

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: PHYSIK JENSEITS DES STANDARDMODELLS

Prof. Dr. Nierste

Vorlesung Wintersemester 2007/2008

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 14. August 2009

Mitschrieb der Vorlesung PHYSIK JENSEITS DES STANDARDMODELLS
von Herrn Prof. Dr. NIERSTE im Wintersemester 2007/2008
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung des Standardmodells	5
1.1	Zusammenfassung	5
1.2	Appelquist-Carrazone-Theorem (Entkopplungstheorem)	13
1.2.1	Beispiele	13
1.3	Symmetrien des Standardmodells	16
2	Custodiale SU(2)	19
2.1	Das Standardmodell als effektive Theorie	21
2.2	t'Hooft'sches Natürlichkeitsprinzip	22
3	Symmetrien und Anomalien	23
3.1	Beispiel für eine globale (also erlaubte) Anomalie	26
3.2	Beispiel: masselose QCD	27
3.3	Exkursion: Ward-Identitäten und Renormierbarkeit	28
3.4	Die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie (ABJ-Anomalie)	29
3.4.1	Anomaliecheck des Standardmodells	32
3.4.2	Ladungsquantisierungsproblem des Standardmodells	35
3.4.3	Drei Bemerkungen zu Anomalien	35
4	Das Zwei-Higgs-Dublett-Modell	39
4.0.4	Typ-I-2-HDM	40
4.0.5	Typ-II-2-HDM	40
4.1	Higgs-Freiheitsgrade des 2HDM	41
4.1.1	Beispiel: H^\pm -Kopplungen im Typ-II-Modell	43
4.1.2	Higgs-Massenmatrix	44
4.1.3	Bemerkungen zum Potential	45
4.1.4	Zusammenfassung	48
5	Große vereinheitlichte Theorie	51

Kapitel 1

Wiederholung des Standardmodells

1.1 Zusammenfassung

Im Standardmodell gibt es die SU(2)-Dubletts

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}.$$

Diese transformieren sich durch

$$\psi_j \mapsto [\exp(i\alpha_a I^a)]_{jk} \psi_k = \left[\exp\left(i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2}\right) \right]_{jk} \psi_k \text{ mit } j, k \in \{1, 2\} \quad (5)$$

und den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die Summe über a laufe von 1 bis 3. Die SU(3)-Tripletts

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L^r \\ u_L^g \\ u_L^b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R^r \\ u_R^g \\ u_R^b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_L^r \\ d_L^g \\ d_L^b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_R^r \\ d_R^g \\ d_R^b \end{pmatrix} \quad (7)$$

transformieren wie

$$\psi_j \mapsto [\exp(i\alpha_a T^a)]_{jk} \psi_k = \left[\exp\left(i\alpha_a \frac{\lambda^a}{2}\right) \right]_{jk} \psi_k$$

mit den Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & \\ & 0 \end{pmatrix} \text{ f\"ur } j = 1, 2, 3$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sigma^1 & \\ & & \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sigma^2 & \\ & & \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Die Fermionen der zweiten und dritten Generation haben dieselben Quantenzahlen in (2). Die unterschiedlichen Quantenzahlen f\"ur links- und rechtsh\"andige Felder in (2) verbieten **Dirac-Massenterme**

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}_L\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_L,$$

denn beispielsweise ist $\bar{e}_R e_L$ nicht SU(2)-invariant. **Majorana-Massenterme**

$$m(\bar{\psi}^c \psi + \bar{\psi}\psi^c) \text{ mit } \psi^c = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^\top$$

sind nicht erlaubt wegen $Y \neq 0$ in (2), denn mit

$$\psi_y^c \xrightarrow{(4)} \exp(-i\varphi_y)\psi_y^c$$

folgt:

$$\bar{\psi}^c \psi \xrightarrow{(4)} \exp(2i\varphi_y) \bar{\psi}^c \psi \neq \bar{\psi}^c \psi$$

G_{SM} in (1) ist geeicht. $\varphi = \varphi(x)$ in (1) und $\alpha_a = \alpha_a(x)$ in (5), (6) führt auf die kovariante Ableitung:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 B_\mu Y - ig_2 W_\mu^a I^a - ig_3 A_\mu^a T^a$$

mit

$$I^a \psi = \begin{cases} \sigma^a/2\psi & \text{für Dubletts } \psi \\ 0 & \text{für Singulets } \psi \end{cases}$$

und

$$T^a \psi = \begin{cases} \lambda^a/2\psi & \text{für Tripletts } \psi \\ 0 & \text{für Singulets } \psi \end{cases}$$

Elemente der Lie-Gruppen $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ lassen sich schreiben als $\exp(i\alpha_a T^a)$ mit reellen Parametern α_a und hermiteschen Matrizen T^a und zwar $T^a = \mathbf{1}$, $\sigma^a/2$, $\lambda^a/2$. Sie bilden die Lie-Algebren

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (10)$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc} . Für die $u(1)$ gilt $f^{abc} = 0$; also handelt es sich um eine abelsche Gruppe, da alle Elemente miteinander vertauschen. Für die $su(2)$ ist $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$, wobei ε^{abc} der Levi-Civita-Tensor ist. (Die zu einer Lie-Gruppen gehörige Lie-Algebra wird mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)

Jeder Satz von hermiteschen $n \times n$ -Matrizen T_R^a mit $[T_R^a, T_R^b] = if^{abc} T_R^c$ bildet eine Darstellung der **Lie-Algebra** (10). Die Matrizen T_G^a mit

$$[T_G^a]_{bc} = f^{abc} \quad (11)$$

bilden die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra. Die Eichbosonen $W^{\mu,a}$ leben in der adjungierten Darstellung der $SU(2)$:

$$W^{\mu,a} \mapsto W^{\mu,b} = [\exp(i\alpha_a T_G^a)]_{bc} W^{\mu,c} \text{ mit } [T_G^a]_{bc} = \varepsilon^{abc}$$

Die Gluonen $A^{\mu,a}$ leben in der adjungierten Darstellung der $SU(3)$. Für die $SU(2)$ gilt $\dim[T_G] = 3$, für die $SU(3)$ $\dim[T_G] = 8$ und allgemein $\dim[T_G] = N^2 - 1$.

Eichkopplungen (mit (2)) in G_{SM} -invarianter Schreibweise:

Feldstärke-Tensor $F_{\mu\nu}^a$:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \text{ für } g = g_1, g_2 \text{ oder } g_3 \quad (16)$$

Für die $U(1)$ gilt

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (17)$$

und für die $SU(N)$:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (18)$$

Speziell für die SU(2) ist $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$ und somit $F_{\mu\nu}^a = W_{\mu\nu}^a$. Für die SU(3) ist $F_{\mu\nu}^a = G_{\mu\nu}^a$. Für eine SU(N)-Eichtheorie gilt

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^a T^a F^{\mu\nu, b} T^b) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} \quad (19)$$

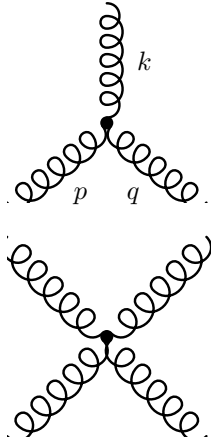
mit der Normierungskonvention

$$\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (20)$$

Der Vorfaktor 1/2 wird auch als Dynkin-Index bezeichnet. Speziell für das Standardmodell gilt also

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu, a} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu, a}. \quad (21)$$

$\mathcal{L}_{\text{eich}}$ erzeugt die kinetischen Terme der Eichbosonen und die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung und der Gluonen. Schauen wir uns die Selbstwechselwirkung der SU(3)-Eichbosonen an:



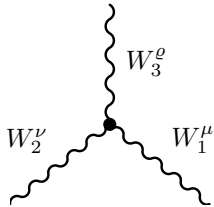
$$: g f^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu]$$

$$: -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + (b, \nu) \leftrightarrow (c, \rho) + (b, \nu) \leftrightarrow (d, \sigma)]$$

