-4}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\oint\limits_C \mathrm{d}k^0 \int \mathrm{d}^3k\, \left(\delta_{ik} - \frac{k_ik_k}{\mathbf{k}^2}\right)\exp(-\mathrm{i}k^0x^0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Infolgedessen verschwinden alle Pole und somit auch das Integral. Mit den Feldgleichungen $M_{ij} = D^{-1}(k)\delta_{ij}$ (siehe Gl. (3.22)) ergibt sich $T_{ik} = \Pi_{ik}$. Π_{ik} muss der Polarisationstensor sein und wir erhalten somit dasselbe Ergebnis wie bei der direkten Berechnung.

D.1.3. Dritte Möglichkeit: Extraktion aus dem Feynman-Propagator

Der Feynman-Propagator ist definiert als der Vakuumerwartungswert des zeit-geordneten Produkts von Feldoperatoren: $D_F^{\mu\nu}(x) = \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(0)|0\rangle$. Dieser wurde bereits sowohl in der axialen Eichung $n_\mu A^\mu(x) = 0$ als auch in der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ in Abschnitt 11.3 berechnet. Wir interessieren uns für die Kommutatorfunktion $[A^\mu(x), A^\nu(0)]$, die auch als Vakuumerwartungswert $\langle 0|[A^\mu(x), A^\nu(0)]|0\rangle$ geschrieben werden kann, da es sich sowieso um eine c-Zahl handelt. Der Feynman-Propagator enthält denselben Integranden wie $\langle 0|[A^\mu(x), A^\nu(0)]|0\rangle$, nur die Integrationskontur unterscheidet sich. Somit lässt sich das Ergebnis im Impulsraum aus dem Feynman-Propagator in Gl. (11.17) extrahieren. In der Coulomb-Eichung muss der Lorentzsymmetrie-verletzende Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})^2\,, \tag{D.11}$$

zur Lagrangedichte addiert werden. Somit wird für den axialen Vektor n^μ im Impulsraum der Vierervektor

$$(n^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}\,, \tag{D.12}$$

gewählt, wobei $\mathbf{k}$ der räumliche Impuls ist, welcher in der Dispersionsrelation (3.24) auftritt. Man erhält dann für die Propagatorfunktion im Impulsraum:

$$K_{ij}(k) = \Pi_{ij}(k_0, \mathbf{k})(\mathrm{i}D(k))\,, \tag{D.13}$$

mit

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\,, \tag{D.14}$$

und

$$D(k)^{-1} = \omega(\mathbf{k})^2 - \frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\mathbf{k}^2\,. \tag{D.15}$$

D.2. Berechnung der Kommutatoren der physikalischen Felder

D.2.1. Räumlich isotroper Fall

Wir beginnen mit dem Kommutator des **B**-Feldes:

$$\begin{aligned}[B_i(x), B_j(0)] &= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[\partial_a^x A_b(x), \partial_c^y A_d(y)|_{y=0}] = \\ &= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial_a^x\partial_c^y[A_b(x), A_d(y)]|_{y=0} = \\ &= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial_a^x\partial_c^y K_{bd}(x,0)\,.\end{aligned} \tag{D.16}$$

Wie bereits erwähnt, hängt der Kommutator $K_{bd}(x,y)$ nur von der Differenz $x-y$ ab. Somit trägt im Impulsraum ∂_a^x ein Faktor $\mathrm{i}k_a$ und ∂_c^y ein Faktor $-\mathrm{i}k_c$ bei, so dass mit Hilfe der Beziehung

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def} = \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf} - \delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce} - \delta_{ae}\delta_{bd}\delta_{cf} + \delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cd} + \delta_{af}\delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cd}\,, \tag{D.17}$$

der Kommutator im Impulsraum geschrieben werden kann als:

$$\begin{aligned}[B_i, B_j](k) =& \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}(\mathrm{i}k_a)(-\mathrm{i}k_c)K_{bd}(k) = \\ &= \big\{(\mathbf{k}^2\Pi_{dd} - k_a k_c \Pi_{ac})\delta_{ij} - k_i k_j \Pi_{dd} \\ &\qquad -\mathbf{k}^2\Pi_{ji} + k_i k_a \Pi_{ja} + k_j k_b \Pi_{bi}\big\}\,(\mathrm{i}D(k)) = \\ &= (\mathbf{k}^2\delta_{ij} - k_i k_j)(\mathrm{i}D(k))\,.\end{aligned} \tag{D.18}$$

Der Kommutator für eine **E**-Feld- und eine **B**-Feld-Komponente ist dann

$$\begin{aligned}[E_i(x), B_j(0)] &= [-\partial_0^t A_i(x) - \partial_i^x A_0(x), \varepsilon_{jab}\partial_a^y A_b(y)|_{y=0}] = \\ &= -\varepsilon_{jab}\partial_0^t\partial_a^y[A_i(x), A_b(y)]|_{y=0} - \varepsilon_{jab}\partial_i^x\partial_a^y[A_0(x), A_b(y)]|_{y=0}\,.\end{aligned} \tag{D.19}$$

Mit $A_0 = 0$ kann man dies im Impulsraum auf die folgende Form bringen:

$$[E_i, B_j](k) = -\varepsilon_{jab}(\mathrm{i}k_0)(\mathrm{i}k_a)K_{ib}(k) = k_0\varepsilon_{ija}k_a(\mathrm{i}D(k))\,. \tag{D.20}$$

Für den Kommutator für verschiedene **E**-Feld-Komponenten ergibt sich:

$$\begin{aligned}[E_i(x), E_j(0)] &= [-\partial_0^t A_i(x) - \partial_i^x A_0(x), -\partial_0^{t'} A_j(y)|_{y=0} - \partial_j^y A_0(y)|_{y=0}] = \\ &= \partial_0^t\partial_0^{t'}[A_i(x), A_j(y)]|_{y=0} + \partial_0^t\partial_j^y[A_i(x), A_0(y)]|_{y=0} \\ &\quad + \partial_0^{t'}\partial_i^x[A_0(x), A_j(y)]|_{y=0} + \partial_i^x\partial_j^y[A_0(x), A_0(y)]_{y=0}\,. \end{aligned} \tag{D.21}$$

Setzen wir erneut $A_0 = 0$, folgt daraus der Kommutator im Impulsraum zu

$$\begin{aligned}[E_i, E_j](k) &= -\mathrm{i}^2k_0^2[A_i, A_j](k) = k_0^2\Pi_{ij}(\mathrm{i}D(k)) = k_0^2\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)(\mathrm{i}D(k)) = \\ &= (k_0^2\delta_{ij} - \mathcal{A}^2k_ik_j)(\mathrm{i}D(k))\,, \end{aligned} \tag{D.22a}$$

mit

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,. \tag{D.22b}$$

D.2.2. Räumlich anisotroper Fall

Direktes Nachrechnen führt mit $K^{ij}(k) = [A^i, A^j](k) = \Pi^{ij}(\mathrm{i}D(k))$ auf

$$K^{0i}(k) = [A^0, A^i](k) = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\xi^j[A^j, A^i](k) = -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\xi^j\Pi^{ji}(\mathrm{i}D(k))\,, \tag{D.23}$$

wobei Π^{ij} die Polarisationsfunktion für Fall 2 ist. An dieser Stelle benötigen wir dann die Kontraktion

$$\xi^j\Pi^{ji} = \xi^i - (b + 2c)k_\parallel k^i - d\xi^i - e(k_\parallel\xi^i - k^i) = \frac{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\left(\frac{k_0^2}{k^2}\xi^i - \frac{k_\parallel k_0^2}{k^4}k^i\right)\,, \tag{D.24}$$

und somit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}K^{0i}(k) &= -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\xi^j\Pi^{ji}(\mathrm{i}D(k)) = \\ &= -\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel k_0}{k^2}\left(\xi^i - \frac{k_\parallel}{k^2}k^i\right)(\mathrm{i}D(k)) \equiv \mathcal{C}_1\left(\xi^i - \frac{k_\parallel}{k^2}k^i\right)(\mathrm{i}D(k))\,. \end{aligned} \tag{D.25}$$

Analog lässt sich $K^{00}(k) = [A^0, A^0](k)$, also die Fourier-Transformierte von $K^{00}(x) = [A^0(x), A^0(0)]$, bestimmen:

$$\begin{aligned}
K^{00} &= \left(-\frac{\frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\frac{k_\parallel}{k_0}\right)^2 \xi^i\xi^j[A^i, A^j](k) = \\
&= \frac{\frac{16}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}{\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)^2}\frac{k_\parallel^2}{k_0^2}\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}\right)\left\{\frac{k_0^2}{k^2}\xi^2 - \left(\frac{k_0 k_\parallel}{k^2}\right)^2\right\}(\mathrm{i}D(k)) = \\
&= \frac{\frac{16}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}\frac{k_\parallel^2}{k_0^2}\cdot k_0^2\left(\frac{k_\perp^2+k_\parallel^2-k_\parallel^2}{k^4}\right)(\mathrm{i}D(k)) = \\
&= \frac{\frac{16}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}\left(\frac{k_\perp k_\parallel}{k^2}\right)^2(\mathrm{i}D(k)) \equiv \mathcal{C}_2(\mathrm{i}D(k))\,. \qquad \text{(D.26)}
\end{aligned}$$

Man kann nachprüfen, dass sich unter Verwendung von

$$\Pi^{0i} = \Pi^{i0} = k^0[(b+c)k^i + e\xi^i]\,, \quad \Pi^{00} = 1 + bk_0^2\,, \qquad \text{(D.27)}$$

als Gegenprobe dasselbe ergibt. Die Rechnung ist also in sich konsistent. Kommen wir nun zur Berechnung der Kommutatoren der physikalischen Felder:

$$\begin{aligned}
[B_i, B_j](k) &= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}(\mathrm{i}k_a)(-\mathrm{i}k_c)K_{bd} = \\
&= \Big\{(dk_\parallel^2 - k^2(d\xi^2-1))\delta_{ij} + (d\xi^2-1)k_ik_j \\
&\qquad + dk^2\xi_i\xi_j + dk_\parallel(k_i\xi_j + k_j\xi_i)\Big\}(\mathrm{i}D(k))\,, \qquad \text{(D.28a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_i, B_j](k) &= -\varepsilon_{jab}[(\mathrm{i}k_0)(\mathrm{i}k_a)K_{ib} + (-\mathrm{i}k_0)(\mathrm{i}k_a)]K_{0b} = \\
&= \{k_0(\varepsilon_{ijl}k_l - \mathcal{C}_1\varepsilon_{jmn}k_m\xi_n) - (ek_i + d\xi_i)k_0\varepsilon_{jmn}k_m\xi_n\}(\mathrm{i}D(k))\,, \qquad \text{(D.28b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_i, E_j](k) &= (\mathrm{i}k_0)(-\mathrm{i}k_0)K_{ij} + (\mathrm{i}k_0)(\mathrm{i}k_j)K_{i0} + (-\mathrm{i}k_0)(-\mathrm{i}k_i)K_{0j} + (-\mathrm{i}k_i)(\mathrm{i}k_j)K_{00} = \\
&= \left\{k_0^2\delta_{ij} + \left(-(b+2c)k_0^2 + 2\mathcal{C}_1\frac{k_\parallel k_0}{k^2} + \mathcal{C}_2\right)k_ik_j\right. \\
&\qquad \left. - dk_0^2\xi_i\xi_j - k_0(\mathcal{C}_1 + ek_0)(k_i\xi_j + k_j\xi_i)\right\}(\mathrm{i}D(k)) = \\
&= \left\{k_0^2\delta_{ij} - k_ik_j - dk_0^2\xi_i\xi_j\right\}(\mathrm{i}D(k))\,. \qquad \text{(D.28c)}
\end{aligned}$$

Dies beendet die Berechnung der Kommutatoren der elektrischen und magnetischen Felder im Impulsraum. Sämtliche der Kommutatoren lassen sich auf die skalare Kommutatorfunktion $D(k)$ zurückführen. Um die Kommutatoren in den Ortsraum zu übertragen, verbleibt somit noch die Berechnung der Kommutatorfunktion im Ortsraum, also $D(x)$. Jenes soll in den folgenden Abschnitten sowohl für den räumlich isotropen als auch den räumlich anisotropen Fall mit einer ausgezeichneten Richtung erfolgen. Eine Interpretation der Ergebnisse findet sich in Teil III.

D.3. Berechnung der Kommutatorfunktion

D.3.1. Räumlich isotroper Fall

Zur Berechnung von $D(x)$ wird zunächst die Integration über die komplexe k_0-Ebene mittels des Residuensatzes durchgeführt. In den folgenden Berechnungen ist

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}k\,, \quad \text{mit } k = \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\,, \tag{D.29}$$

die Nullstelle des Nenners in Gl. (11.42). Dann gilt:

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k_0-\widetilde{\omega})(k_0+\widetilde{\omega})} \exp(\mathrm{i}k_0x_0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = \\ &= -\frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}}{2\widetilde{\omega}} \left[\exp(-\mathrm{i}\widetilde{\omega}x_0) - \exp(\mathrm{i}\widetilde{\omega}x_0)\right] \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k} \sin(\widetilde{\omega}x_0) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,. \end{aligned} \tag{D.30}$$

Der nächste Schritt ist es, das Integral über den dreidimensionalen Impulsraum auszuführen. Prinzipiell ist das Integral

$$I = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}} \sin\left(x_0\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\right) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,, \tag{D.31}$$

zu betrachten, wobei wir am geschicktesten Gl. (D.31) in Kugelkoordinaten transformieren. Wir können das Koordinatensystem dabei so wählen, dass der Vektor $\mathbf{x}$ entlang der z-Achse liegt. Damit erhalten wir:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}k\, k^2 \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta\, \frac{1}{k} \sin(\widetilde{x}_0k) \exp(\mathrm{i}xk\cos\vartheta)\,, \tag{D.32}$$

mit

$$\widetilde{x}_0 := x_0\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,. \tag{D.33}$$

Die Integration über ϑ verläuft problemlos und es ergibt sich:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}k\, \sin(\widetilde{x}_0k) \frac{1}{\mathrm{i}x} \left[-\exp(\mathrm{i}xk\cos\vartheta)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi^2x} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}k\, \sin(\widetilde{x}_0k)\sin(xk)\,. \tag{D.34}$$

Im nächsten Schritt sollen die Sinusfunktionen mittels komplexer Exponentialfunktionen ausgedrückt werden. Danach verwenden wir (A.1) und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi^2 x}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \sin(\widetilde{x}_0 k)\sin(xk) = \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 x}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \{\exp(\mathrm{i}k(\widetilde{x}_0+x)) + \exp(-\mathrm{i}k(\widetilde{x}_0+x)) \\ &\qquad\qquad - \exp(\mathrm{i}k(\widetilde{x}_0-x)) - \exp(-\mathrm{i}k(\widetilde{x}_0-x))\} = \\ &= \frac{1}{4\pi x}\left\{\delta(\widetilde{x}_0-x) - \delta(\widetilde{x}_0+x)\right\}. \end{aligned} \tag{D.35}$$

Analog ist es möglich, die Formeln aus Abschnitt D.5 zu verwenden.

D.3.2. Räumlich anisotroper Fall

Wir gehen aus von

$$D(x) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 x_0 + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}{(k_0-\widetilde{\omega})(k_0+\widetilde{\omega})}, \tag{D.36}$$

mit

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{k_\perp^2 + \mathcal{B}^2 k_\parallel^2}, \quad \mathcal{B} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}}}. \tag{D.37}$$

Die Integration über k_0 mittels des Residuensatzes führt zu

$$\begin{aligned} D(x) &= -\frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathrm{i}\left\{\frac{\exp(-\mathrm{i}x_0\widetilde{\omega})}{2\widetilde{\omega}} - \frac{\exp(\mathrm{i}x_0\widetilde{\omega})}{2\widetilde{\omega}}\right\} = \\ &= -\frac{1}{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\frac{\sin(x_0\widetilde{\omega})}{\widetilde{\omega}}. \end{aligned} \tag{D.38}$$

Da die passive Rotationsinvarianz weiterhin besteht, können wir das Koordinatensystem so rotieren, dass der räumliche Vektor $\mathbf{x}$ entlang der bevorzugten Richtung $\boldsymbol{\xi} = (0,0,1)$ zeigt. Mittels Zylinderkoordinaten $(k_\perp, \varphi, k_\parallel)$ kommen wir auf:

$$D(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)} \int_0^\infty \mathrm{d}k_\perp\, k_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_\parallel \exp(\mathrm{i}k_\parallel|\mathbf{x}|)\frac{\sin(x_0\widetilde{\omega})}{\widetilde{\omega}}. \tag{D.39}$$

Nun soll zuerst die Integration über $k_\perp$ ausgeführt werden. Die Substitution $\sqrt{k_\perp^2+\mathcal{B}^2k_\parallel^2}=u$ führt auf

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\perp\, k_\perp \frac{\sin\left(x_0\sqrt{k_\perp^2+\mathcal{B}^2k_\parallel^2}\right)}{\sqrt{k_\perp^2+\mathcal{B}^2k_\parallel^2}} = -\frac{1}{x_0}\cos\left\{x_0k_\perp\sqrt{1+\left(\mathcal{B}\frac{k_\parallel}{k_\perp}\right)^2}\right\}\Bigg|_{k_\perp=\infty} + \frac{1}{x_0}\cos(x_0\mathcal{B}|k_\parallel|)\,. \tag{D.40}$$

Wir vernachlässigen den ersten Term, weil dieser einer stark oszillierenden Funktion entspricht, die nach Integration über $k_\parallel$ verschwinden wird. Damit ergibt sich weiter:

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi^2\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)}\frac{1}{x_0}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\parallel\,\cos(\widetilde{x}_0k_\parallel)\cos(k_\parallel|\mathbf{x}|)\,,\quad \widetilde{x}_0:=x_0\mathcal{B}\,. \tag{D.41}$$

Für den letzten Schritt benötigen wir

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\parallel\,\cos(\widetilde{x}_0k_\parallel)\cos(|\mathbf{x}|k_\parallel) = \\ &= \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\parallel\,\big\{\exp(\mathrm{i}(\widetilde{x}_0+|\mathbf{x}|)k_\parallel)+\exp(\mathrm{i}(\widetilde{x}_0-|\mathbf{x}|)k_\parallel) \\ &\qquad\qquad + \exp(-\mathrm{i}(\widetilde{x}_0-|\mathbf{x}|)k_\parallel)+\exp(-\mathrm{i}(\widetilde{x}_0+|\mathbf{x}|)k_\parallel)\big\} = \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{\delta(\widetilde{x}_0+|\mathbf{x}|)+\delta(\widetilde{x}_0-|\mathbf{x}|)\right\}\,. \end{aligned} \tag{D.42}$$

Schlussendlich ergibt sich das Ergebnis:

$$\begin{aligned} D(x) &= -\frac{\mathcal{B}}{2\pi\left(1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{33}\right)}\,\mathrm{sign}(\widetilde{x}_0)\delta(\widetilde{x}_0^2-\mathbf{x}^2) = \\ &= \boxed{-\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}}\,\mathrm{sign}(x_0)\delta\left(x_0^2-\frac{\mathbf{x}^2}{\mathcal{B}^2}\right)\,.} \end{aligned} \tag{D.43}$$

Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$ kann die Integration auf die des isotropen Falles zurückgeführt werden. Wir substituieren $k_\parallel=k_\parallel'/\mathcal{B}$ und setzen erneut $k_\parallel'=k_\parallel$. Damit ergibt sich ein Integral der Gestalt

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mathcal{B}}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\perp\,k_\perp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_\parallel'\,\exp\left(\mathrm{i}k_\parallel'\frac{x_\parallel}{\mathcal{B}}+\mathrm{i}k_\perp x_\perp\right)\frac{\sin\left(x_0\sqrt{k_\perp^2+k_\parallel'^2}\right)}{\sqrt{k_\perp^2+k_\parallel'^2}} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\frac{\sin(x_0|\mathbf{k}|)}{|\mathbf{k}|}\,,\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_\perp\\0\\x_\parallel/\mathcal{B}\end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{D.44}$$

Da der Integrand nun in eine räumlich isotropen Form aufweist, können wir erneut Kugelkoordinaten benutzen. Das endgültige Ergebnis ergibt sich aus Gl. (11.43) und lautet (mit $\mathrm{sign}(x_0) = \mathrm{sign}(\widetilde{x}_0)$):

$$\boxed{D(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{33}^2}}\,\mathrm{sign}(x_0)\delta\left(x_0^2 - x_\perp^2 - \frac{x_\parallel^2}{\mathcal{B}^2}\right).} \tag{D.45}$$

D.4. Auswertung der Reflexions-Positivität

Hier sollen die Berechnungen zur Reflexions-Positivität aus Abschnitt 11.8 ausführlich durchgeführt werden. Im Folgenden ist S der Ausdruck, welcher in der Reflexions-Positivitätsbedingung aus Gl. (11.52) vorkommt.

D.4.1. Räumlich isotroper Fall

Es ist sinnvoll, $S(k_4, \mathbf{k})$ in der Form

$$S(k_4,\mathbf{k}) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\frac{1}{k_4^2+\widehat{\omega}^2}\,, \quad \widehat{\omega}^2 = \frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\mathbf{k}^2\,, \tag{D.46}$$

zu schreiben, welche geeignet ist, um die entsprechenden Integrale über den Impulsraum auszuwerten:

$$\begin{aligned} S(x_4,\mathbf{k}) &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_4\,\exp(\mathrm{i}k_4x_4)\frac{1}{k_4^2+\widehat{\omega}^2} = \\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}k_4\,\frac{\exp(\mathrm{i}k_4x_4)}{k_4^2+\widehat{\omega}^2} + \int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}k_4\frac{\exp(\mathrm{i}k_4x_4)}{k_4^2+\widehat{\omega}^2}\right\} = \\ &= \frac{2}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}k_4\,\frac{\cos(k_4x_4)}{k_4^2+\widehat{\omega}^2}\,. \end{aligned} \tag{D.47}$$

Mit dem Integral [115]

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{\cos(ax)}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2\beta}\exp(-|a|\beta)\,, \qquad \text{with } \mathrm{Re}(\beta) > 0\,, \tag{D.48}$$

ergibt sich:

$$S(x_4,\mathbf{k}) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}\frac{\pi}{\widehat{\omega}}\exp(-|x_4|\widehat{\omega}) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}}\frac{1}{k}\exp(-|x_4|\widehat{\omega})\,. \tag{D.49}$$

Für $\widetilde{\kappa}_{00} \in \mathscr{M}$ ist $S(x_4, \mathbf{k})$ wohldefiniert und größer als null. Somit wird auch das Integral über den räumlichen Impuls größer sein als null. Nichtsdestotrotz soll dies unter Verwendung von

$$\mathcal{A}^{-1} \equiv \frac{\widehat{\omega}}{k} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,, \tag{D.50}$$

nachgeprüft werden:

$$\begin{aligned} S(x_4,\mathbf{x}) &= \int \mathrm{d}^3k\, \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) S(x_4,\mathbf{k}) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \int \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{k} \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathcal{A}^{-1}|x_4|k\right) = \\ &= \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, k \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \exp(\mathrm{i}kx\cos\vartheta - |x_4|\mathcal{A}^{-1}k) = \\ &= \frac{4\pi^2}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, \exp(-|x_4|\mathcal{A}^{-1}k)\sin(kx) = \frac{4\pi^2}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2}} \frac{1}{x^2+\mathcal{A}^{-2}x_4^2}\,. \end{aligned} \tag{D.51}$$

Sofern $\mathrm{Re}(\omega) \leq 0$ ist, kann Gl. (D.48) nicht angewendet werden, da der Integrand auf der x-Achse einen Pol besitzt. Dann existiert das Integral nicht, jedoch durchaus der Cauchysche Hauptwert $\mathcal{P}$. In diesem Falle setzen wir $\beta := \mathrm{i}\widetilde{\beta}$ mit $\widetilde{\beta} \in \mathbb{R}_+$ in (D.48). Dann gilt

$$\mathcal{P}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\cos(ax)}{x^2-\widetilde{\beta}^2} = \lim_{\epsilon\mapsto 0^+} \left\{ \int\limits_0^{\widetilde{\beta}-\epsilon} \mathrm{d}x\, \frac{\cos(ax)}{x^2-\widetilde{\beta}^2} + \int\limits_{\widetilde{\beta}+\epsilon}^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\cos(ax)}{x^2-\widetilde{\beta}^2} \right\} = -\frac{\pi}{2\widetilde{\beta}}\sin(|a|\widetilde{\beta})\,, \tag{D.52}$$

und unter Verwendung von

$$\widehat{\omega} \equiv \mathrm{i}\widetilde{\omega}\,, \quad \widetilde{\mathcal{A}} \equiv \frac{\widetilde{\omega}}{k} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}+1}{\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}-1}}\,, \tag{D.53}$$

können wir das Integral berechnen:

$$S(x_4,\mathbf{k}) = \frac{2}{1-\frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}} \mathcal{P}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_4\, \frac{\cos(k_4x_4)}{k_4^2-\widetilde{\omega}^2} = -\frac{\pi}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2-1}} \frac{1}{k}\sin(|x_4|\widetilde{\omega})\,. \tag{D.54}$$

Die Integration über den räumlichen Impuls führt auf:

$$\begin{aligned} S(x_4,\mathbf{x}) &= \int \mathrm{d}^3k\, \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) S(x_4,\mathbf{k}) = -\frac{\pi}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2-1}} \int \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{k} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \sin(|x_4|\widetilde{\mathcal{A}}k) = \\ &= -\frac{2\pi^2}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2-1}} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, k \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta\, \exp(\mathrm{i}kx\cos\vartheta) \sin(|x_4|\widetilde{\mathcal{A}}k) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\pi^2}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 - 1}} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \sin(kx) \sin(|x_4|\widetilde{\mathcal{A}}k) =$$

$$= \frac{2\pi^3}{\sqrt{\frac{4}{9}\widetilde{\kappa}_{00}^2 - 1}} \frac{1}{x} \left\{ \delta(x + |x_4|\widetilde{\mathcal{A}}) - \delta(x - |x_4|\widetilde{\mathcal{A}}) \right\} . \tag{D.55}$$

Damit haben wir alle benötigten Ausdrücke zur Reflexions-Positivität beisammen, um deren Interpretation in Abschnitt 11.8 aus Teil III folgen zu lassen.

D.5. Uneigentliche Integrale über Produkte von trigonometrischen Funktionen

Bei Berechnungen im Zusammenhang der Mikrokausalität erweisen sich die folgenden Ergebnisse von uneigentlichen Integralen trigonometrischer Funktionen als hilfreich. Uneigentliche Integrale über Produkte von trigonometrischen Funktionen lassen sich mittels der Definition der δ-Funktion über die komplexe Exponentialfunktion (siehe beispielsweise Gl. (A.1)) auswerten:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \, \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega' t + \beta) =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \, [\exp(\mathrm{i}(\omega t + \alpha)) + \exp(-\mathrm{i}(\omega t + \alpha))][\exp(\mathrm{i}(\omega' t + \beta)) + \exp(-\mathrm{i}(\omega' t + \beta))] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \, \big\{ \delta(\omega + \omega') \exp(\mathrm{i}(\alpha + \beta)) + \delta(\omega - \omega') \exp(\mathrm{i}(\alpha - \beta))$$

$$+ \delta(\omega - \omega') \exp(-\mathrm{i}(\alpha - \beta)) + \delta(\omega + \omega') \exp(-\mathrm{i}(\alpha + \beta)) \big\} =$$

$$= \pi\delta(\omega + \omega') \cos(\alpha + \beta) + \pi\delta(\omega - \omega') \cos(\alpha - \beta) , \tag{D.56}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \sin(\omega t+\alpha)\cos(\omega' t+\beta) = \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, [\exp(\mathrm{i}(\omega t+\alpha)) - \exp(-\mathrm{i}(\omega t+\alpha))][\exp(\mathrm{i}(\omega' t+\beta)) + \exp(-\mathrm{i}(\omega' t+\beta))] = \\
&= \frac{\pi}{2\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \big\{\delta(\omega+\omega')\exp(\mathrm{i}(\alpha+\beta)) + \delta(\omega-\omega')\exp(\mathrm{i}(\alpha-\beta)) \\
&\qquad\qquad - \delta(\omega-\omega')\exp(-\mathrm{i}(\alpha-\beta)) - \delta(\omega+\omega')\exp(-\mathrm{i}(\alpha+\beta))\big\} = \\
&= \pi\delta(\omega+\omega')\sin(\alpha+\beta) + \pi\delta(\omega-\omega')\sin(\alpha-\beta)\,, \qquad \text{(D.57)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \sin(\omega t+\alpha)\sin(\omega' t+\beta) = \\
&= -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \big\{\delta(\omega+\omega')\,[\exp(\mathrm{i}(\alpha+\beta)) + \exp(-\mathrm{i}(\alpha+\beta))] \\
&\qquad\qquad - \delta(\omega-\omega')\,[\exp(\mathrm{i}(\alpha-\beta)) + \exp(-\mathrm{i}(\alpha-\beta))]\big\} = \\
&= -\pi\delta(\omega+\omega')\cos(\alpha+\beta) + \pi\delta(\omega-\omega')\cos(\alpha-\beta)\,. \qquad \text{(D.58)}
\end{aligned}
$$

Anhang E.