Für $N = 2$ vereinfacht sich (23) etwas wegen

$$f^{abe} f^{cde} = \varepsilon^{abe} \varepsilon^{cde} = \delta_{ac} \delta_{ba} - \delta_{ad} \delta_{bc}$$

und (22) hat als einzigen nichtverschwindenden Vertex:



$$: g_2 [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + \dots]$$

Die Eichinvarianz verbietet Massenterme $M_W^2, W_\mu^a W^{\mu, a}$ für die Eichbosonen. Der Higgsmechanismus führt zur Brechung der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (L : links, Y : Hyperladung) zur $U(1)_{\text{em}}$. Damit werden drei Eichbosonen massiv. Die drei Goldstonebosonen werden zu longitudinalen Freiheitsgraden der massiven Eichbosonen W^+, W^- und Z . Higgs-Dublett:

$$\Phi(x) = \Phi_{Y=1/2}(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (24)$$

Das Minimum des Higgspotentials

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \text{ mit } \lambda, \mu > 0 \quad (25)$$

liegt bei

$$\Phi^\dagger \Phi =: v^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \text{ mit } v > 0 \quad (26)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt:

$$\Phi_{\text{min}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (27)$$

und dann gilt:

$$\phi^0(x) = v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} + i \frac{G^0(x)}{\sqrt{2}} \text{ und } \phi^+(x) =: G^+(x) \quad (28)$$

$h(x)$ beschreibt das physikalische Higgs-Boson. Wegen

$$Y \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \neq I_w^a \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

wobei I_w^a der schwache Isospin ist, bricht der Vakuumerwartungswert in (27) $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$. Mit $Q := Y + I_w^3$ gilt:

$$Q \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}_{y=1_2} = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sigma^3 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Damit ist also das Vakuum ungeladen bezüglich $U(1)_{\text{em}}$ und Q erzeugt die ungebrochene $U(1)_{\text{em}}$. Die Higgs-Lagrangedichte ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_\phi = [D_\mu \Phi^\dagger][D^\mu \Phi] - V(\Phi)$$

Der kinetische Anteil $[D_\mu \Phi^\dagger][D^\mu \Phi]$ erzeugt die Massenterme für die Eichbosonen W^\pm und Z . Mit dem **Weinberg-Winkel** ϑ_w

$$\tan \vartheta_w = \frac{g_1}{g_2}$$

sind die Photon- und Z-Boson-Felder gegeben durch:

$$A^\mu = \cos \vartheta_w B^\mu + \sin \vartheta_w W_\mu^3, \quad Z^\mu = -\sin \vartheta_w B^\mu + \cos \vartheta_w W_\mu^3 \quad (32)$$

Für die elektrische Ladung gilt:

$$Q \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = I_w^3 \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iW_\mu^2 \\ iW_\mu^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

W^3 ist ungeladen. $W_\mu^\pm = W_\mu^1 \mp iW_\mu^2$ sind Eigenzustände zu Q :

$$QW_\mu^\pm = \pm W_\mu^\pm$$

Die Massen der Eichbosonen sind gegeben durch

$$M_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{2} \text{ und } M_Z^2 = \frac{g_2^2 v^2}{2} \frac{1}{\cos^2 \vartheta_w} \quad (34)$$

womit also gilt:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \vartheta_w \quad (35)$$

Die elektrische Ladung ist gegeben durch

$$e = g_1 \cos \vartheta_w = g_2 \sin \vartheta_w \quad (36)$$

Wegen (2) brechen Fermion-Massenterme $-m_f \bar{f}_R f_L$ die $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Somit müssen die Massen proportional zum Symmetriebrechungsparameter v sein: $m_f \sim v$. Diese Tatsache „schützt“ die Kleinheit der Masse. Es gilt beispielsweise nicht $m_f \sim M_{\text{Planck}}$. Yukawa-Kopplungen:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^c + \mathcal{L}_Y^u + \mathcal{L}_Y^d \quad (37)$$

$$\mathcal{L}_Y^e = - \sum_{j,k=1}^3 y_{jk}^e \bar{L}_j \Phi e_{R,k} + \text{h.c.} \quad (38)$$

wobei j und k Generationenindizes sind. Nur der Yukawa-Sektor kann Generationen unterscheiden! Generationen haben alle die gleiche Quantenzahlen, aber unterschiedliche Masse.

$$\mathcal{L}_Y^d = - \sum_{j,k=1}^3 y_{jk}^d \bar{Q}_j \Phi^d d_{R,k} + \text{h.c.} \quad (39)$$

$$\mathcal{L}_Y^u = - \sum_{j,k=1}^3 y_{jk}^u \bar{Q}_j \Phi^c u_{R,k} + \text{h.c.} \quad (40)$$

mit

$$\Phi^c = \varepsilon \Phi^* = \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\min}^c = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

wobei

$$\varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Φ^c transformiert auch wie die $SU(2)$. (Wegen der symplektischen Struktur der $SU(2)$ gilt dies nicht für andere $SU(N)$). y_{jk}^c , y_{jk}^u und y_{jk}^d sind 3×3 -Matrizen im Generationenraum. Schauen wir uns zur Wiederholung noch einmal die Generationen an:

u	c	t
d	s	b
e	μ	τ
ν_e	ν_μ	ν_τ

Es gibt 2×15 Freiheitsgrade pro Generation: $u_{L,R}^{\text{rgb}}$, $d_{L,R}^{\text{rgb}}$, $e_{L,R}$, ν_e (15 Weyl-Spinoren bzw. chirale Dirac-Spinoren).

Der Eichsektor hat eine globale $[U(3)]^5$ -**Flavoursymmetrie**. Mit $U^Q \in U(3)$ sind \mathcal{L}_F in (12), $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ in (19) und \mathcal{L}_ϕ in (30) invariant unter $Q_j \mapsto U_{jk}^Q Q_k$ (43). Analog gilt dies für $d_{R,j}$, $u_{R,j}$, L_j und $e_{R,j}$. \mathcal{L}_Y bricht diese Symmetrie explizit durch die Yukawa-Kopplungen y_{jk}^e , y_{jk}^d , y_{jk}^u . Ausnutzung der gebrochenen Symmetrien: $L \mapsto U_{jk}^L L$, $l_{R,j} \mapsto U_{jk}^R l_{R,k}$ bewirkt (mit $\bar{L} = (\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3)$ usw.):

$$\mathcal{L}_Y^l = -\bar{L} y^l \phi l_R + \text{h.c.} \xrightarrow{(44)} -\bar{L} (U^L)^\dagger y^l U^R \phi l_R + \text{h.c.}$$

Durch geeignete Wahl von U^L , U^R ist $\hat{y}^l = \text{diag}(y_e, y_\mu, y_\tau)$ (45). Hieraus folgt, dass Lepton-Yukawa-Kopplungen o.B.d.A. diagonal sind in einer geeigneten Basis im Flavourraum. Kommen wir nun zu den Quarks. Mit den $U(3)$ -Transformationen $Q \mapsto S_{d,R}^Q Q$, $d_R \mapsto S^{d,R} d_R$ und $u_R \mapsto S^{u,R} u_R$ (46) kann man y^u diagonalisieren.

$$\hat{y}^u = (S^Q)^\dagger y^u S^{u,R} = \text{diag}(y_u, y_c, y_t) \text{ mit } y_u, y_c, y_t \geq 0 \quad (47)$$

Mit geeigneten $S^{d,L}$, $S^{d,R}$ ergibt sich:

$$(S^Q)^\dagger y^d S^{d,R} = \underbrace{(S^Q)^\dagger S^{d,L}}_{=:V} \underbrace{(S^{d,L})^\dagger y^d S^{d,R}}_{\hat{y}^d} = V \cdot \hat{y}^d \quad (48)$$

mit $\hat{y}^d = \text{diag}(y_d, y_s, y_b)$, $y_{d,s,b} > 0$ und der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix V . Mit (27) finden wir aus (38) - (40) mit den **Massenmatrizen**

$$\widehat{M}^l = v \hat{y}^l, \quad \widehat{M}^u = v \hat{y}^u, \quad M^d = v V \hat{y}^d \quad (49)$$

die Fermion-Massenterme

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = -\bar{e}_L \widehat{M}^l l_R - \bar{d}_L M^d d_R - \bar{u}_L \widehat{M}^u u_R + \text{h.c.} \quad (50)$$

Um M^d zu diagonalisieren, transformieren wir $d_L \mapsto V d_L$ (51), so dass $\bar{d}_L M^d d_R \mapsto \bar{d}_L \widehat{M}^d d_R$ (52) mit $\widehat{M}^d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$ (53). (51) vertauscht nicht mit $SU(2)_L$ -Transformationen. Die Fermionfelder in

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = -\bar{l}_L \widehat{M}^l l_R - \bar{d}_L \widehat{M}^d d_R - \bar{u}_L \widehat{M}^u u_R + \text{h.c.}$$

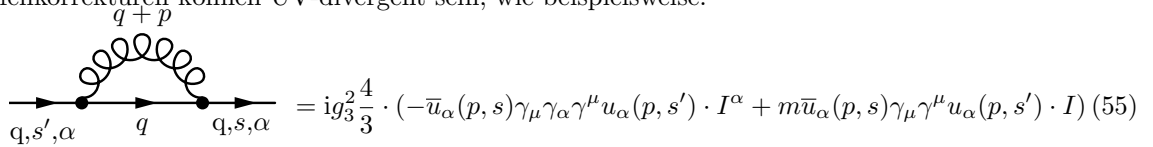
heißen **Masseneigenzustände**. Die Fermionfelder in (37) bis (50) sind **Wechselwirkungseigenzustände**. Sie sind nur bis auf U(3)-Transformationen (44), (46) eindeutig. Die Felder in (50) bilden die **U-Basis**, in der die $U_{L,j}$ -Felder gleichzeitig Wechselwirkungs- und Masseneigenzustände sind. In der **D-Basis**, die man aus der U-Basis via $Q_L \mapsto VQ_L$ gewinnt, ist anstelle von M^u nur M^d **diagonal**. Schließen wir nun die Konstruktion der Lagrangedichte ab und blicken auf das Ergebnis:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\text{eich}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_Y \tag{54}$$

\mathcal{L}_{SM} ist die allgemeinste Lagrangedichte, die folgende Anforderungen erfüllt.

- 1.) $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie
- 2.) Teilcheninhalt:
 - a.) Fermionen mit Spin 1/2 und Quantenzahlen in (2)
 - b.) Skalarfeld Φ mit $I_w = 1/2$ und $Y = 1/2$
- 3.) Renormierbarkeit: keine Kopplungen mit negativer Dimension

Schleifenkorrekturen können UV-divergent sein, wie beispielsweise:



$$= ig_3^2 \frac{4}{3} \cdot (-\bar{u}_\alpha(p, s) \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu u_\alpha(p, s') \cdot I^\alpha + m \bar{u}_\alpha(p, s) \gamma_\mu \gamma^\mu u_\alpha(p, s') \cdot I) \tag{55}$$

Gearbeitet wird in der Feynman-Eichung. Der Faktor $4/3$ rührt von $T^a T^a = 4/3 \mathbf{1}$ her. m ist die Quarksmasse. Zu beachten ist, dass über α nicht summiert wird. Die zugehörigen Schleifenintegrale sind gegeben durch:

$$I^\alpha = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^{D_i}} \frac{q^\alpha}{(q+p)^2 [q^2 - m^2]} \tag{56}$$

$$I = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^{D_i}} \frac{1}{(q+p)^2 [q^2 - m^2]} \tag{57}$$

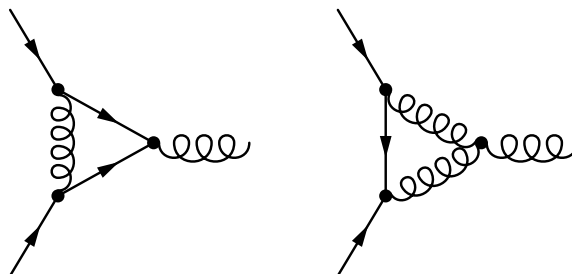
UV-Divergenzen findet man mit dem **Power-Counting**. Die Massendimension der Schleifenintegrale führt zum „oberflächlichen Divergenzgrad“ $[I^\alpha] = D + 1 - 4 = D - 3$ und $[I] = D - 4$. Hinreichend für UV-Konvergenz ist, dass **alle** Schleifen des betrachteten Diagramms negative Dimension haben. Beispielsweise hat das ganze Diagramm und der Teilgraph negative Dimension, aber der Teilgraph () ist in vier Dimensionen divergent (Massendimension $D-4 = 0$). Physikalisch trägt die **Selbstenergie** in (55) zur Masse des Quarks bei und zwar über den zweiten Term mit dem Schleifenintegral I . Die Divergenz von I kann über eine Redefinition von m in der Lagrangedichte absorbiert werden (Massenrenormierung).

$$\mathcal{L}_{fm} \supset -m^{(0)} \bar{q}q = -Z_m m = -m \bar{q}q + m(1 - Z_m) \bar{q}q \tag{58}$$

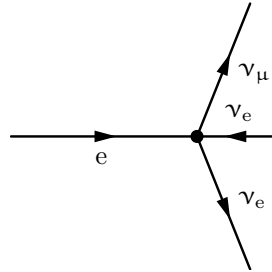
$m^{(0)}$ ist die unrenormierte Masse. Man bezeichnet $m(1 - Z_m)$ auch als Gegenterm (Counterterm). Die Renormierungskonstante ist eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten:

$$Z_m = 1 + \frac{g_3^2}{16\pi^2} Z_m^{(1)} + \left(\frac{g_3^2}{16\pi^2} \right)^2 Z_m^{(2)} + \dots \tag{59}$$

$Z_m^{(1)}, Z_m^{(2)}, \dots$ sind divergent. Man kann beliebige endliche Anteile von I in den Gegenterm $(1 - Z_m)m$ absorbieren. Diese Wahl definiert das **Renormierungsschema**. Ebenso kann man mit einer **Renormierung der Kopplungskonstanten** $g^{(0)} = Z_g g$ (60) Divergenzen von **Vertexdiagrammen** auffangen.

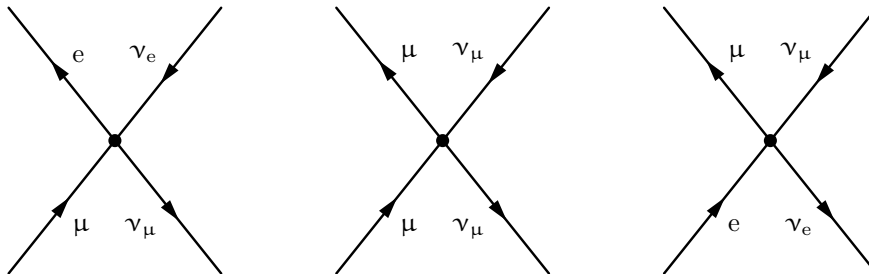


Physikalisch bedeutet dies, dass Ladungen durch Quanteneffekte abgeschirmt werden. Schließlich wird die Divergenz aus I^α in (55) durch $q^{(0)} = Z_q q$ (61), also eine Reskalierung der Quarkfelder, absorbiert. (61) heißt **Feldrenormierung** oder **Wellenfunktionsrenormierung**. (Analog zu (61) renormiert man auch die Eich- und Higgsfelder.) Enthält \mathcal{L} nur Kopplungen mit nichtnegativer Dimension, so ist die Theorie **renormierbar**. Das heißt, alle Divergenzen können in Parameter der Lagrangedichte absorbiert werden. Beispiel einer nicht renormierbaren Theorie ist die Fermi-Theorie für Elektronen und Myonen:

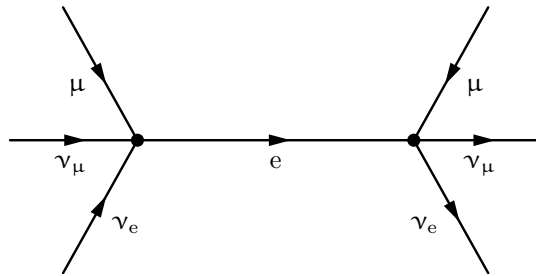


Es gilt $[G_F] = -2$.