Technische Einzelheiten zur Berechnung der Quantenkorrekturen auf Ein-Schleifen-Niveau

In diesem Kapitel wird die Zurückführung der fermionischen Selbstenergie im Rahmen der modifizierten QED auf skalare Integrale ausführlich präsentiert. Das Ergebnis benötigen wir in Teil IV der Dissertation, wo es um die Berechnung von Ein-Schleifen-Quantenkorrekturen zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung und zum Photonzerfall geht. Für die Vertexkorrektur war es möglich, eine ähnliche Zerlegung mittels `Form` durchzuführen. Diese ist jedoch ungleich umfangreicher, weshalb wir sie hier nicht betrachten wollen.

E.1. Die Passarino-Veltman-Zerlegung der auftretenden Tensorintegrale

Im Folgenden werden wir oft auf die abkürzende Schreibweise

$$\langle \bullet \rangle_k := \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{\mathrm{i}\pi^2} \int \mathrm{d}^d k \, \bullet \,, \tag{E.1}$$

mit der Raumzeit-Dimension d benutzen, dem Schleifenimpuls k und der Renormierungsskala μ zurückgreifen.

E.1.1. Fermionische Selbstenergie

Wir möchten die Passarino-Veltman-Zerlegung des tensorwertigen Integrals

$$\mathcal{I}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + M) \gamma_\nu}{(p-k)^2 - M^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \,, \tag{E.2}$$

welches etwa im fermionischen Selbstenergiebeitrag in Abschnitt 16.3 auftritt, durchführen. Dazu benötigen wir zunächst die tensorwertige Zwei-Punkt-Funktion ersten Ranges:

$$B^\nu = \left\langle \frac{k^\nu}{k^2[(p-k)^2 - M^2]} \right\rangle_k = p^\nu B_1(p, 0, M) \,. \tag{E.3}$$

Die Kontraktion mit p_ν führt auf

$$\begin{aligned} p_\nu B^\nu = p^2 B_1(p,0,M) &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{-2p\cdot k}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = \\ &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{[(p-k)^2-M^2]-k^2-p^2+M^2}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left\langle \frac{1}{k^2}\right\rangle_k - \left\langle \frac{1}{(p-k)^2-M^2}\right\rangle_k - (p^2-M^2)\left\langle \frac{1}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{A_0(M^2)+(p^2-M^2)B_0(p,0,M)\right\}\,, \end{aligned} \tag{E.4}$$

mit dem Ergebnis

$$\boxed{B_1(p,0,M) = \frac{1}{2p^2}\left\{A_0(M^2)+(p^2-M^2)B_0(p,0,M)\right\}\,.} \tag{E.5}$$

Als nächstes benötigen wir die tensorwertige Drei-Punkt-Funktion ersten Ranges:

$$C^\nu = \left\langle \frac{k^\nu}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = p^\nu C_1(p,0,M,0,0)\,. \tag{E.6}$$

Die Kontraktion mit p_ν führt auf

$$\begin{aligned} p_\nu C^\nu = p^2 C_1(p,0,M,0,0) &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{-2p\cdot k}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = \\ &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{[(p-k)^2-M^2]-k^2-p^2+M^2}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left\langle \frac{1}{k^4}\right\rangle_k - \left\langle \frac{1}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k - (p^2-M^2)\left\langle \frac{1}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{B_0(p,0,M)+(p^2-M^2)C_0(p,0,M,0,0)\right\}\,, \end{aligned} \tag{E.7}$$

also somit

$$\boxed{C_1(p,0,M,0,0) = \frac{1}{2p^2}\left\{B_0(p,0,M)+(p^2-M^2)C_0(p,0,M,0,0)\right\}\,.} \tag{E.8}$$

Der nächste Schritt ist die Berechnung der tensorwertigen Drei-Punkt-Funktion zweiten Ranges:

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}C_{00}(p,0,M,0,0) + p^\mu p^\nu C_{11}(p,0,M,0,0) = \left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k\,. \tag{E.9}$$

Die Kontraktion mit $g_{\mu\nu}$ bzw. p_μ führt auf

$$g_{\mu\nu}C^{\mu\nu} = dC_{00} + p^2 C_{11} = \left\langle \frac{1}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = B_0(p,0,M)\,, \tag{E.10}$$

$$
\begin{aligned}
p_\mu C^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{-2p\cdot k}{k^4[(p-k)^2-M^2]}k^\nu \right\rangle_k = \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{([(p-k)^2-M^2]-k^2-p^2+M^2)k^\nu}{k^4[(p-k)^2-M^2]} \right\rangle_k = \\
&= -\frac{1}{2}\left\{ \left\langle \frac{k^\nu}{k^4}\right\rangle_k - \left\langle \frac{k^\nu}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k - (p^2-M^2)\left\langle \frac{k^\nu}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left\{ B^\nu(p,0,M) + (p^2-M^2)C^\nu(p,0,M,0,0)\right\} , \qquad \text{(E.11)}
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
p_\mu p_\nu C^{\mu\nu} &= p^2 C_{00} + p^4 C_{11} = \\
&= \frac{1}{4}\left\{ A_0(M^2) + 2(p^2-M^2)B_0(p,0,M) + (p^2-M^2)^2 C_0(p,0,M,0,0)\right\} . \qquad \text{(E.12)}
\end{aligned}
$$

Aus der Lösung dieses Gleichungssystems resultiert dann

$$
\boxed{C_{00} = \frac{-A_0(M^2) + 2(p^2+M^2)B_0(p,0,M) - (p^2-M^2)^2 C_0(p,0,M,0,0)}{4(d-1)p^2}} , \qquad \text{(E.13a)}
$$

$$
\boxed{C_{11} = \frac{dA_0(M^2) - 2[dM^2+(2-d)p^2]B_0(p,0,M) + (p^2-M^2)^2 C_0(p,0,M,0,0)}{4(d-1)p^4}} . \qquad \text{(E.13b)}
$$

Im letzten Schritt benötigen wir die tensorwertige Drei-Punkt-Funktion dritten Ranges:

$$
C^{\mu\nu\varrho} = (p_1^\mu g^{\nu\varrho} + p_1^\nu g^{\mu\varrho} + p_1^\varrho g^{\mu\nu})C_{001} + p_1^\mu p_1^\nu p_1^\varrho C_{111} = \left\langle \frac{k^\mu k^\nu k^\varrho}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k . \qquad \text{(E.14)}
$$

Wir kontrahieren die rechte Seite mit $p_\mu g_{\nu\varrho}$:

$$
\begin{aligned}
p_\mu g_{\nu\varrho} C^{\mu\nu\varrho} &= p^2[(2+d)C_{001} + p^2 C_{111}] = \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{-2k\cdot p}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = -\frac{1}{2}\left\langle \frac{[(p-k)^2-M^2]-k^2-p^2+M^2}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k = \\
&= -\frac{1}{2}\left\{ \left\langle \frac{1}{k^2}\right\rangle_k - \left\langle \frac{1}{(p-k)^2-M^2}\right\rangle_k - (p^2-M^2)\left\langle \frac{1}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left\{ A_0(M) + (p^2-M^2)B_0(p,0,M)\right\} . \qquad \text{(E.15)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\varrho C^{\mu\nu\varrho} &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{-2k\cdot p}{k^4[(p-k)^2-M^2]}k^\mu k^\nu \right\rangle_k = \\
&= -\frac{1}{2}\left\{ \left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{k^4}\right\rangle_k - \left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{k^2[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k \right. \\
&\qquad \left. -(p^2-M^2)\left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{k^4[(p-k)^2-M^2]}\right\rangle_k \right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\left\{B^{\mu\nu}(p,0,M) + (p^2-M^2)C^{\mu\nu}(p,0,M,0,0)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{g^{\mu\nu}B_{00}(p,0,M) + p^\mu p^\nu B_{11}(p,0,M)\right.$$
$$\left. + (p^2-M^2)\left[g^{\mu\nu}C_{00}(p,0,M,0,0) + p^\mu p^\nu C_{11}(p,0,M,0,0)\right]\right\} . \tag{E.16}$$

Dies führt auf

$$p_\mu p_\nu p_\varrho C^{\mu\nu\varrho} = p^4(3C_{001} + p^2 C_{111}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{p^2[B_{00}(p,0,M) + p^2 B_{11}(p,0,M)]\right.$$
$$\left. + p^2(p^2-M^2)[C_{00}(p,0,M,0,0) + p^2 C_{11}(p,0,M,0,0)]\right\} . \tag{E.17}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf:

$$\boxed{C_{001} = \frac{1}{8(d-1)p^4}\left\{2A_0(M) + (p^2+3M^2)(p^2-M^2)B_0(p,0,M)\right.}$$
$$\boxed{\left. - (p^2-M^2)^3 C_0(p,0,M,0,0)\right\} ,} \tag{E.18a}$$

$$\boxed{C_{111} = \frac{1}{8(d-1)p^6}\left\{2[(d+2)M^2 - 2(d-1)p^2]A_0(M)\right.}$$
$$\boxed{+ 3[(d+2)M^2 - (d-2)p^2](p^2-M^2)B_0(p,0,M)}$$
$$\boxed{\left. - (d+2)(p^2-M^2)^3 C_0(p,0,M,0,0)\right\} .} \tag{E.18b}$$

Anhang F.

Nebenrechnungen zur Compton-Streuung am schwarzen Loch

Im letzten Kapitel des Anhangs präsentieren wir Berechnungen zur Compton-Streuung am modifizierten schwarzen Loch ausführlich. Beim ersten Lesen von Teil V der Dissertation ist dieses Kapitel nicht notwendig. Es kann jedoch das Verständnis erleichtern, sofern man sich tiefgründiger mit der Materie auseinandersetzen möchte.

F.1. Lösung der Killing-Gleichung in der Schwarzschild-Raumzeit

Die Killing-Gleichung (22.1) kann in Matrixform geschrieben werden, wobei dann auf der linken Seite eine (4×4)-Matrix steht, welche von den Killing-Vektor-Komponenten $(\xi_\mu) = (\xi_0(t,r,\vartheta,\varphi), \xi_1(t,r,\vartheta,\varphi), \xi_2(t,r,\vartheta,\varphi), \xi_3(t,r,\vartheta,\varphi)) \equiv (\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ und den Schwarzschild-Koordinaten $\{t,r,\vartheta,\varphi\}$ abhängt. Weil die Matrix symmetrisch ist, handelt es sich bei der Killing-Gleichung um ein System aus zehn unabhängigen gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Die vier Differentialgleichungen der Diagonalelemente lauten

$$2\frac{\partial \xi_0}{\partial t} - f(r)f'(r)\xi_1 = 0\,, \quad \frac{f'(r)}{f(r)}\xi_1 + 2\frac{\partial \xi_1}{\partial r} = 0\,, \tag{F.1a}$$

$$rf(r)\xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial \vartheta} = 0\,, \quad rf(r)\sin^2\vartheta\xi_1 + \sin\vartheta\cos\vartheta\xi_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} = 0\,, \tag{F.1b}$$

und die verbleibenden sechs Differentialgleichungen der Nicht-Diagonalelemente können auf die folgende Form gebracht werden:[1]

$$\frac{f'(r)}{f(r)}\xi_0 - \frac{\partial \xi_0}{\partial r} - \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} = 0\,, \tag{F.2a}$$

$$\frac{2}{r}\xi_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \xi_2}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{2}{r}\xi_3 - \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_3}{\partial r} = 0\,, \quad 2\cot\vartheta\xi_3 - \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_3}{\partial \vartheta} = 0\,. \tag{F.2b}$$

[1] Alle Gleichungen seien von links nach rechts und von oben nach unten durchnummeriert.

Nach endlicher Zeit erkennt man, dass die nullte Komponente nur eine Funktion von r sein kann, also $\xi_0 = \xi_0(r)$ und dass die erste Komponente verschwinden muss: $\xi_1 = 0$. Aus der fünften Gleichung folgt dann

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{\xi_0'(r)}{\xi_0(r)} \Rightarrow \ln|C_1^{-1}\xi_0(r)| = \ln|f(r)|\,. \tag{F.3}$$

Wir nehmen an, dass die Konstante C_1^{-1} so gewählt ist, dass $C_1^{-1}\xi_0(r) > 0$. $f(r)$ ist automatisch größer als null. Somit folgt $\xi_0(r) = C_1/f(r)$ und wegen $f(r) > 0$ gilt ebenso $\xi_0(r) > 0$.