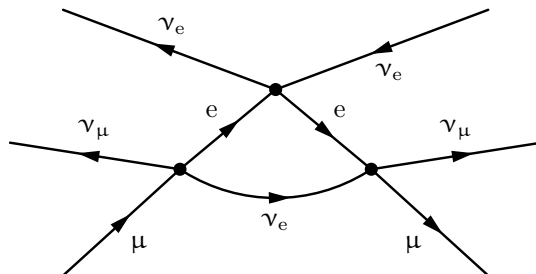
$$\mathcal{L} \supset -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{l, l' = e, \mu \\ l \neq l'}} \bar{l}_L \gamma_\mu \nu_e \bar{l}' \gamma^\mu \nu_{l'} + \text{h.c.}$$



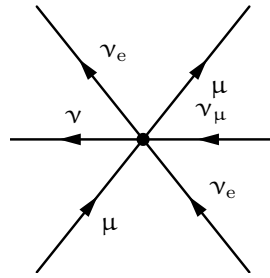
Baumgraphenniveau:



1-Schleifen-Niveau:



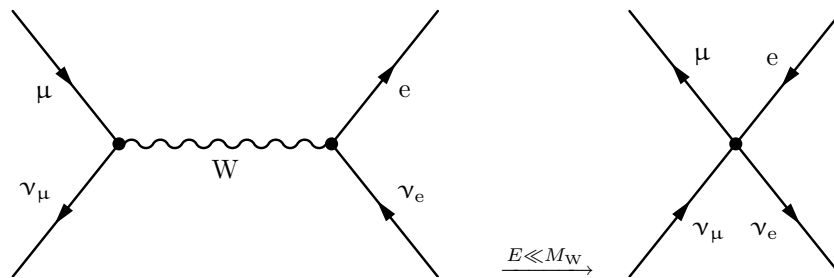
Der Gegenterm hat die Form



und beschreibt eine neue Kopplung. Je mehr Kopplungen auftreten, umso höher ist der Divergenzgrad der Schleifen.

- Jede n -Punkt-Greenfunktion wird in irgendeiner Ordnung (von G_F) divergent.
- Damit werden unendlich viele Gegenterme benötigt, was dazu führt, dass die Theorie keine physikalische Aussagekraft mehr besitzt.

Jedoch beschreibt die Fermi-Theorie erfolgreich die schwache Wechselwirkung bei niedrigen Energien E .

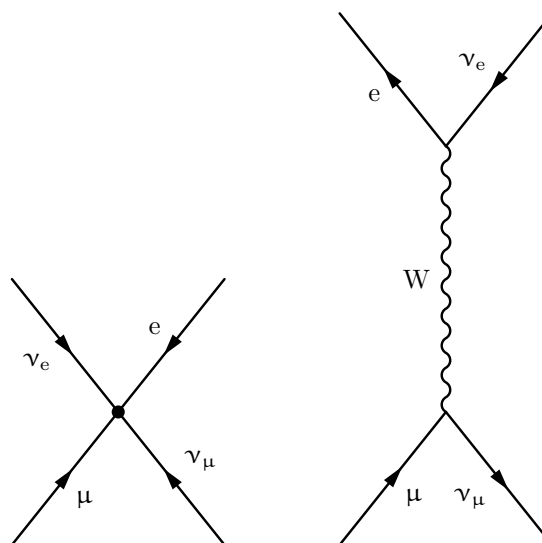


$$\frac{1}{q^2 - M_W^2} \rightarrow \frac{1}{M_W^2} \text{ mit } \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} \quad (62)$$

Nicht renormierte Wechselwirkungen sind akzeptabel als **effektive Theorie** für kleine Energien, im Beispiel für $E \ll 1/\sqrt{G_F}$. Die Sprechweise ist hierbei wie folgt:

$$\mathcal{L} \supset - \underbrace{\frac{G_F}{\sqrt{2}}}_{\text{dim}=2} \underbrace{\bar{\mu}_L \gamma_\mu \nu_\mu \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_e}_{\text{„Dimension-6-Term“}} + \text{h.c.}$$

Die Fermi-Theorie ist eine effektive Theorie des W-Boson-Austausches.



$$\frac{1}{M_W^2} \quad \frac{1}{q^2 - M_W^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} 0$$

Das zweite Diagramm besitzt ein besseres UV-Verhalten.

1.2 Appelquist-Carrazone-Theorem (Entkopplungstheorem)

Betrachte eine Lagrangedichte \mathcal{L} mit großem Massenparameter M . $\mathcal{L}_{\text{leicht}}$ enthält nur Felder mit Massen $m \ll M$ und

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{leicht}} + \mathcal{L}_M \tag{63}$$

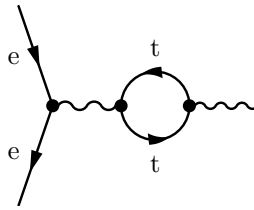
\mathcal{L}_M und $\mathcal{L}_{\text{leicht}}$ seien renormierbar. Die Niederenergiephysik ($E \ll M$) von \mathcal{L} wird dann reproduziert durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}'_{\text{leicht}} + \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots \tag{64}$$

wobei $\mathcal{L}'_{\text{leicht}}$ aus $\mathcal{L}_{\text{leicht}}$ durch eine Renormierung der Parameter hervorgeht und $\uparrow^{(d)}$ Kopplungen der Dimension d enthält, die proportional zu $1/M^{d-4}$ sind. Man kann \mathcal{L} so renormieren, dass $\mathcal{L}'_{\text{leicht}} = \mathcal{L}_{\text{leicht}}^{\text{ren}}$ ist. Renormierungsschemen mit dieser Eigenschaft heißen **Entkopplungsschemen**.

1.2.1 Beispiele

1.) Entkopplung des Top-Quarks von der QED; Messung des Proton-Elektron-Vertex



Die Schleife skaliert wie

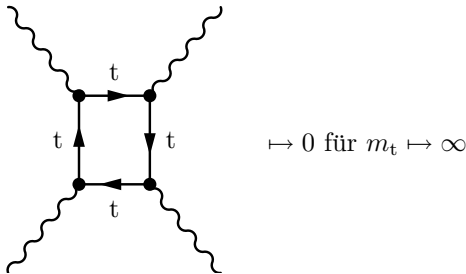
$$(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \ln\left(\frac{m_t^2}{g^2}\right) \not\rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } m_t \mapsto \infty$$

Der Gegenterm aus der Wellenfunktionsrenormierung

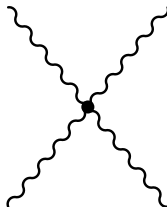


kann so angepasst werden, dass er au\u00dfer der Divergenz auch den $\ln(m_t^2/g^2)$ -Term weghebt (Entkopplungsschema, On-Shell-Schema). ($\mathcal{L}_{\text{leicht}}$ entspricht \mathcal{L}_{QED} ohne das Top-Quark.) m_t ist nicht messbar und verschwindet in δZ_t und letztendlich in der renormierten Kopplung e , die ein freier Parameter der QED ist.

Licht-Licht-Streuung:



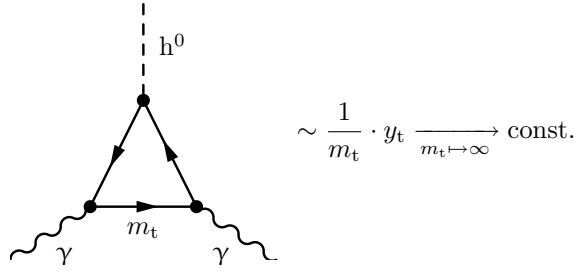
Damit handelt es sich bei



also um eine höher-dimensionale Kopplung.

2.) Nichtentkopplung des Top-Quarks vom Standardmodell:

a.) $m_t = y_t \cdot v \mapsto \infty$ bedeutet $y_t \mapsto \infty$.



Somit entkoppelt das Top-Quark nicht vom Yukawa-Sektor. Es existiert zu diesem Diagramm keinen Counterterm, da es einen Higgs-Photon-Photon-Vertex auf Baumgraphenniveau nicht gibt, weil das Photon masselos ist.

b.) Entfernt man das Top-Quark, so hat das b-Quark keinen SU(2)-Partner mehr. Die Niederenergie-theorie $\mathcal{L}'_{\text{leicht}}$ ist nicht SU(2)-invariant und damit nicht das Standardmodell. Die Top-Quark-Masse wurde präzise auf LEP-Präzisionsdaten vorhergesagt. Aus (a) folgt, dass auch eine vierte Generation nicht entkoppelt.

Das Fazit ist, dass eine fundamentale Feldtheorie renormierbar sein muss. Das Standardmodell ist renormierbar (und die allgemeine Theorie mit der vorgegebenen Symmetrie und dem Teilcheninhalt). Effekte neuer Theorien mit großer Masse M sind in Experimenten mit Energie $E \ll M$ nur über nichtrenormierbare Terme $\mathcal{L}^{(5)}$, $\mathcal{L}^{(6)}$ usw. sichtbar, also wie E/M , E^2/M^2 usw. unterdrückt. Diese Potenzen können mit Logarithmen multipliziert sein:

$$\frac{E}{M} \mapsto \frac{E}{M} \ln^n \left(\frac{E}{M} \right)$$

wenn der Term aus einem n -Schleifendiagramm stammt.

Man kann Modelle bauen der Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{NP}}$, wobei \mathcal{L}_{NP} „neue Physik“ beschreibt. Mit schweren Teilchen in \mathcal{L}_{NP} gilt für $E \ll M_{\text{NP}}$:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots$$

Physikalische Effekte, die von $\mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots$ herrühren, können in Präzisionsexperimenten entdeckt werden. Der „**modellunabhängige Zugang**“ ist, alle $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -invariante $\mathcal{L}^{(5)}$ - und $\mathcal{L}^{(6)}$ -Terme zu konstruieren und diese experimentell einzuschränken. Eine andere Möglichkeit neue Physik zu beschreiben, besteht darin, höhere Symmetrien von \mathcal{L} im Vergleich zu \mathcal{L}_{SM} zu fordern. Daraus ergeben sich Relationen zwischen den Parametern des Standardmodells. Betrachten wir hierzu als Beispiel die SU(5)-GUT-Theorie:

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$g \qquad g_3 \qquad g_2 \qquad g_1$$

U(1) beschreibt die relative Phasen zwischen den beiden Blöcken.

$$\mathcal{L}_{SU(5)} = \mathcal{L}_{\text{SM}}(\text{mit } g_1 = g_2 = g_3 = g) + \mathcal{L}_{\text{Rest}}$$

In $\mathcal{L}_{\text{Rest}}$ stecken Massen proportional zu $M_{\text{GUT}} \gg v$. Die Niederenergie-theorie bei der Energieskala $\mu = \mathcal{O}(v)$ wird beschrieben durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}'_{\text{SM}} + \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots \text{ mit } g'_j = gZ_j \tag{65}$$

und einer endlichen Renormierungskonstanten

$$Z_j = Z_j \left(\ln \left(\frac{M}{M_{\text{GUT}}} \right) \right)$$

g'_j hängt von der **Renormierungsskala** μ ab. Zunächst sei μ beliebig. Genauer:

$$g'_j(\mu) = g_j(M_{\text{GUT}}) \left[1 + \frac{g_j^2(M_{\text{GUT}})}{16\pi^2} \beta_0^{(j)} \ln \left(\frac{M}{M_{\text{GUT}}} \right) + \mathcal{O}(g_j^4) \right] \tag{66}$$

$\beta_0^{(j)}$ ist der erste Koeffizient der sogenannten β -Funktion. Der große Logarithmus (falls $\mu \ll M_{\text{GUT}}$) muss zu allen Ordnungen renormiert werden. Aus (66) folgt:

$$\mu \frac{dg_j'(\mu)}{d\mu} = \frac{dg_j'(\mu)}{d \ln(\mu)} = \frac{g_j'^3}{16\pi^2} \beta_0^{(j)} + \mathcal{O}(g_j^5) \quad (67)$$

(67) heißt Renormierungsgruppengleichung für $g_j'(\mu)$. $g_j'(\mu)$ wird auch als **laufende Kopplung** mit g_j als Anfangsbedingung bezeichnet. Warum die Kopplung läuft, lässt sich physikalisch durch Schleifenkorrekturen erklären, welche die Ladung abschirmen. Damit sind die g_1 , g_2 und g_3 unterschiedlich, da die β -Funktion verschieden ist. (66) und (67) gelten in Renormierungsschemen, in denen die Renormierungskonstanten Z_i **nicht** von den Massen abhängen (massenunabhängige Schemen). (Entkopplungsschemen haben diese Eigenschaft gerade nicht, weshalb man das Laufen hier noch nicht berechnen kann.) Ein in der Praxis wichtiges Beispiel ist das sogenannte $\overline{\text{MS}}$ -Schema, bei dem die Kombinationen

$$\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \text{ mit } \varepsilon = \frac{4-D}{2}$$

in die Z_i absorbiert werden.

Wir wollen nun die Renormierungsgruppengleichung für die Eichkopplungen

$$\alpha_j = \frac{g_j^2}{4\pi}, \quad a_j = \frac{\alpha_j}{4\pi} = \frac{g_j^2}{16\pi^2}$$

betrachten:

$$\frac{da_j}{d \ln(\mu)} = 2\beta_0^{(j)} a_j^2 + \mathcal{O}(a_j^3)$$

In der „Leading-Log-Näherung“ (ohne a_j^3 -Terme) ist deren Lösung gegeben durch

$$a_j(\mu) = \frac{a_j(\mu_0)}{1 - 2\beta_0^{(j)} a_j(\mu_0) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)} \quad (68)$$

Eine Entwicklung (mit $\mu_0 = M_{\text{GUT}}$) ergibt (66). Im Standardmodell gilt mit N_{gen} Generationen und N_{Higgs} Higgsdoublets:

$$\begin{aligned} \beta_0^{(1)} &= \frac{4}{3} N_{\text{gen}} + \frac{1}{10} N_{\text{Higgs}} = \frac{41}{10} \text{ für } N_{\text{gen}} = 3, N_{\text{Higgs}} = 1 \\ \beta_0^{(2)} &= -\frac{22}{3} + \frac{4}{3} N_{\text{gen}} + \frac{1}{6} N_{\text{Higgs}} = -\frac{19}{6} \\ \beta_0^{(3)} &= -11 + \frac{4}{3} N_{\text{gen}} = -7 \end{aligned} \quad (69)$$

g_2 und g_3 sind **asymptotisch frei**. Aus (68) folgt $a_j(\mu) \mapsto 0$ für $\mu \mapsto \infty$. Achtung: $\beta_0^{(1)}$ in (69) ist für die reskalierte $U(1)_Y$ -Kopplung

$$g_1' = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1$$

Die Normierung von $U(1)_Y$ -Kopplungen ist beliebig. Es gilt dann $g \mapsto \lambda g$ und $q \mapsto q/\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. (Es gibt keinen Grund dafür, warum $U(1)$ -Ladungen ganzzahlig sein sollen.) Die Normierung der $U(1)_Y$ -Kopplung ist festgelegt, sobald $U(1)_Y$ in eine nicht-abelsche Gruppe eingebettet ist. $g_1' = \sqrt{3/5} g_1$ ist die „SU(5)“-Normierung. (Ob sich Kopplungskonstanten treffen, hängt von der Normierung ab. Im Standardmodell können sie sich auch treffen, da die Normierung beliebig ist, aber dieses Treffen hat keine Bedeutung. Im MSSM treffen sie sich mit der obigen Normierung, aber dann nicht im Standardmodell.) Es gilt (hep-ph/0001257):

$$\alpha_1(M_Z) = 0,017, \quad \alpha_2(M_Z) = 0,034, \quad \alpha_3(M_Z) = 0,119 \pm 0,003$$