Aus der dritten und fünften Gleichung resultiert, dass ξ_2 nur eine Funktion von r und φ sein kann. Diese kann aus der achten Gleichung berechnet werden:

$$\frac{2}{r}\xi_2(r,\varphi)\frac{\partial\xi_2(r,\varphi)}{\partial r} \Rightarrow \frac{2}{r} = \frac{1}{\xi_2(r,\varphi)}\frac{\partial\xi_2(r,\varphi)}{\partial r}\,, \tag{F.4}$$

$$\Rightarrow \ln|\xi_2(r,\varphi)| = 2\ln(r) + \ln(C'(\varphi)) = \ln(C'(\varphi)r^2)\,, \tag{F.5}$$

aus der sich $\xi_2(r,\varphi) = C(\varphi)r^2$ ergibt mit einer zu bestimmenden Funktion $C'(\varphi)$. (Der Strich steht für die Ableitung bezüglich φ.) Aus der siebten Gleichung folgt, dass ξ_3 keine Funktion von t ist; jedoch kann sie prinzipiell eine Funktion von $\{r,\vartheta,\varphi\}$ sein: $\xi_3 = \xi_3(r,\vartheta,\varphi)$. Wie zuvor für ξ_2 erhält man analog für ξ_3 aus der neunten Gleichung:

$$\xi_3(r,\vartheta,\varphi) = \xi_3(\vartheta,\varphi)r^2\,. \tag{F.6}$$

Schlussendlich kann die vierte und zehnte Gleichung benutzt werden. Man erhält

$$\sin\vartheta\cos\vartheta C'(\varphi) + \frac{\partial\xi_3(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \xi_3(\vartheta,\varphi) = D(\vartheta) - \sin\vartheta\cos\vartheta C(\varphi)\,, \tag{F.7}$$

mit einer unbekannten Funktion $D(\vartheta)$. Weiterhin ergibt sich

$$2\cot\vartheta\, D(\vartheta) - 2\cos^2\vartheta\, C(\varphi) - C''(\varphi) - D'(\vartheta) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)C(\varphi) = 0\,, \tag{F.8}$$

und daraus folgen die beiden Gleichungen

$$2\cot\vartheta\, D(\vartheta) = D'(\vartheta)\,, \quad C(\varphi) = -C''(\varphi)\,. \tag{F.9}$$

Eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen $C(\varphi) = C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi$ (mit Konstanten C_2 und C_3) genügt der zweiten Gleichung. Die erste kann wie folgt gelöst werden:

$$2\cot(\vartheta) = \frac{D'(\vartheta)}{D(\vartheta)} \Rightarrow \ln(\sin^2\vartheta) = \ln(C_4^{-1}D(\vartheta)) \Rightarrow D(\vartheta) = C_4\sin^2\vartheta\,, \tag{F.10}$$

wobei C_4 eine weitere Konstante ist.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

$$\xi_0 = C_1 f(r)\,, \quad \xi_1 = 0\,, \quad \xi_2 = (-C_2 \sin\varphi + C_3 \cos\varphi) r^2\,, \tag{F.11a}$$

$$\xi_3 = (-\sin\vartheta \cos\vartheta (C_2 \cos\varphi + C_3 \sin\varphi) + C_4 \sin^2\vartheta) r^2\,. \tag{F.11b}$$

Schließlich ergibt sich daraus ein vollständiges System auf Killing-Vektoren für die Schwarzschild-Raumzeit:

$$\boxed{(\xi^{(1)}_\mu) = \begin{pmatrix} f(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad (\xi^{(2)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \sin\varphi \\ r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi \end{pmatrix}\,,} \tag{F.12a}$$

$$\boxed{(\xi^{(3)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \cos\varphi \\ -r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi \end{pmatrix}\,, \quad (\xi^{(4)}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}\,.} \tag{F.12b}$$

F.2. Berechnung von Killing-Energie und Killing-Drehimpuls

Die folgenden Berechnungen werden geschickterweise in Lemaître-Koordinaten

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \left(\frac{3(R-\tau)}{4M}\right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}R^2 - \left(\frac{3}{2}(R-\tau)\right)^{\frac{4}{3}} (2M)^{\frac{2}{3}}\, \mathrm{d}\Omega^2\,, \tag{F.13}$$

durchgeführt. Mit der inversen Lemaître-Metrik

$$(g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\left(1, -\left(\frac{3(R-\tau)}{4M}\right)^{\frac{2}{3}}, -(2M)^{-2}\left(\frac{3(R-\tau)}{4M}\right)^{-\frac{4}{3}}, \right.$$
$$\left. -(2M)^{-2}\left(\frac{3(R-\tau)}{4M}\right)^{-\frac{4}{3}} \sin^{-2}\vartheta\right)\,, \tag{F.14}$$

erhält man:

$$(k^\mu)_{\text{Lemaître}} = \begin{pmatrix} k_0 \\ -\sqrt{1+\varepsilon\varrho}\, k_1 \\ -k_2/(2M(1+\varepsilon\varrho)) \\ -k_3/(2M(1+\varepsilon\varrho)\sin^2\vartheta) \end{pmatrix}\,. \tag{F.15}$$

Da wir jedoch anfangs die Killing-Vektoren in Schwarzschild-Koordinaten bestimmt habe, transformieren wir den Impulsvektor wieder zu Schwarzschild-Koordinaten zurück. Über das

Transformationsverhalten eines kontravarianten Vierer-Vektors

$$x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu}\widetilde{x}^\nu\,, \quad \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1/(1-2M/r) & 1/(1-r/(2M)) & 0 & 0 \\ -\sqrt{2M/r} & \sqrt{2M/r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{F.16}$$

ergibt sich:

$$(k^\mu)_{\text{Schwarzschild}} = \begin{pmatrix} (k_0(1+\varepsilon\varrho) + k_1\sqrt{1+\varepsilon\varrho})/(\varepsilon\varrho) \\ -k_0/\sqrt{1+\varepsilon\varrho} - k_1 \\ -k_2/(2M(1+\varepsilon\varrho)) \\ -k_3/(2M(1+\varepsilon\varrho)) \end{pmatrix}. \tag{F.17}$$

Zur Berechnung der Killing-Energie benötigen wir den ersten Killing-Vektor, welcher am Streupunkt gegeben ist durch:

$$\xi^{(1)}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - 1/(1+\varepsilon\varrho) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{F.18}$$

Schließlich führt die Kontraktion mit dem Viererimpuls in Schwarzschild-Koordinaten auf:

$$E_{\text{Killing}} = \xi^{(1)}_\mu k^\mu = \boxed{k_0 + \frac{k_1}{\sqrt{1+\varepsilon\varrho}}\,.} \tag{F.19}$$

Einer der drei verbleibenden Killing-Vektoren verschwindet am Streupunkt: $(\xi^{(2)}_\mu) = (0,0,0,0)^\intercal$. Die restlichen beiden lauten

$$(\xi^{(3)}_\mu) = 4M^2(1+\varepsilon\varrho)^2(0,0,1,0)^\intercal\,, \quad (\xi^{(4)}_\mu) = 4M^2(1+\varepsilon\varrho)^2(0,0,0,1)^\intercal\,, \tag{F.20}$$

und können zur Berechnung des Killing-Drehimpulses verwendet werden:

$$\begin{aligned} L_{\text{Killing}} &= \sqrt{(\xi^{(2)}_\mu k^\mu)(\xi^{(2)}_\nu k^\nu) + (\xi^{(3)}_\mu k^\mu)(\xi^{(3)}_\nu k^\nu) + (\xi^{(4)}_\mu k^\mu)(\xi^{(4)}_\nu k^\nu)} = \\ &= \boxed{2M(1+\varepsilon\varrho)\sqrt{k_2^2 + k_3^2}\,.} \end{aligned} \tag{F.21}$$

F.3. Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung in der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik

Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung in Standard-QED wird im Schwerpunktsystem von Elektron und Photon berechnet. Die Viererimpulse werden gewählt als

$$(k_1^\mu) = \frac{s-m^2}{2\sqrt{s}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad (p_1^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{s}}\begin{pmatrix}m^2+s\\0\\0\\m^2-s\end{pmatrix}, \quad (k_2^\mu) = \frac{s-m^2}{2\sqrt{s}}\begin{pmatrix}1\\\sin\vartheta\cos\varphi\\\sin\vartheta\sin\varphi\\\cos\vartheta\end{pmatrix}, \tag{F.22a}$$

$$(p_2^\mu) = (k_1^\mu) + (p_1^\mu) - (k_2^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{s}}\begin{pmatrix}m^2+s\\(m^2-s)\sin\vartheta\cos\varphi\\(m^2-s)\sin\vartheta\sin\varphi\\(m^2-s)\cos\vartheta\end{pmatrix}. \tag{F.22b}$$

Setzt man diese Vierer-Vektoren in das spin-summierte und -gemittelte Quadrat des Matrixelements[2]

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1,s_2\\r_1,r_2}}|\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left\{\frac{k_2\cdot p}{k_1\cdot p}+\frac{k_1\cdot p}{k_2\cdot p}+2m^2\left(\frac{1}{k_1\cdot p}-\frac{1}{k_2\cdot p}\right)\right.$$
$$\left.+m^4\left(\frac{1}{k_1\cdot p}-\frac{1}{k_2\cdot p}\right)^2\right\}, \tag{F.23}$$

ein, so resultiert:

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1,s_2\\r_1,r_2}}|\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left\{s^2(\cos^3\vartheta+3\cos^2\vartheta+7\cos\vartheta+5)-4m^2s(3\cos\vartheta+1)\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right.$$
$$\left.+24m^4\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)+8\frac{m^6}{s}\sin^6\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right\}. \tag{F.24}$$

Führen wir erneut c ein, ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt zu

$$\sigma = \frac{e^4}{32\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{s^2[(mc^2)^2-s]^3}\left\{2[(mc^2)^2-s](s^3+15(mc^2)^2s^2-(mc^2)^4s+(mc^2)^6)\right.$$
$$\left.-4s^2(s^2-6(mc^2)^2s-3(mc^2)^4)\ln\left(\frac{s}{(mc^2)^2}\right)\right\}. \tag{F.25}$$

[2] mit den Spins s_1, s_2 der Fermionen und der Polarisationen r_1, r_2 der modifizierten Photonen

F.4. Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung in der modifizierten Quantenelektrodynamik

Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts der modifizierten Compton-Streuung aus Abschnitt 21.2 können die Vierervektoren gewählt werden als

$$(k_1^\mu) = \begin{pmatrix} \omega(k) \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad (p_1^\mu) = \begin{pmatrix} E(q) \\ 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (k_2^\mu) = \begin{pmatrix} \omega(k') \\ k' \sin\vartheta \\ 0 \\ k' \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{F.26}$$

mit den Energien

$$\omega(k) = \mathcal{A}\, k\,, \quad \mathcal{A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}{1 + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}}}\,, \quad E(q) = \sqrt{q^2 + M^2}\,. \tag{F.27}$$

Die Energie und der Impuls des auslaufenden Elektrons ergeben sich aus der Erhaltung des räumlichen Impulses

$$(p_2^\mu) = \begin{pmatrix} E'(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -k' \sin\vartheta \\ 0 \\ k + q - k' \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{F.28a}$$

$$E'(\mathbf{p}) = \sqrt{(k+q)^2 + k'^2 - 2(k+q)k' \cos\vartheta + m^2}\,, \tag{F.28b}$$

oder auch alternativ aus der Energieerhaltung zu

$$E'(\mathbf{p}) = \omega(k) - E(q) - \omega(k')\,. \tag{F.28c}$$

Zur Berechnung ist die Einführung von modifizierten Mandelstam-Variablen hilfreich:

$$s = (p_1 + k_1)^2 = m^2 + 2p_1 \cdot k_1 + k_1^2 = m^2 + 2p_2 \cdot k_2 + k_2^2\,, \tag{F.29a}$$

$$t = (p_2 - p_1)^2 = 2m^2 - 2p_1 \cdot p_2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 \cdot k_2\,, \tag{F.29b}$$

$$u = (k_2 - p_1)^2 = m^2 - 2p_1 \cdot k_2 + k_2^2 = m^2 - 2p_2 \cdot k_1 + k_1^2\,, \tag{F.29c}$$

sowie die Relation

$$s + t + u = 2m^2 + k_1^2 + k_2^2\,. \tag{F.30}$$

Das Phasenraummaß kann wie folgt ausgewertet werden:

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(k')} \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'(p)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k'\, \frac{k'^2}{\omega(k')E'(p)}\delta(\omega(k') + E'(p) - \omega(k) - E(q)) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \frac{k'^2}{\omega(k')E'(p)} \left|\frac{E'(p)}{\mathcal{A}E'(p) + k' - (k+q)\cos\vartheta}\right| =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mathcal{A}}\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \frac{k'}{\mathcal{A}^2(k-k') + \mathcal{A}E(q) + k' - (k+q)\cos\vartheta}\,. \tag{F.31}$$

Das Argument der Betragsfunktion in der obigen Gleichung ist positiv, sofern $\widetilde{\kappa}_{00}$ genügend klein ist. Das ist die Voraussetzung, denn wir wollen hier analytisch nur die Korrektur für einen kleinen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter $\widetilde{\kappa}_{00}$ berechnen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich für kleinen Photonimpuls $k \ll m$, kleinen Elektronimpuls $q \ll k \ll m$ und kleinen Lorentzsymmetrie-verletzenden Parameter berechnen zu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi\alpha^2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\vartheta} = \frac{1}{m^2}\Bigg\{&1 + \cos^2\vartheta + \frac{2}{3}\widetilde{\kappa}_{00}(3 - 2\cos\vartheta + 5\cos\vartheta^2) \\ &+ \frac{q}{m}\left(-2 + 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta + 4\widetilde{\kappa}_{00}\left(-1 + \frac{4}{3}\cos\vartheta + \cos\vartheta^3)\right)\right) \\ &+ \frac{q}{k}\left(2\cos\vartheta(1 - \cos\vartheta) + \frac{4}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\left(-1 + 5\cos\vartheta - 4\cos^2\vartheta\right)\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{F.32}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch Integration über ϑ:

$$\boxed{\frac{\sigma}{\pi\alpha^2} = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{8}{3} + \frac{56}{9}\widetilde{\kappa}_{00} - 4\frac{q}{m}(1 + 2\widetilde{\kappa}_{00}) - \frac{4}{3}\frac{q}{k}\left(1 + \frac{14}{3}\widetilde{\kappa}_{00}\right)\right\}\,.} \tag{F.33}$$

F.5. Bemerkungen zur numerischen Analyse

An dieser Stelle sollen noch einige kleinere Bemerkungen zur Monte-Carlo-Analyse der modifizierten Compton-Streuung am schwarzen Loch folgen. Zum einen verwenden wir die folgenden Koordinaten:

$$\mathbf{x} = r\begin{pmatrix}\delta_1 \\ \delta_2 \\ \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}\end{pmatrix}\,, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} r \\ \delta_1 \\ \delta_2\end{pmatrix}\,, \tag{F.34a}$$

$$r \in [0, \infty)\,, \quad \delta_1 \in [-1, 1]\,, \quad \delta_2 = \left(-\sqrt{1 - \delta_1^2}, \sqrt{1 - \delta_1^2}\right)\,. \tag{F.34b}$$

Für diese lautet die zugehörige Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)} = \begin{pmatrix} \delta_1 & r & 0 \\ \delta_2 & 0 & r \\ \sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2} & -r\delta_1/\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2} & -r\delta_2/\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2} \end{pmatrix}, \tag{F.35a}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\right) = \frac{r^2}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}}\,. \tag{F.35b}$$

In der Monte-Carlo-Analyse der modifizierten Compton-Streuung am schwarzen Loch müssen einige Parameterbereiche kompaktifiziert werden. Dazu gehören zum Beispiel die Impulsvariablen. Man erreicht dies mit einer Variablentransformation:

$$p'_x = \frac{\exp(p_x)}{1+\exp(p_x)}\,, \quad p_x = \ln\left(\frac{p'_x}{1-p'_x}\right)\,, \tag{F.36}$$

mit $p'_x \in \{0,1\}$ und analog für p_y, p_z.