Für die Yukawa-Kopplungen

$$Y_k = \frac{y_k^2}{16\pi^2} \text{ mit } k = \tau, b, t$$

gilt in der Leading-Log-Näherung:

$$\begin{aligned}\frac{dY_t}{d\ln(\mu)} &= -Y_t \left(16a_3 + \frac{9}{2}a_2 + \frac{17}{10}a_1 - 9Y_t \right) \\ \frac{dY_b}{d\ln(\mu)} &= -Y_b \left(16a_3 + \frac{9}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_1 - 3Y_t \right) \\ \frac{dY_\tau}{d\ln(\mu)} &= -Y_\tau \left(\frac{9}{2}a_2 + \frac{9}{2}a_1 - 6Y_t \right)\end{aligned}\quad (70)$$

Bottom- und τ -Yukawa-Kopplung treffen sich ungefähr bei derselben Skala wie g_2 und g_3 . Ist $M_{\text{GUT}} \sim 10^{15}$ bis 10^{16} GeV? Die Kopplungen des Standardmodells weisen auf neue Physik hin und zwar auf eine Vereinheitlichung in eine einfache Eichgruppe wie beispielsweise die SU(5). τ und b liegen anscheinend im selben Symmetriemultiplett.

1.3 Symmetrien des Standardmodells

1.) Eichsymmetrie (Input): $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

2.) Globale Symmetrien:

Der Eichsektor hat eine globale $[U(3)]^5$ -Flavoursymmetrie (43), (44). Die Yukawa-Kopplungen brechen sie zu $[U(1)]^4$.

– Baryon-Zahl $U(1)_B$:

$$Q_i \mapsto \exp\left(i\frac{Q}{3}\right) Q_i, u_{Ri} \mapsto \exp\left(i\frac{Q}{3}\right) u_{Ri}, d_{Ri} \mapsto \exp\left(i\frac{Q}{3}\right) d_{Ri}\quad (71)$$

– Lepton-Zahl $U(1)_{L_j}$

$$L_j \mapsto \exp(iQ_j)L_j, e_{Rj} \mapsto \exp(iQ_j)e_{Rj}\quad (72)$$

Diese Quantenzahlen sind getrennt erhalten für jede Generation.

Diese $[U(1)]^4$ -Symmetrie ist „zufällig“; sie ist Konsequenz der Quantenzahlen der SM-Felder und der Forderung der Renormierbarkeit. Die (Gesamt-)Leptonzahl ist $L = L_1 + L_2 + L_3$. $B - L$ ist erhalten, aber $B + L$ ist eine sogenannte **anomale Symmetrie**, die durch Quanteneffekte gebrochen ist. Für Niederenergieexperimente (terrestrische Experimente) ist $(B + L)$ -Verletzung irrelevant, nicht jedoch für die Baryogenese im frühen Universum. Angriffspunkt neuer Physik ist die Leptonzahlverletzung, die bei Neutrinooszillationen auftritt ($(B + L)$ -Verletzung nicht-perturbativ im Standardmodell).

Zurück zur $U(3)^5$:

$$\begin{aligned}Y_u &= \begin{pmatrix} y_u & 0 & 0 \\ 0 & y_c & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ da } y_c \approx 0,01 \\ Y_d &= V \cdot \begin{pmatrix} y_d & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} \text{ mit } y_b \approx 0,03\end{aligned}$$

Ebenso gilt $y^e \approx \text{diag}(0,0,0)$. In der Näherung, dass nur $y_t \neq 0$ betrachtet wird, besteht \mathcal{L}_Y nur aus $\mathcal{L}_Y \approx -y_t(\bar{t}_L, \bar{b}_L)\phi t_R$ (73) und die $U(3)$ -Symmetrie von L_j, l_{Rj}, d_{Rj} bleiben ungebrochen. Mit (73) bleiben für die ersten beiden Generationen noch $U(2)$ -Symmetrien der Q_j und U_{Rj} übrig. Die Baryonzahl der dritten Generation B_3 ist in (73) ebenfalls ungebrochen. U-Basis:

$$Y_d = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_d & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 \\ 0 & 0 & 0y_b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 10^{-4} & 10^{-4} \\ 0 & 10^{-3} & 10^{-3} \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}\quad (74)$$

$y_t \approx 1$ bricht die Symmetrie des Eichsektors:

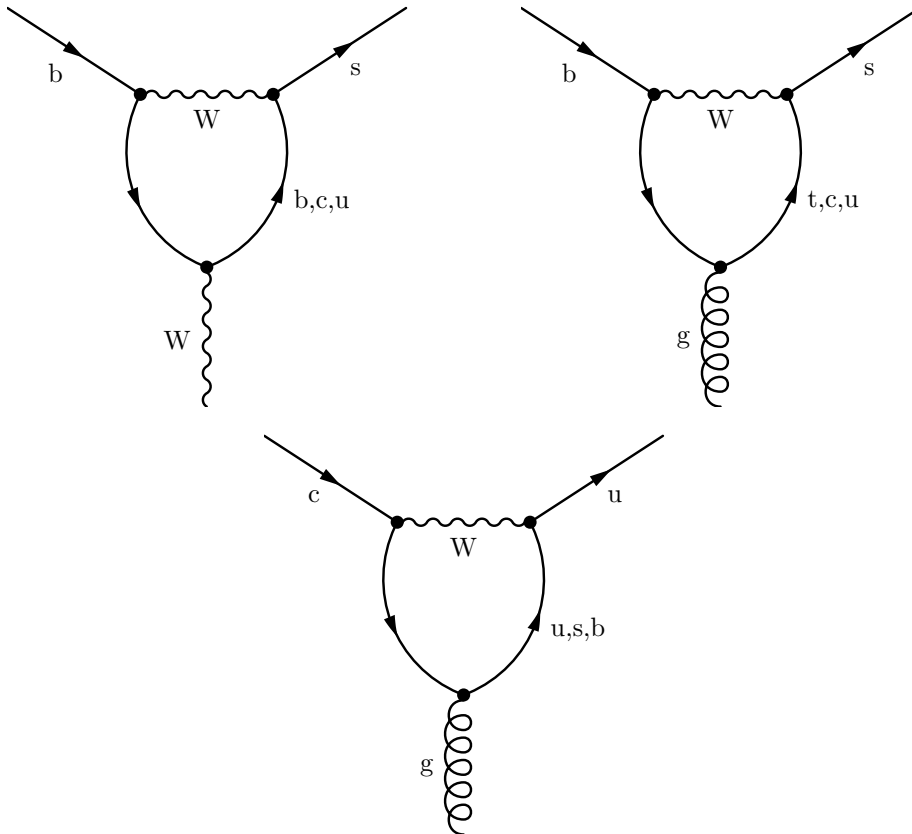
$$[U(3)]^5 \xrightarrow{y_t \approx 1} [U(3)]^3 \times [U(2)]^2 \times U(1)_{B_3} \xrightarrow{y_b \neq 0} [U(3)]^2 \times [U(2)]^3 \times U(1)_{B_3} \xrightarrow{y_t \neq 0} [U(2)]^5 \times U(1)_{B_3} \times U(1)_{L_3} \quad (75)$$

Die letztere ist eine gute Symmetrie zur Genauigkeit von $y_c \approx 10^{-2}$. Im Symmetrielim von (75) gibt es keine Generationen-ändernden Übergänge. Deswegen stellt Flavourphysik ein mächtiges Instrument dar, um neue Physik zu messen. Schließlich gibt es „partielle Symmetrien“, die nur ein Teil von \mathcal{L}_{SM} hat, wie beispielsweise die $[U(3)]^5$.