Summary

Introduction

Symmetries lead to a very elegant and efficient description of physical phenomena and, therefore, play an important role in all fields of theoretical physics. In the case of continuous symmetries, conserved quantities follow from Noether's theorem and states are associated to representations of symmetry groups. These representations can be characterized either by discrete quantum numbers or by continuous parameters. From the conservation laws it follows that the sum of these quantum numbers or parameters does not change during the time evolution of the physical states. An understanding of the symmetries of a theory leads to a profound insight into its structure, without the need for an explicit solution of its dynamics.

The symmetry group of special relativity is the Poincaré group. It consists of the Lorentz group O(3,1) — which leaves invariant the Minkowski length squared — and the translation group of Minkowski space. This symmetry is referred to as Lorentz symmetry. It allows one to understand a vast part of the physics of special relativity. On the one hand, it includes the postulate about the constancy of the speed of light and on the other hand, it implies the light cone structure. The latter is fundamental for the dispersion relations of massive and massless particles respectively, and for the causality of the theory. The property of the existence of the Lorentz symmetry is also called Lorentz invariance.

However, symmetries that are postulated in theoretical physics for different reasons are often proven to be broken in nature — some of them explicitly and others spontaneously by the ground state. For example, for a long time it was believed that all laws of physics are invariant with respect to the parity operation. Long before the theory of weak interactions was established by Glashow, Weinberg and Salam, an idea had been proposed by Weyl for a theory with a vector axialvector structure. However, this theory had been harshly rejected by Pauli [2], because it obviously violated parity invariance. This opinion persisted in the physics community for decades, until parity violation was experimentally found by Wu et al. [3] in the 1950s.

We have learned from history and today we are more open-minded towards certain ideas. Although so far experiments tell us that Lorentz invariance of spacetime is an exact symmetry to the highest measured energies, this symmetry can be violated under certain assumptions. A broken Lorentz symmetry results in interesting physical effects. By analyzing a possible Lorentz violation, new insights into the physical paradigm can be gained. Experimental indications of Lorentz violation would be a direct clue to physics beyond the standard model. For example,

this could indicate a microscopic spacetime structure. In this context the expression "spacetime foam" [4, 5] is often mentioned. Furthermore, a violation of Lorentz invariance can occur in certain scenarios of string theory [6, 7, 8], noncommutative field theory [9], loop quantum gravity [10] and models with nontrivial topology of spacetime [11, 12, 13].

Indeed, there exists a wide range of models which describe the low energy limit of Lorentz symmetry violation in terms of an effective theory. In order to analyze phenomenological effects the "Lorentz-violating extension of the standard model" is of large importance. The latter includes a combination of all renormalizable terms which can be constructed by using Lorentz-violating operators and fields from the standard model of particle physics [14]. This Ph.D. thesis deals with modified-Maxwell theory which parameterizes a violation of Lorentz invariance in the photon sector. Since this theory has not been investigated in detail so far, the aim is to gain a profound physical understanding of it.

This thesis is divided into six large parts. Part I includes an introduction to the theory of Lorentz symmetry violation, whereas we will set formal aspects aside. The basic physical ideas shall be motivated and illustrated. The focus is on the introduction of the used model — modified-Maxwell theory, and modified quantum electrodynamics, respectively. Part II is dedicated to phenomenological aspects and to the analysis of particle physics processes which will occur in the photon sector, if Lorentz symmetry is violated. This includes e.g. vacuum Cherenkov radiation, photon decay or modifications of the parton model. Part II is directly based on experimental results of ultra-high-energy cosmic rays. Part III includes a more formal investigation of the theory. Here aspects such as causality and unitarity are dealt with. Considerations of this kind were made for ordinary quantum electrodynamics in the 1920s, in which case it could be shown that the afore mentioned properties hold. However, for theories with violated Lorentz symmetry the validity of these assumptions is not necessarily guaranteed and therefore has to be checked. Part IV deals with quantum corrections and their calculation in the modified quantum electrodynamics. This involves an explicit check of both the Ward identity and the UV-renormalizability of the theory at one-loop level. Finally, in part V, modified-Maxwell theory is coupled to gravitation. Such a unification could lead to the violation of the generalized second law of black hole thermodynamics, which would question the physical consistency of the corresponding theory. This issue is to be analyzed by considering a special *Gedankenexperiment*: Compton scattering in the modified Schwarzschild background. The final chapter of the main part of this Ph.D. thesis summarizes the most important results and delivers an outlook on further possible investigations.

Lengthly calculations will not be included in the main part, if they are unnecessary for physical understanding. In this case they will be presented in detail in the appendix (part VI). Furthermore, we will use natural units $\hbar = c = 1$. In order to make things easier to understand we will reinstate $\hbar$ and c at certain places.

Overview and outlook

This Ph.D. thesis investigated the violation of Lorentz invariance in the photon sector. In the first part we illustrated the general implications of Lorentz invariance breaking. Additionally, this part included an introduction to modified-Maxwell theory, which is one of the two possible parameterizations of a Lorentz symmetry violation in the photon sector. This was to be thoroughly examined in the remainder of this thesis.

In the second part, decay widths of vacuum Cherenkov radiation and photon decay in modified quantum electrodynamics were calculated. This was done for both point-like spin-1/2 fermions and scalar particles. Both processes are threshold-induced, and hence are allowed for an energy that is larger than a certain threshold. In addition to the decay width it was possible to compute the emission rate of vacuum Cherenkov radiation, which tells us how fast an electrically charged particle loses its energy due to this process. Besides the quantum field theoretical approach, emission rate and threshold energy of the vacuum Cherenkov process could also be computed in a semiclassical manner by introducing an effective refraction index for the Lorentz-violating vacuum. The resulting threshold energy is exactly equal to the quantum field theoretical result, whereas the emission rate coincides with the quantum field theory result up to leading order with respect to the energy of the particle. The photon spectrum of vacuum Cherenkov radiation leads to the conclusion that a spin-1/2 fermion can lose its energy above threshold by emission of a single photon. A calculation of the radiation length of a charged particle also confirms this fact. The result is that the radiation length is only a few meters (or less). After having traveled this distance, the particle will have lost its energy above threshold by vacuum Cherenkov radiation. A similar argument is possible for photon decay. A modified photon with its energy lying above the corresponding threshold, would have decayed into a fermion-antifermion pair long before it reached the Earth. With these results and recent experimental data obtained by the Pierre-Auger observatory and by H.E.S.S. it was possible to improve current bounds on the parameter of the spatially isotropic model and, in addition, the negative parameter regime could be constrained by a lower bound. An additional consideration of both the parton content of the proton and the proton-breakup process $p \to p\overline{p}p$ can further decrease the lower bound on the negative parameter sector. However, additional assumptions about the parton content at energies of 10^2 EeV go into this computation. In principle, the bounds are not astrophysical but terrestrial ones, because neither exact knowledge of the origin nor of the propagation of high-energy particles is necessary, but only of their detection in the Earth's atmosphere.

In the third part of the thesis some special cases of nonbirefringent modified-Maxwell theory were considered especially regarding some formal aspects. This analysis included microcausality and unitarity of three cases: the spatially isotropic case, the nonisotropic case with one preferred spatial direction and the nonisotropic case with two preferred directions. The result is that both the spatially isotropic case and the anisotropic case with one preferred direction obey these properties. Hence, these cases are physically well-behaved and can be used to parameterize Lorentz violation in the framework of modified-Maxwell theory. Unitarity is guaranteed in the third case with two preferred directions, but microcausality still needs to be analyzed for this

case.

In the fourth part we tried to compute quantum corrections at one-loop level to vacuum Cherenkov radiation and photon decay, respectively. This task has proven to be difficult from a technical point of view because of the rich tensor structure of modified-Maxwell theory and the occurring infrared divergences. Hence, the general calculations could not be completed. Nevertheless it was possible to compute one-loop corrections in certain regimes, e.g. in the case of a small photon momentum with respect to the fermion mass. This made it possible to check the Ward-identity of both the UV-divergent terms and — to a certain degree – of the finite terms. The latter has not been performed in the literature so far. The result is a guaranteed Ward-identity, at least as far as calculations allow us to give such a statement. From this fact it follows to a large degree of certainty that modified-Maxwell theory is free of anomalies. For a definite proof the exact expressions for the quantum corrections would be needed, although as stated their computation was not feasible. Finally, we could compute the decay width for photon decay with the help of the optical theorem from the long-known vacuum polarization contribution of ordinary quantum electrodynamics. The result agrees with the one obtained in part II and, additionally, has a much simpler functional form. This proves to be a very good crosscheck for the earlier performed calculations of photon decay in the second part.

In the fifth part we analyzed whether the spatially isotropic case of modified-Maxwell theory can be consistently coupled to gravity. Certain gravitationally coupled Lorentz-violating theories obey modified Schwarzschild solutions with a multiple horizon structure. The latter can be constructed such that the horizon for modified photons is outside of the one for massive particles. We have performed a *Gedankenexperiment*, in which an electron scatters with a photon in the region between these two horizons — we will refer to this region as the ergosphere. This process is some kind of modified Compton scattering. Since the photon is behind its own horizon, it is allowed to have a negative Killing energy. The electron can escape to infinity after the scattering, because the scattering point lies before the horizon of massive particles. If the modified Compton process occurs in that manner, the photon carries negative Killing energy into the black hole, which reduces its mass and horizon area. If the electron escaping to infinity is in a pure state, the entropy of the black hole could be reduced by such a process, which would contradict the generalized second law of black hole thermodynamics. It was already shown in [112] that such a scattering is energetically possible. However, in order to check the modified second law this is not sufficient, and further considerations are necessary. Since the *Gedankenexperiment* involves many free parameters, numerical techniques had to be used. It was possible to find many more kinematical configurations, for which such an entropy-reducing process is possible. Additionally, cross sections were computed for such configurations and for those which would enlarge the entropy. The latter will be the case if e.g. the electron falls into the black hole after the scattering. The result of this analysis is that for all parameter choices the cross section for an entropy-reducing process is always smaller than the one for an entropy-increasing process. So there exist strong clues indicating the validity of the generalized second law of black hole thermodynamics in this special *Gedankenexperiment*. This guarantees the consistency of the gravitationally coupled spatially isotropic case of modified-Maxwell

theory. A final analytic proof could not be performed because of the large parameter space. Furthermore, it was shown in [112] that the modified Compton scattering process is no longer allowed below some finite Lorentz-violating parameter. The origin of that behavior could be numerically traced back to the fact that for small parameters the modified photon cannot push the incoming electron out of the ergosphere any more.

To summarize, at least some domain of modified-Maxwell theory acts as a well-behaved theory for parameterizing a possible violation of Lorentz invariance in the photon sector. This fact results from both formal and phenomenological considerations. For example, since both microcausality and unitarity hold for certain special cases, it is interesting to constrain their Lorentz-violating parameters with the help of experimental data. Moreover, there exist strong hints that modified-Maxwell theory can be consistently coupled to gravity. This result cannot be taken for granted for other Lorentz-violating theories. For example, Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons theory leads to problems in this context. This thesis can serve as a foundation for future analysis of modified-Maxwell theory. In the future, other special cases could be considered, which perhaps have even more interesting features than those previously mentioned. Maybe it will be possible to generalize some of the performed calculations to the full theory. Finally, an analysis of Lorentz symmetry violation is worthwhile in itself, and from this, clues could be obtained regarding the still-to-be-found unified theory of quantum physics and gravitation. Therefore, this research field is a very attractive one.

Symbolverzeichnis

α	Feinstrukturkonstante $e^2/(4\pi)$
α_s	starke Kopplungskonstante
$\not{p}$, $\not{\partial}$	Feynman-Slash: $p_\mu\gamma^\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}$, $\partial_\mu\gamma^\mu = \gamma^0\partial^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}$
Δ_F	Skalarer Feynman-Propagator
ϵ	Parameter der Feynmanschen Kausalitätsvorschrift beim Propagator
$\eta_{\mu\nu}$	Minkowski-Metrik mit der Signatur $(+,-,-,-)$
Γ	Zerfallsbreite
$\mathcal{L}$	Lagrangedichte
$\mathcal{M}$	Matrixelement
$\mathcal{O}(x)$	Terme der Ordnung x (Landau-Symbol)
$\mathrm{d}\Gamma$	differentielle Zerfallsbreite
$\mathrm{d}\sigma$	differentieller Wirkungsquerschnitt
$\mathrm{d}^4x/\mathrm{d}^dx$	Differential des vier-/d-dimensionalen Minkowski-Raums
$\mathrm{e}^-/\mathrm{e}^+$	Elektron/Positron
$\mathrm{p}^-/\mathrm{p}^+$	Antiproton/Proton
μ	Renormierungsskala
σ	totaler Wirkungsquerschnitt
γ	gewöhnliches Photon
ε	Parameter der dimensionalen Regularisierung
$\widetilde{\kappa}^{01}$, $\widetilde{\kappa}^{02}$, $\widetilde{\kappa}^{03}$	Parameter des räumlich anisotropen Falls mit zwei ausgezeichneten Richtungen
$\widetilde{\kappa}_{00}$	Parameter des räumlich isotropen Falls
$\widetilde{\kappa}_{33}$	Parameter des räumlich anisotropen Falls mit einer ausgezeichneten Richtung
$\widetilde{\gamma}$	modifiziertes Photon
A^μ	U(1)-Eichfeld
d	Raumzeitdimension
$D(x)$, $D(p)$	Kommutatorfunktion
$e^\mu{}_a$, $e_\nu{}^b$	Vierbein
$g_{\mu\nu}$	Metrik des gekrümmten Raums

$K(x_0, \mathbf{x})$	Skalare Propagatorfunktion im Minkowski-Raum
M	in Teil I - IV: Masse eines Teilchens, beispielsweise Protons, in Teil V: Masse eines schwarzen Lochs
m	in Teil V: Elektronmasse
R	Ricci-Krümmung
S	Wirkung
$S(x_4, \mathbf{x})$	Skalare Propagatorfunktion im euklidischen Raum
V_{eff}	Effektives Potential der Schwarzschild-Metrik
x_4	Euklidische „Zeitkoordinate“
g	Gluon
H	Higgs-Teilchen

Index

affiner Zusammenhang, *siehe* Christoffel-Symbol
asymptotische Entwicklung, 167–172, 177, 180, 185
außerordentlicher Strahl, *siehe* extraordinärer Strahl

Bloch-Nordsieck-Theorem, 158, 166
Bose-Einstein-Verteilung, 199
Boson, 66, 199
Brechungsindex, 21, 25, 28, 30, 39, 41, 46, 60, 61, 150, 225, 253, 255

Casimir-Effekt, 149, 151
Chern-Simons-Theorie, 27
Chiralität, 138, 139
Christoffel-Symbol, 196
Compton-Streuung, 191–194, 196, 203–205, 207, 209–212, 214, 216, 217, 219, 220, 227, 277, 281, 282
Counterterm, 157
CPT-Invarianz, 75
  der modifizierten Maxwell-Theorie, 24

Defekt, 18–21, 25, 30, 97, 100, 148
Dielektrizitätszahl, 150
Dispersionsrelation, 9, 21, 30, 44, 47, 65, 70, 77, 86, 87, 113, 117, 119, 132, 148, 164, 201, 241, 243, 245, 250, 252
  fermionische, 63, 79
  massiver Teilchen, 70, 74, 107
  modifizierte, des Photons, 27, 30, 32, 40, 44, 60, 63, 70, 99, 107, 125, 126, 132, 133, 135, 136, 173, 182, 185, 189, 232, 235–238, 260, 262
  modifizierte, des Protons, 241, 243
  modifizierte, massiver Teilchen, 75, 247, 250, 252
  Off-Shell-, modifizierte, des Photons, 29, 115, 116, 127, 150, 151
  Off-Shell-, modifizierte, massiver Teilchen, 251
  partonische, 86
Doppelbrechung, 21, 27, 47
Drei-Punkt-Funktion, 163–166, 274, 275

effektive Metrik, 146, 151, 202, 203
Eichboson, 74, 76, 77, 79, 86, 97
  -feld, 109
  -inhalt, 74–76, 79, 86, 87, 93, 241
  -sektor, 86, 99
Eichung, 108, 109, 127
  axiale, 109–111, 127, 134, 261
  Coulomb-, 29, 31, 128, 261
  Feynman-'t Hooft-, 111
  Landau-, 111, 241
  Lorenz-, 109, 111, 232, 235–237, 261
  R_ξ-Eichung, 111, 127, 135
Ein-Schleifen-Beitrag, 10, 155, 162, 166, 167, 171, 178, 181, 182, 185, 226, 273
  zum Photonzerfall, 163, 166, 185, 226, 273
  zur modifizierten fermionischen Selbstenergie, 77
  zur Photon-Selbstenergie, 183

zur Photon-Vierpunkt-Funktion, 150
zur Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 155, 158, 185, 226, 273
zur Vakuum-Polarisation, 150
Einstein-
Gleichungen, 189
Metrik, 201
Einstein-Hilbert-Term, 202
Energie-Impuls-Tensor, 19, 43, 189, 232, 238
Ergosphäre, 203, 204, 210, 223, 227
euklidisch
Metrik, 105, 115
Raum, 105, 112, 113, 115, 116, 122, 123, 127, 136
Zeit, 105
Zwei-Punkt-Funktion, 121
`Exp`, 169–171, 173, 185
extraordinärer Strahl, 22

Feinstrukturkonstante, 52, 182
Feldstärketensor, 24, 26
Fermi-Dirac-Verteilung, 199
Fermion, 25, 41, 44, 49, 53–59, 62–64, 66, 74, 77–79, 86, 93, 95, 97, 139, 157, 165, 166, 171, 172, 178, 181, 185, 199, 203, 225, 250, 281
-Antifermion-Paar, 63, 95
-Propagator, 164
-inhalt, 86
-propagator, 155, 171, 172
-sektor, 96
Feldrenormierung, 157
Fermion-Antifermion-Paar, 181, 225
Ferromagnet, 15–17
`Form`, 169, 170, 273
Frontgeschwindigkeit, 27, 28, 30, 108, 119, 123, 126, 132–134, 151

Gruppengeschwindigkeit, 27, 28, 30, 108, 126, 132, 133, 150

H.E.S.S., 91, 92, 95, 99, 225
Hauptsatz der Thermodynamik, 197, 198
Hawking-Strahlung, 198, 199, 201
Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation, 18, 19, 77, 119, 192
Helizität, 139
Higgs-Boson, 86
Hintergrundfeld, 24, 25

IR-Divergenz, 156–161, 166, 167, 185, 226
Isometrie, 195, 196

Killing
-Drehimpuls, 196, 204–206, 279, 280
-Energie, 196, 199, 203–208, 214, 216, 217, 220, 227, 279, 280
-Gleichung, 195, 196, 277
-Vektor, 195–197, 199, 277, 279, 280
klassische Cherenkov-Strahlung, 37–39, 81
einer Ladungsverteilung, 81, 253, 254, 257
Ko-Subgraph, 168, 169, 171–173
Kommutator, 103, 118–121, 128, 259–262
-funktion, 117–120, 129, 260, 261, 265
des Vektorpotentials, 117, 118, 128, 259, 260
physikalischer Felder, 118, 119, 128, 129, 262–264
von Feldoperatoren, 103

Lemaître-Koordinaten, 203, 205, 279
Lorentzinvarianz, 9, 15, 42, 52, 89, 146
aktiv, 17, 20, 21, 23, 24, 26, 32, 37, 148, 194
aktive, 32
passiv, 20, 42
Lorentzsymmetrie, 10, 23, 47, 51, 69, 70, 74, 76, 78, 86, 96, 97, 99, 100, 104, 113, 119, 165, 189, 190, 223, 225, 227, 252
-verletzend, 10, 15, 23, 28, 40, 52–54, 56, 57, 60, 62–64, 69–71, 73, 74, 77, 79, 83, 89, 94, 95, 103, 111, 126, 131, 133, 137, 138, 158, 162, 185, 189, 194, 201, 202, 210, 214, 215,

219–221, 223, 225–227, 244, 248, 252, 261, 283
verletzung, 10, 23, 25, 51, 57, 61, 70, 71, 76, 79, 93, 96, 99, 162, 165, 178, 203, 210, 223, 226, 228, 241, 247, 248, 250–252
Lorentzsymmetrie-verletzend, 155, 162

`Matad`, 169, 170, 185
Matrixelement, 54, 84, 142, 176
der gewöhnlichen Compton-Streuung, 191, 281
der modifizierten Compton-Streuung, 214–216
der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 41, 163
des Photonzerfalls, 64, 163
des Proton-Breakup-Prozesses, 240
Maxwell-Chern-Simons-Theorie, 23, 24, 63, 120, 227
Maxwell-Gleichungen, 37, 132
Mikrokausalität, 28, 103, 104, 117, 121, 123, 134, 145, 146, 151, 152, 226, 227, 270
`Mincer`, 169, 170, 173, 185
Minkowski
-Abstandsquadrat, 119
-Längenquadrat, 9
-Linienelement, 37, 57, 108, 145, 151
-Metrik, 24, 105, 201
-Raum, 9, 17–19, 109, 112–117, 121, 127, 136, 146, 192, 198
-Skalarprodukt, 134
-Zeit, 105
modifizierte Maxwell-Theorie, 23–25, 27, 37, 40, 59, 63, 78, 92, 96, 99, 108, 110, 115, 123, 131, 145, 150, 151, 155, 162, 166, 178, 189, 191, 201–203, 223, 225–227, 232, 252

Neutron, 81, 83–85, 97, 257
nicht-doppelbrechender Ansatz, 27, 31, 237
Noether-Theorem, 9, 175

optisches Theorem, 138, 141–143, 165, 181, 185, 226
ordentlicher Strahl, *siehe* ordinärer Strahl
ordinärer Strahl, 22
Osterwalder-Schrader-Axiom, 113

Paritätsverletzung, 24, 92, 131, 138, 142, 238
Parton, 72, 73, 76, 83–88
-inhalt, 40, 74, 76, 85, 87, 88, 93, 97, 226, 241
-modell, 10, 72–76, 82–88, 99, 164
-spezies, 73, 74
-verteilungsfunktion, 73, 74, 83, 84
Passarino-Veltman-Zerlegung, 164, 165, 178, 185, 273
Permeabilitätszahl, 150
Phasengeschwindigkeit, 20, 21, 27, 28, 30, 37, 38, 85, 108, 126, 132–134, 148
Phasenraum, 160, 163
-maß, 44, 45, 65, 160, 181, 282
der modifizierten Compton-Streuung, 210–212, 219
der Photonproduktion, 139
der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 44, 46, 51, 141, 155
des Photonzerfalls, 65, 166, 181
des Proton-Breakup-Prozesses, 241, 243
Photon, 21, 25, 30, 32, 37, 40, 42, 44–46, 49, 59, 60, 63, 65, 70, 74, 79, 83–88, 93–95, 97, 99, 107, 139–141, 148, 150, 155, 158, 160, 166, 171–173, 176, 178, 181–183, 185, 191–194, 204, 207–210, 212, 214, 216, 217, 220, 223, 225–227, 232, 240, 245, 252, 281, 283
-Vierpunkt-Funktion, 150
-abstrahlung, 54
-feld, 26, 41, 73
-masse als Regulator, 158, 166
-modifiziertes, 25

-polarisation, 45, 49
-produktion, 141
-propagator, 70, 79, 108, 113, 139, 140, 150, 155, 162–165, 170, 240, 241, 245
-sektor, 10, 23, 25, 37, 70, 96, 99, 108, 113, 162, 241, 247, 248, 250, 252
modifiziertes, 23, 40, 41, 63, 64, 66, 138, 139, 141, 182, 202–204, 207, 225–227, 241, 281
modifiziertes virtuelles, 69, 76, 77, 84
primäres, 92, 94, 95
virtuelles, 245
virtuelles modifiziertes, 139, 140
weiches, 160, 185
Photon-Triple-Splitting, 63
Photonmasse
als Regulator, 161
Photonzerfall, 10, 41, 63, 65, 71, 79, 84, 89, 92, 94, 95, 99, 107, 162, 163, 166, 173, 181, 182, 185, 225, 226, 245, 273
Pierre-Auger-Observatorium, 91, 95, 97, 99, 225
Polarisationssumme, 42, 43, 64, 128, 140, 143, 193, 214, 232, 235–239, 260
Polarisationsvektor, 21, 42, 43, 176, 232–238
Poynting-Vektor, 21, 22
Propagator, 77, 78, 108–113, 115, 118, 121, 123, 127, 128, 134, 135, 137, 138, 140–142, 150, 157, 163, 164, 169, 170, 176, 177, 261
-funktion, 113, 136, 260, 262
-korrektur, 185
des Photons, 70, 79, 108, 113, 139, 140, 150, 162–165, 170, 240, 241, 245
euklidischer, 121, 122, 129
fermionischer, 141, 164, 171, 172
renormierter, 157
Proton, 40–42, 44, 45, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 69–73, 75, 76, 79, 82–88, 93, 94, 97, 155, 156, 158, 159, 240–243, 245
Eichbosoninhalt, 75, 76, 86, 97, 241
Gluoninhalt, 88
mit innerer Struktur, 71–73
Partoninhalt, 74, 226
punktförmig angenommenes, 40, 69–71, 87, 93, 156
Proton-Antiproton-Paar, 63, 69
Proton-Breakup-Prozess, 69–71, 73–76, 79, 84, 92, 93, 97, 99, 112, 164, 226, 231, 240, 247, 252

`Q2E`, 169, 170, 185
QCD, 71–73, 83, 87
QED, 24, 29, 31, 40, 63, 70, 75, 78, 79, 103, 113, 119, 120, 155, 159, 164, 165, 175–177, 181–183, 185, 191, 193, 210, 244, 281
effektive, 150
modifizierte, 23, 41, 54, 74, 86, 95, 155, 167, 170, 174, 175, 177, 181, 182, 185, 193, 201, 214, 244, 245, 247, 273, 282
skalare modifizierte, 41, 42, 54
`QGraf`, 169, 170, 185
Quantenchromodynamik, *siehe* QCD
Quantenelektrodynamik, *siehe* QED, *siehe* QED
modifizierte, *siehe* QED, *siehe* QED, modifizierte
Quantenkorrektur, 176
Quantenkorrekturen, 10, 71, 79, 155, 158, 162, 163, 167, 170, 176, 177, 185, 192, 226, 273

Raumzeitschaum, 10, 18, 100
-Modelle, 30
Reflexions-Positivität, 121–123, 129, 136–138, 268
schwache, 122, 123, 130, 137, 138
starke, 122, 123, 129, 130, 137, 138
Reflexionsoperation, 121, 122
Regularisierung

dimensionale, 155, 157, 160, 166, 170–172
Pauli-Villars-, 78
Relativitätsprinzip, 19, 20, 147
Riemann-Cartan-Geometrie, 189
Riemannsche Geometrie, 24, 189, 195
Riemannsche Mannigfaltigkeit, 195
Riemannscher Krümmungstensor, 24