I.) Der Sektor von \mathcal{L}_{SM} , der Übergänge zwischen Quarks gleicher Ladung beschreibt, enthält keine Flavourverletzung (Abwesenheit von FCNCs, also „flavour-changing neutral currents“). Dies bedeutet, dass es in \mathcal{L}_{SM} keine $\bar{q}_{L/R}\gamma_\mu q'_{L/R} \cdot \{A_\mu, Z_\mu, A_\mu^a\}$ - und $\bar{q}_{L/R}q'_{R/L}k^0$ -Kopplungen mit $q \neq q'$! Das bedeutet, dass der Neutrale-Strom-Sektor der Quarks eine $[U(1)]^6$ -Symmetrie hat. Dieser Zufall resultiert aus

- a.) identische $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Quantenzahlen der drei Generationen: $U^\dagger i \not{D} U = i \not{D}$. Würde man eine vierte Generation theoretisch einführen, so würde U nicht mehr mit der kovarianten Ableitung vertauschen.
- b.) dem Teilcheninhalt von nur einem Higgs-Dublett.

Der Geladene-Strom-Vektor erzeugt FCNCs über Schleifen.



Diese Schleifen sind zusätzlich durch kleine CKM-Elemente unterdrückt und verschwinden im Limes gleicher Fermionmassen (GIM-Mechanismus). Das heißt, die kleinen Yukawa-Kopplungen unterdrücken FCNCs weiter.

Kapitel 2

Custodiale SU(2)

Der Name kommt vom lateinischen Wort Custos und bedeutet Wächter. Gehen wir aus von Gleichung (30):

$$\mathcal{L}_\phi = [D_\mu \phi^\dagger][D^\mu \phi] - V[\phi] \text{ mit } V(\phi) \stackrel{(25)}{=} -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

Mit (9) ergibt sich:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{ig_3}{2} \sigma^a W_\mu^a - \frac{ig_1}{2} B_\mu \right) \phi$$

Aus

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi^c = \varepsilon \Phi^* = \begin{pmatrix} ((\phi^0)^*) \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (76)$$

kann man ein **Bidublett** bilden.

$$\widehat{\Phi} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi^c, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ((\phi^0)^*) & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Unter $SU(2)_L$ (mit $U_L \in SU(2)_L$) und $\exp(i\varphi) \in U(1)_Y$ gilt:

$$\widehat{\Phi} \mapsto U_L \widehat{\Phi} \quad (78)$$

$$\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} \cdot \exp\left(-\frac{i}{2} \sigma_3 \varphi\right) \text{ mit } \exp\left(-\frac{i}{2} \sigma_3 \varphi\right) = \begin{pmatrix} \exp(-i/2\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i/2\varphi) \end{pmatrix} \quad (79)$$

(30) wird zu

$$\mathcal{L}_\phi = \text{Tr}[(D_\mu \widehat{\Phi})^\dagger (D^\mu \widehat{\Phi})] - V(\widehat{\Phi}) \quad (80)$$

mit

$$V(\widehat{\Phi}) = -\mu^2 \text{Tr}(\widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi}) + \lambda(\text{Tr}(\widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi}))^2 \quad (81)$$

und

$$D_\mu \widehat{\Phi} = \partial_\mu \widehat{\Phi} - i \frac{g_3}{2} \sigma^a W_\mu^a \widehat{\Phi} + i \frac{g_1}{2} B_\mu \widehat{\Phi} \sigma_3 \quad (82)$$

Die dritte Paulimatrix

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

taucht auf, weil $\varepsilon \phi^*$ und ϕ entgegengesetzte Hyperladung haben. Im Limes $g_1 = 0$ hat \mathcal{L}_ϕ in (80) eine globale $SU(2)$ -Symmetrie. Mit $U_R \in SU(2)_R$ und $\widehat{\Phi} \mapsto \widehat{\Phi} U_R^\dagger$ (83) ist $D_\mu(\widehat{\Phi} U_R^\dagger) = (D_\mu \widehat{\Phi}) U_R^\dagger$ (84), so dass

$$V(\widehat{\Phi}) \mapsto -\mu^2 \text{Tr}(U_R \widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi} U_R^\dagger) + \lambda[\text{Tr}(U_R \widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi} U_R^\dagger)] = -\mu^2 \text{Tr}[\widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi}] + \lambda[\text{Tr}(\widehat{\Phi}^\dagger \widehat{\Phi})]^2$$

gilt. $\text{Tr}(D_\mu \widehat{\Phi}^\dagger)(D^\mu \widehat{\Phi})$ ist wegen (84) ebenfalls invariant. Diese globale $SU(2)_R$ -Symmetrien von \mathcal{L}_ϕ ist durch $g_1 \neq 0$ explizit gebrochen, weil (84) wegen $[\sigma_3, U_R^\dagger] \neq 0$ im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Aus (79) folgt

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi\right) \in SU(2),$$

so dass $U(1)_Y \subset SU(2)_R$ (85). Der Higgs-Vakuumerwartungswert

$$\widehat{\Phi}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \quad (86)$$

bricht $SU(2)_L$ und $SU(2)_R$, lässt aber $SU(2)_{L+R} \subset SU(2) \times SU(2)_R$ mit $U \in SU(2)_{L+R}$: $\widehat{\Phi} \mapsto U\widehat{\Phi}U^\dagger$ (87) invariant: $U\widehat{\Phi}_{\min}U^\dagger = \widehat{\Phi}_{\min}$ (88). Diese $SU(2)_{L+R}$ heißt **custodiale SU(2)**. Quark-Yukawa-Sektor (U-Basis) im Limes $V = \mathbf{1}$:

$$\mathcal{L}_Y^u + \mathcal{L}_Y^d \stackrel{(39),(40)}{=} - \sum_{j=1,2,3} [y_j^a \overline{Q}_j \overline{\Phi}^c U_{R_j} + y_j^d \overline{Q}_j \overline{\Phi} d_{R_j}] = - \sum_{j=1,2,3} \sqrt{2} \overline{Q}_j \widehat{\Phi} \begin{pmatrix} y_j^u & 0 \\ 0 & y_j^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{R_j} \\ d_{R_j} \end{pmatrix} \quad (89)$$

(89) wäre $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -invariant (und $SU(2)_{L+R}$ -invariant) mit

$$SU(2)_R : \begin{pmatrix} u_{R_j} \\ d_{R_j} \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_{R_j} \\ d_{R_j} \end{pmatrix} \quad (90)$$

wenn $\widehat{y}_j^u = \widehat{y}_j^d$ gelten würde. $SU(2)_{L+R}$ ist durch $m_t - m_b$, $m_c - m_s$, $m_u - m_d$ (und $V \neq \mathbf{1}$) gebrochen. Im $SU(2)_{L+R}$ -Limes impliziert (82) den W-Z-Massenterm

$$D_\mu \widehat{\Phi}_{\min} = -i \frac{g_2}{2} \sigma^a W_\mu^a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = -i \frac{g_2 v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (91)$$

gerade:

$$\mathcal{L}_{W-Z-\text{mass}} = \text{Tr}[(D_\mu \widehat{\Phi}^\dagger)(D^\mu \widehat{\Phi})] = \frac{g_2^2 v^2}{4} \sum_{a=1}^3 W_\mu^a W^{\mu a} \quad (92)$$

und soweit:

$$M_W^2 = M_Z^2 = \frac{g_2^2 v^2}{2}$$

Mit $g_1 \neq 0$ ist $\cos \vartheta_w \neq 1$ und (siehe (35)) es ist

$$\varrho := \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_w} = 1 \text{ auf Baumgraphenniveau} \quad (93)$$