Scharnhorst-Effekt, 149–151
schwarzes Loch, 90, 189, 197–199, 203, 204, 212, 214, 216, 223, 277
Thermodynamik, 10, 197, 199, 211, 213, 223
Schwarzschild
-Hintergrund, 194, 203
-Koordinaten, 196, 197, 205, 206, 277, 279, 280
-Lösung, 189, 190, 195, 196, 198, 201, 223, 226, 277, 279
-Metrik, 189, 192, 196, 203, 205–207, 216
-Radius, 17, 18, 189
Schwellenenergie, 81, 99, 225
der klassischen Cherenkov-Strahlung einer Ladungsverteilung, 81
der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 40, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 61, 85, 87, 88, 93, 94, 155, 225
der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, partonisch, 81, 87
des Photonzerfalls, 63, 64, 66, 67, 182, 225
des Proton-Breakup-Prozesses, 75, 76
Schwinger-Funktion, 112
Selbstenergie, 77, 78, 142, 163–167, 171, 172, 177, 178, 182
des Photons, 178, 183, 185
fermionische, 77, 141, 142, 164, 165, 177, 185, 273
Spektrum
aus Eigenwerten, 104
der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 58, 225
Strahlungslänge, 57, 225
Subgraph, 168, 169, 171–174
asympotisch irreduzibler, 172
asymptotisch irreduzibler, 168, 169, 171
Subluminitätsbedingung, 117

Tadpole, 171, 172, 174
-Integral, 170
-Topologie, 171, 173
Tensorintegral, 162, 164, 166, 273

Unitarität, 10, 103, 104, 117, 121, 123, 134, 136, 138, 141, 143, 145, 151, 226, 227, 259
UV-Divergenz, 155, 157, 166, 177, 178, 185, 226

Vakuum, 19–21, 25, 37, 39, 59, 148, 150, 225
-Polarisation, 150
klassisches, 19
nichttriviales, 19, 20, 26, 199
Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 10, 37, 40–42, 44, 51, 53–59, 61, 64, 65, 67, 71, 79, 83–89, 92–94, 97, 99, 141, 155, 156, 162, 163, 166, 185, 225, 226, 231, 245, 253, 273
einer Ladungsverteilung, 81
Vakuumerwartungswert, 261
Vakuumlösung, 189
Vakuumpolarisation, 226
Vakuumzustand, 19, 20, 198
Vertexkorrektur, 155–157, 162, 163, 165–167, 172, 173, 177, 178, 185, 273
Vier-Punkt-Funktion, 163, 165
Vierbein, 202, 205

Wahrscheinlichkeitserhaltung, *siehe* Unitarität
Ward-Identität, 10, 140, 142, 143, 166, 173–177, 180, 185, 193, 226
Ward-Takahashi-Identität, 176

Wick-Rotation, 105, 108, 112–117, 122, 127, 135, 136
Wightman-Axiom, 113
Wightman-Funktion, 112
Wirkungsquerschnitt, 83, 99, 160
  der gewöhnlichen Compton-Streuung, 191, 192, 281
  der modifizierten Compton-Streuung, 193, 194, 209, 211, 212, 214–217, 227, 282, 283
  für Photonproduktion, 138, 141
  partonischer, 83
  Thomson-, 192, 194

Zerfallsbreite, 44, 54, 99, 160, 231
  Definition, 243
  Definition der, 44
  der Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 40, 44, 46, 47, 49, 52–56, 85, 141, 155, 158, 160–162, 225
  des Photonzerfalls, 65–67, 94, 162, 166, 181, 182, 185, 226
  des Proton-Breakup-Prozesses, 70, 79, 112, 241
  im Partonmodell, 82–84
  im Quarkmodell, 84
  Vakuum-Cherenkov-Strahlung, 143
Zwei-Punkt-Funktion, 112, 156, 164, 173, 273

Literaturverzeichnis

[1] W. Heisenberg, *Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen* (S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1967).

[2] W. Pauli, „*Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*," Handbuch der Physik, Band **24**, 83 (1933), Nachdruck durch: Ann Arbor, Mich., J.W. Edwards (1946).

[3] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes und R. P. Hudson, „*Experimental test of parity conservation in beta decay*," Phys. Rev. **105**(4), 1413 (1957).

[4] J. A. Wheeler, „*On the nature of quantum geometrodynamics*," Annals Phys. **2**, 604 (1957).

[5] S. W. Hawking, „*Space-time foam*," Nucl. Phys. B **144**, 349 (1978).

[6] V. A. Kostelecký und S. Samuel, „*Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*," Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).

[7] V. A. Kostelecký und R. Potting, „*Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string*," Phys. Lett. B **381**, 89 (1996), arXiv:hep-th/9605088.

[8] N. E. Mavromatos, „*Lorentz invariance violation from string theory*," PoS **QG-PH** 027 (2007), arXiv:0708.2250 [hep-th].

[9] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane und T. Okamoto, „*Noncommutative field theory and Lorentz violation*," Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001), arXiv:hep-th/0105082.

[10] M. Bojowald, H. A. Morales-Tecotl und H. Sahlmann, „*On loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance*," Phys. Rev. D **71**, 084012 (2005), arXiv:gr-qc/0411101.

[11] F. R. Klinkhamer, „*A CPT anomaly*," Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000), arXiv:hep-th/9912169.

[12] F. R. Klinkhamer und C. Rupp, „*Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation*," Phys. Rev. D **70**, 045020 (2004), arXiv:hep-th/0312032.

[13] F. R. Klinkhamer, „*Nontrivial spacetime topology, CPT violation, and photons*," arXiv:hep-ph/0511030.

[14] D. Colladay und V. A. Kostelecký, „*Lorentz-violating extension of the standard model*," Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998), arXiv:hep-ph/9809521.

[15] J. A. Wheeler, *Relativity, Gravitation and Topology*, in *Battelle Rencontres 1967*, Hrsg. C.M. DeWitt und J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968), pp. 242-307.

[16] S. W. Hawking, D. N. Page und C. N. Pope, „*Quantum gravitational bubbles*," Nucl. Phys. B **170**, 283 (1980).

[17] J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverria, G. Klinkhammer, K. S. Thorne und U. Yurtsever, „*Cauchy problem in space-times with closed timelike curves*," Phys. Rev. D **42**, 1915 (1990).

[18] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (Springer, New York, 1996).

[19] S. M. Carroll, G. B. Field und R. Jackiw, „*Limits on a Lorentz and parity violating modification of electrodynamics*," Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[20] C. Adam und F. R. Klinkhamer, „*Causality and CPT violation from an Abelian Chern–Simons like term*," Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001), arXiv:hep-ph/0101087.

[21] C. Adam und F. R. Klinkhamer, „*Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics*," Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003), arXiv:hep-th/0212028.

[22] S. Chadha und H. B. Nielsen, „*Lorentz invariance as a low-energy phenomenon*," Nucl. Phys. B **217**, 125 (1983).

[23] V. A. Kostelecký, C. D. Lane und A. G. M. Pickering, „*One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics*," Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002), arXiv:hep-th/0111123.

[24] V. A. Kostelecký und M. Mewes, „*Signals for Lorentz violation in electrodynamics*," Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002), arXiv:hep-ph/0205211.

[25] J. M. Jauch und F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, zweite Auflage (Springer, New York, 1976).

[26] Q. G. Bailey und V. A. Kostelecký, „*Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics*," Phys. Rev. D **70**, 076006 (2004), arXiv:hep-ph/0407252.

[27] B. Altschul, „*Vacuum Cerenkov radiation in Lorentz-violating theories without CPT violation*," Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007), arXiv:hep-th/0609030.

[28] V. A. Kostelecký und M. Mewes, „*Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics*," Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001), arXiv:hep-ph/0111026.

[29] L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity* (Academic Press, New York und London, 1960).

[30] C. Kaufhold und F. R. Klinkhamer, „*Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell–Chern–Simons theory*," Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007), arXiv:0704.3255.

[31] S. Bernadotte und F. R. Klinkhamer, „*Bounds on length scales of classical spacetime foam models*," Phys. Rev. D **75**, 024028 (2007), arXiv:hep-ph/0610216.

[32] E. F. Beall, „*Measuring the gravitational interaction of elementary particles*," Phys. Rev. D **1**, 961 (1970).

[33] S. R. Coleman und S. L. Glashow, „*Cosmic ray and neutrino tests of special relativity*," Phys. Lett. B **405**, 249 (1997), arXiv:hep-ph/9703240.

[34] P. A. Cherenkov, „*The visible glow of pure liquids under the action of γ-rays*," Dokl. Ada. Nauk Ser. Fiz. **2**, 451 (1934).

[35] I. M. Frank und I. Tamm, „*Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*," C. R. Acad. Sci. URSS **14**, 109 (1937).

[36] A. Sommerfeld, „*Zur Elektronentheorie: I. Allgemeine Untersuchung des Feldes eines beliebig bewegen Elektrons,*" Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematische-Physikalische Klasse, 99 (1904). „*Zur Elektronentheorie: II. Grundlagen für eine allgemeine Dynamik des Elektrons,*" ebenda, 363 (1904). „*Zur Elektronentheorie: II. Grundlagen für eine allgemeine Dynamik des Elektrons,*" ebenda, 201 (1905). „*Zur Elektronentheorie: III. Über Lichtgeschwindigkeits- und Überlichtgeschwindigkeits-Elektronen,*" ebenda, 99 (1905);

[37] C. Kaufhold, *Untersuchungen zu baryonenzahl- und lorentzsymmetrieverletzenden Prozessen* (Doktorarbeit, 2007),
veröffentlicht unter `http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/phd.de.shtml`.

[38] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison–Wesley, Reading, USA, 1995).

[39] C. Kaufhold, F. R. Klinkhamer und M. Schreck, „*Tree-level calculation of vacuum Cherenkov radiation in isotropic nonbirefringent modified-Maxwell theory*," Report KA–TP–32–2007 [verfügbar auf `http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/prep2007.de.shtml`].

[40] J. V. Jelley, *Čerenkov Radiation and its applications* (Pergamon Press, London, 1958).

[41] C. Kaufhold, *Photonenzerfall in einer modifizierten Quantenelektrodynamik* (Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe, 2004), veröffentlicht unter `http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/diplomatheses.de.shtml`.

[42] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, "*Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics*," Nucl. Phys. B **734**, 1 (2006), arXiv:hep-th/0508074.

[43] O. Gagnon und G. D. Moore, „*Limits on Lorentz violation from the highest energy cosmic rays*," Phys. Rev. D **70**, 065002 (2004), arXiv:hep-ph/0404196.

[44] R. P. Feynman, „*Very high-energy collisions of hadrons*," Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969).

[45] T. Cheng und L. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Clarendon Press, Oxford, 1984).

[46] M. Gell-Mann, „*Symmetries of baryons and mesons*," Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).

[47] G. Zweig, „*An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. 2*," veröffentlicht in „Developments in the Quark Theory of Hadrons", **1**, Nonantum, Mass., Hadronic Press, 22 (1980) (Hrsg. D. B. Lichtenberg, S. P. Rosen), G. Zweig, „*An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking*," veröffentlicht in „Developments In The Quark Theory Of Hadrons", **1**, 22 (1964) (Hrsg. D. B. Lichtenberg, S. P. Rosen) und CERN Geneva - TH. **401**, 24 (1964).

[48] V. N. Gribov und L. N. Lipatov, „*Deep inelastic e p scattering in perturbation theory*," Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 438 (1972) [Yad. Fiz. **15**, 781 (1972)].

[49] Y. L. Dokshitzer, „*Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics*" (auf Russisch), Sov. Phys. JETP **46**, 641 (1977) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73**, 1216 (1977)].

[50] G. Altarelli und G. Parisi, „*Asymptotic freedom in parton language*," Nucl. Phys. B **126**, 298 (1977).

[51] H. E. Ives und G. R. Stilwell, „*An experimental study of the rate of a moving atomic clock*," J. Opt. Soc. Am. **28** 215 (1938).

[52] A. A. Michelson und E. W. Morley „*On the relative motion of the earth and the luminiferous ether*" Am. J. Sci. **34**, 333 (1887).

[53] R. J. Kennedy und E. M. Thorndike, „*Experimental establishment of the relativity of time*," Phys. Rev. **42** 400 (1932).

[54] M. E. Tobar, E. N. Ivanov, P. L. Stanwix, J. M. le Floch und J. G. Hartnett, „*Rotating odd-parity Lorentz invariance test in electrodynamics*," Phys. Rev. D **80**, 125024 (2009), arXiv:0909.2076 [hep-ph].

[55] K. Y. Chung, S. W. Chiow, S. Herrmann, S. Chu und H. Müller, „*Atom interferometry tests of local Lorentz invariance in gravity and electrodynamics*," Phys. Rev. D **80**, 016002 (2009), arXiv:0905.1929 [gr-qc].

[56] S. Herrmann, A. Senger, K. Möhle, M. Nagel, E.V. Kovalchuk und A. Peters, „*Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level*," Phys. Rev. D **80**, 105011 (2009), arXiv:1002.1284 [physics.class-ph].

[57] C. D. Carone, M. Sher und M. Vanderhaeghen, „*New bounds on isotropic Lorentz violation*," Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006), arXiv:hep-ph/0609150.

[58] M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips und R. L. Walsworth, „*Limits on isotropic Lorentz violation in QED from collider physics*," Phys. Rev. D **80**, 036010 (2009), arXiv:0809.3442 [hep-ph].

[59] B. Altschul, „*Bounding isotropic Lorentz violation using synchrotron losses at LEP*," Phys. Rev. D **80**, 091901 (2009), arXiv:0905.4346 [hep-ph].

[60] B. Altschul, „*Laboratory bounds on electron Lorentz violation*," arXiv:1005.2994 [hep-ph].

[61] V. A. Kostelecký und M. Mewes, „*Lorentz violation and short-baseline neutrino experiments*," Phys. Rev. D **70**, 076002 (2004), arXiv:hep-ph/0406255.

[62] V. A. Kostelecký und M. Mewes, „*Sensitive polarimetric search for relativity violations in gamma-ray bursts*," Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006), arXiv:hep-ph/0607084.

[63] V. A. Kostelecký und M. Mewes, „*Astrophysical tests of Lorentz and CPT Violation with photons*," Astrophys. J. **689**, L1 (2008), arXiv:0809.2846 [astro-ph].

[64] S. T. Scully und F. W. Stecker, „*Lorentz invariance violation and the observed spectrum of ultrahigh energy cosmic rays*," Astropart. Phys. **31**, 220 (2009), arXiv:0811.2230 [astro-ph].

[65] Z. Xiao und B. Q. Ma, „*Constraints on Lorentz invariance violation from gamma-ray burst GRB090510*," Phys. Rev. D **80**, 116005 (2009), arXiv:0909.4927 [hep-ph].

[66] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).

[67] V. Verzi [Pierre Auger Collaboration], „*The Pierre Auger Observatory for the study of the ultra-high-energy cosmic rays*," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **197**, 331 (2009).

[68] H. J. Volk, „*Gamma-ray astronomy of cosmic rays*," arXiv:astro-ph/0202421.

[69] S. Reinhardt *et al.*, „*Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities*," Nature Phys. **3**, 861 (2007).

[70] F. R. Klinkhamer und M. Risse, „*Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified-Maxwell theory*," Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008), arXiv:0709.2502 [hep-ph], F. R. Klinkhamer und M. Risse, „*Addendum: Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified-Maxwell theory*," Phys. Rev. D **77**, 117901 (2008), arXiv:0806.4351 [hep-ph].

[71] J. Abraham *et al.* [Pierre Auger Collaboration], „*An upper limit to the photon fraction in cosmic rays above 10^{19} eV from the Pierre Auger Observatory*," Astropart. Phys. **27**, 155 (2007), arXiv:astro-ph/0606619.

[72] H. M. J. Barbosa, F. Catalani, J. A. Chinellato und C. Dobrigkeit, „*Determination of the calorimetric energy in extensive air showers*," Astropart. Phys. **22**, 159 (2004), arXiv:astro-ph/0310234.

[73] F. Aharonian *et al.* [H.E.S.S. Collaboration], „*A detailed spectral and morphological study of the gamma-ray supernova remnant RX J1713.7-3946 with H.E.S.S.*," Astron. Astrophys. **449**, 223 (2006), arXiv:astro-ph/0511678.

[74] F. Aharonian *et al.* [H.E.S.S. Collaboration], „*Primary particle acceleration above 100 TeV in the shell-type supernova remnant RX J1713.7-3946 with deep H.E.S.S. observations*," Astron. Astrophys. **464**, 235 (2007), arXiv:astro-ph/0611813.

[75] I. Montvay und G. Munster, *Quantum Fields on a Lattice* (U.P., Cambridge, 1994).

[76] R. F. Streater und A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and all that* (The mathematical physics monograph series, W.A. Benjamin, INC., New York, 1964).

[77] S. Dubovsky, A. Nicolis, E. Trincherini und G. Villadoro, „*Microcausality in curved spacetime*," Phys. Rev. D **77**, 084016 (2008), arXiv:0709.1483 [hep-th].

[78] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, dritte Auflage (Oxford U.P., London, 1954).

[79] C. Früh, *Die Unschärferelation in der Maxwell–Chern–Simons-Theorie* (Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe, 2007), verfügbar über die Fakultät für Physik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT).

[80] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley & Sons, Inc., New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1987).

[81] G. Betschart, E. Kant und F. R. Klinkhamer, „*Lorentz violation and black-hole thermodynamics*," Nucl. Phys. B **815**, 198 (2009), arXiv:0811.0943 [hep-th].

[82] S. W. Hawking und G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[83] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago und London, 1984).

[84] R. Geroch, „*Domain of dependence*," J. Math. Phys. 11, 437 (1970).

[85] S. Liberati, S. Sonego und M. Visser, „*Faster-than-c signals, special relativity, and causality*," Annals Phys. **298**, 167 (2002), arXiv:gr-qc/0107091.

[86] N. E. Mavromatos, „*High-energy gamma-ray astronomy and string theory*," J. Phys. Conf. Ser. **174**, 012016 (2009), arXiv:0903.0318 [astro-ph.HE].

[87] H. B. G. Casimir, „*On the attraction between two perfectly conducting plates*," Indag. Math. **10**, 261 (1948), [ebenso in: Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. **51** (1948) 793 (*); Front. Phys. **65**, 342 (1987). Nachdruck des Artikels (*): (1) T. Appelquist, A. Chodos,

P. G. O. Freund (Ed.): *Modern Kaluza–Klein Theories. Frontiers in Physics*, Vol. 65. Addison–Wesley Publishing Company, Menlo Park, 342 (1987); (2) Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. 100N3-4, 61 (1997)].

[88] W. Heisenberg und H. Euler, „*Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*," Z. Phys. **98**, 714 (1936), [Übersetzung ins Englische von W. Korolevski und H. Kleinert (FU-Berlin): arXiv:physics/0605038].

[89] K. Scharnhorst, „*On propagation of light in the vacuum between plates*," Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).

[90] R. Gastmans and R. Meuldermans, "*Dimensional regularization of the infrared problem*," Nucl. Phys. B **63** (1973) 277.

[91] W. J. Marciano and A. Sirlin, "*Dimensional regularization of infrared divergences*," Nucl. Phys. B **88**, 86 (1975).

[92] F. R. Klinkhamer und M. Schreck, „*New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified-Maxwell theory*," Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008), arXiv:0809.3217 [hep-ph].

[93] D. Colladay und P. McDonald, „*One-Loop renormalization of pure Yang–Mills with Lorentz violation*," Phys. Rev. D **75**, 105002 (2007), arXiv:hep-ph/0609084.

[94] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, „*Scalar one loop integrals*," Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).

[95] G. Passarino und M. J. G. Veltman, „*One loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model*," Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).

[96] R. Harlander, „*Asymptotic expansions: methods and applications*," Acta Phys. Polon. B **30**, 3443 (1999), arXiv:hep-ph/9910496.

[97] T. Seidensticker, „*Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams*," arXiv:hep-ph/9905298.

[98] V. A. Smirnov, *Applied asymptotic expansions in momenta and masses*, Springer Tracts Mod. Phys. **177** (2002).

[99] P. Nogueira, „*Automatic Feynman graph generation*," J. Comput. Phys. **105**, 279 (1993).

[100] T. Seidensticker, „*Using q2e and exp*," nicht veröffentlicht (2002).

[101] M. Steinhauser, „*Matad: a program package for the computation of massive tadpoles*," Comput. Phys. Commun. **134**, 335 (2001), arXiv:hep-ph/0009029.

[102] S. A. Larin, F. V. Tkachov und J. A. M. Vermaseren, „*The Form version of Mincer*," NIKHEF-H-91-18 (1991).

[103] J. A. M. Vermaseren, „*New features of Form*," arXiv:math-ph/0010025.

[104] R. Harlander und M. Steinhauser, „*Automatic computation of Feynman diagrams*," Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 167 (1999), arXiv:hep-ph/9812357.

[105] M. Schreck, *Hadronischer Higgszerfall bis* $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ (Diplomarbeit am Institut für Theoretische Teilchenphysik, Universität Karlsruhe, 2007), erhältlich unter `http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uvf9`.

[106] V. A. Kostelecký, „*Gravity, Lorentz violation, and the standard model*," Phys. Rev. D **69** 105009 (2004), arXiv:hep-th/0312310.

[107] E. Kant, F. R. Klinkhamer und M. Schreck, „*Lorentz violation and black-hole thermodynamics: Compton scattering process*," Phys. Lett. B **682**, 316 (2009), arXiv:0909.0160 [hep-th].

[108] K. Schwarzschild, „*Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*," Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin (math.-phys. Klasse), 189 (1916).

[109] S. W. Hawking, „*Particle creation by black holes*," Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ebenda **46**, 206 (1976)].

[110] S. L. Dubovsky und S. M. Sibiryakov, „*Spontaneous breaking of Lorentz invariance, black holes and perpetuum mobile of the 2nd kind*," Phys. Lett. B **638**, 509 (2006), arXiv:hep-th/0603158.

[111] C. Eling, B. Z. Foster, T. Jacobson und A. C. Wall, „*Lorentz violation and perpetual motion*," Phys. Rev. D **75**, 101502 (2007), arXiv:hep-th/0702124.

[112] E. Kant, *Untersuchungen zu Lorentz-Verletzung, Gravitation und Photon-Propagation* (Doktorarbeit am Institut für Theoretische Physik, Karlsruher Institut für Technologie, 2009),
erhältlich unter `http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/phd.de.shtml`.

[113] B. Altschul, „*Vacuum Cerenkov radiation in Lorentz-violating theories without CPT violation*," Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007), arXiv:hep-th/0609030.

[114] N. L. Balazs, „*Cerenkov radiation of neutral particles with a magnetic moment*," Phys. Rev. **104**, 1220 (1956).

[115] I. S. Gradshteyn und I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).

[116] T. Ohl, „*Drawing Feynman diagrams with Latex and Metafont*," Comput. Phys. Commun. **90**, 340 (1995), arXiv:hep-ph/9505351.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Menschen meinen Dank aussprechen, die meine Entscheidung für das Studium des Fachs Physik bzw. meinen Werdegang auf positive Art und Weise beeinflussten.

Großer Dank gebührt meinem Doktorvater Professor Klinkhamer für die physikalisch sehr interessante Aufgabenstellung und hilfreiche Diskussionen während der Promotionsphase. Professor Lämmerzahl danke ich für die Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Meinen Eltern bin ich überaus dankbar für die seelische Unterstützung während der Promotion und natürlich zusätzlich für die finanzielle Unterstützung während meines Studiums.

Meine Schulzeit war ein entscheidender Faktor, welcher mich zu einem Studium der Physik bewegte. Deshalb möchte ich mich hier bei meinen Physiklehrern Herrn Munghay, Frau Ruff und Herrn Huber bedanken, die mit ihrer Gestaltung des Physikunterrichts von der achten Klasse bis zum Abitur dafür sorgten, dass sich mein Interesse an der Physik stets steigerte und meine Neugier an den Grundgesetzen der Natur auch außerhalb des Unterrichts anhielt.

Ebenso danke ich meinen Arbeitsgruppenmitgliedern seit August 2007, also Gerold Betschart, Viacheslav Emelyanov, Hamzeh Alavirad, Matthias Günther, Mareike Haberichter, Ralf Hofmann, Elisabeth Kant, Christian Kaufhold, Julian Moosmann, Hanno Sahlmann, Markus Schwarz, Julian Skrotzki, Bintoro Subagyo, Maher Succar, Alexander Wiegand sowie allen anderen Mitgliedern vom Institut für Theoretische Physik und Institut für Theoretische Teilchenphysik für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Vielen Dank auch an die Computeradministratoren, die für einen reibungsfreien Betrieb der Rechner an den Instituten sorgten und Peter Marquard dafür, dass er mir auch nach meiner Diplomarbeit Zugriff auf das `Empire`-System des Instituts für Theoretische Teilchenphysik gewährte.

Ich danke Christian Kaufhold für die Wegbereitung bei der quantenfeldtheoretischen Untersuchung von Zerfallsprozessen in Lorentzsymmetrie-verletzenden Theorien, wie zum Beispiel der Vakuum-Cherenkov-Strahlung. Elisabeth Kant danke ich dafür, dass sie die Grundlagen bereitet hat für den Teil der Dissertation über die Untersuchung der Compton-Streuung an modifizierten schwarzen Löchern.

Des Weiteren spreche ich Christian Kaufhold und Markus Schwarz für das aufmerksame Korrekturlesen der Arbeit, für nützliche Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge meinen Dank aus. Vielen Dank auch an Andreas Crivellin und Lars Hofer für einige hilfreiche Diskussionen bezüglich des einführenden Kapitels. Bei Shiyamala Thambyahpillai bedanke ich mich herzlich

für das Korrekturlesen der englischen Zusammenfassung und für hilfreiche Verbesserungsvorschläge.

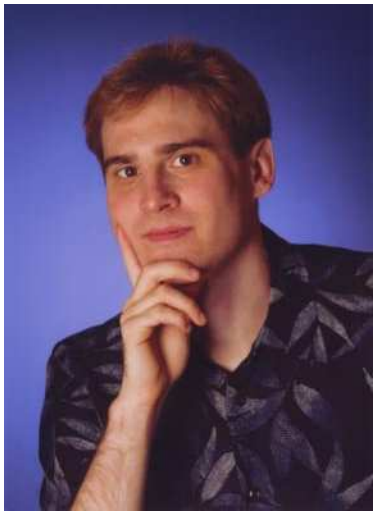
Thorsten Ohl danke ich für die Entwicklung des LaTeX-Pakets `FeynMP` [116], das ich stets und gerne zum Zeichnen von Feynman-Diagrammen benutze und ich danke `Data Becker` für die Bereitstellung einiger Cliparts.

Schlussendlich vielen Dank an meine Freunde, die mir in den letzten Jahren eine schöne Zeit bescherten, auf die ich sehr gerne zurückblicken werde.

Marco Schreck

Persönliche Daten

Privatadresse:	Auf dem Daubmann 21
	75045 Walzbachtal-Jöhlingen
Geschäftsadresse:	Karlsruher Institut für Technologie
	Institut für Theoretische Physik
	Postfach 6980
	76128 Karlsruhe
Telefonnummer:	0721/608 6364
Handynummer:	0173/754 9463
E-Mail-Adresse:	Marco.Schreck@gmx.de
Homepage:	www.marco-schreck.de
Familienstand:	ledig
Nationalität:	Deutsch
Geburtstag/-ort:	26. Oktober 1980 in Sinsheim
Eltern:	Alfred Schreck, Maschinenschlosser
	Hilde Schreck, Reinemachefrau



Werdegang

08/2007 - 10/2010	Doktorarbeit am Institut für Theoretische Physik des KIT Titel der Doktorarbeit: *Untersuchungen zur Lorentzsymmetriebrechung in der modifizierten Maxwell-Theorie* Referent: Professor F. R. Klinkhamer (KIT) Korreferent: Professor C. Lämmerzahl (Universität Bremen)
07/2006 - 06/2007	Diplom in Physik (mit Auszeichnung) Diplomiert am Institut für Theoretische Teilchenphysik der Universität Karlsruhe Thema der Diplomarbeit: *Hadronischer Higgszerfall bis* $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ Referent: Professor M. Steinhauser (Universität Karlsruhe)
10/2001 - 06/2007	Physikstudium auf Diplom an der Universität Karlsruhe
07/2000 - 06/2001	Wehrdienst (beim Sanitätsdienst)
2000	Abitur (Durchschnitt: 1,2)
09/1991 - 06/2000	Gymnasium Eppingen
09/1987 - 08/1991	Grund- und Hauptschule Kirchardt