Diese Größe nennt man „ ϱ -Parameter“. Definiert man

$$\cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

so ist die Relation (93) auf Schleifenniveau verletzt, aber eben **nur** durch $SU(2)_{L+R}$ -verletzende Terme! Wir definieren

$$\varrho = 1 + \Delta\varrho_{\text{Eich}} + \Delta\varrho_{\text{Yuk}}, \quad (94)$$

wobei die erste Korrektur aus dem Eichsektor gegeben ist durch

$$\Delta\varrho_{\text{Eich}} = -\frac{11G_F}{24\sqrt{2}} \frac{M_Z^2}{\sqrt{2}} \frac{\sin^2 \theta_w}{\pi^2} \ln\left(\frac{m_h^2}{M_Z^2}\right) = -0,00074 \ln\left(\frac{m_h^2}{M_Z^2}\right) \quad (95)$$

im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Die erste Korrektur im Yukawa-Sektor lautet:

$$\Delta\varrho_{\text{Yuk}} = \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} \left[m_t^2 + m_b^2 - 2 \frac{m_t^2 m_b^2}{m_t^2 - m_b^2} \ln\left(\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) \right] = 0,0091 \quad (96)$$

Das heißt, ϱ kann aus vier Messgrößen bestimmt werden: M_W , M_Z , α_1 , G_F (aus α_1 und G_F folgt g_1, g_2), wobei in der Relation $G_F \mapsto M_W$, g_2 auch Schleifen mitgenommen werden müssen. $\varrho - 1$ ist dann wegen (96) und (95) sensitiv auf m_t und m_h . Vor 1994 war das Top „neue Physik“, aber m_t war durch (96) eingeschränkt. Heute setzt man Schranken an m_h durch (95). Damit werden leichte Higgs-Bosonen mit $m_h < 200$ GeV bevorzugt. Bester Fit für $m_h \approx 85$ GeV ist in Konflikt zur experimentellen Grenze $m_h \geq 114$ GeV (LEP-II). Modelle neuer Physik, welche die custodiale SU(2) schon auf Baumgraphenniveau verletzen, sind stark eingeschränkt [SCOTT WILLENBROCK: „Symmetries of the SM“ (hep-ph/0410370)!]

2.1 Das Standardmodell als effektive Theorie

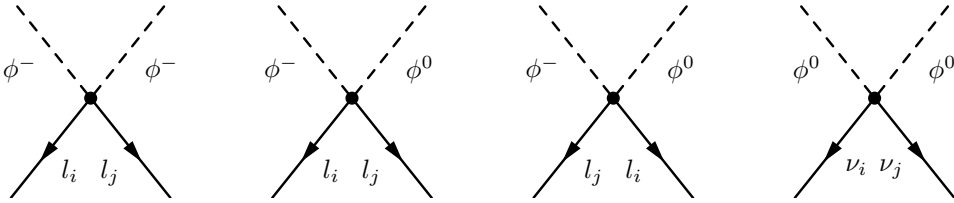
Welche $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -invariante Dimension-5-Terme können wir zu \mathcal{L}_{SM} hinzufügen? Nur ein Term ist möglich! Herleitung: $\bar{L}_i \Phi^c$ ist $SU(2)$ -Singulett mit $Y = 0$ und Dimension $5/2$. Wir suchen nun ein rechtshändiges Objekt X mit Dimension $5/2$, so dass $\bar{L}_i \Phi^c X$ Singulett ist. Durch Ladungskonjugation ändert sich die Chiralität:

$$L_j^c := i\gamma^2 \gamma^0 \varepsilon \bar{L}_j^\top = i\gamma^2 \varepsilon L_j^* = \begin{pmatrix} e_{L_j}^c \\ -\nu_j^c \end{pmatrix} \quad (97)$$

Dieses $SU(2)$ -Dublett ist rechtshändig und hat $Y = 1/2$. $\Phi^+ L_j^c$ ist somit rechtshändig, $SU(2)$ - und $U(1)_Y$ -Singulett. Hieraus ergibt sich, dass

$$\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{y_5^{ij}}{M} \bar{L}_i \Phi^c \Phi^+ L_j^c + \text{h.c.} \quad (98)$$

Singulett bezüglich G_{SM} und \mathcal{L} ist. M ist eine neue Massenskala mit $M \gg v$ und y_5^{ij} sind dimensionslose Kopplungen. $\bar{L}_i \Phi^c \Phi^+ L_j^c$ ist symmetrisch unter Vertauschen der Indizes i und j . Dies bedeutet, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_5^{ij} = y_5^{ji}$ annehmen können. $\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)}$ verletzt die Leptonenzahlen L_1, L_2, L_3 und L , da der obige Operator Leptonzahl -2 hat. Feynman-Diagramme:



$\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)}$ induziert einen Majorana-Massenterm

$$\mathcal{L}_{\text{Maj}} = \frac{1}{2} \frac{y_5^{ij}}{M} (\bar{\nu}_i, \bar{e}_{L,i}) \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} (0, v) \begin{pmatrix} e_{L,j}^c \\ -\nu_j^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} = -\frac{v^2}{2M} \left[y_5^{ij} \bar{\nu}_i \nu_j^c + (y_5^{ij})^* \bar{\nu}_j^c \nu_i \right] \quad (99)$$

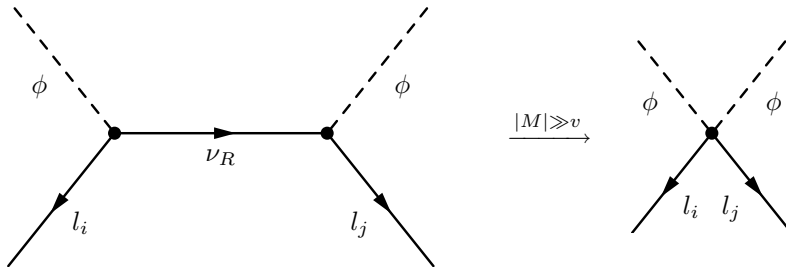
mit der Majorana-Massenmatrix

$$M_{\text{Maj}}^{ij} = \frac{v^2}{M} y_5^{ij} \quad (100)$$

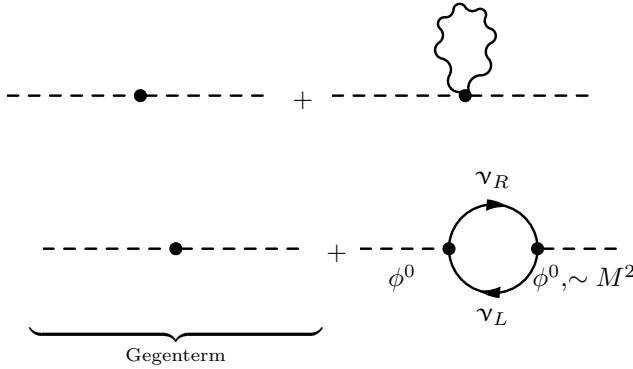
(100) führt mit $M \gg v$ zum **See-Saw-Mechanismus** für kleine Neutrino-Massen der Größe v^2/M . Aus $y_5 \neq 1$ folgt die Existenz von Neutrinooszillationen. Für $y_5^{ij} \approx 1$ implizieren die gemessenen Neutrinomassendifferenzen (unter der Annahme, dass $m_{\nu_i} \approx \mathcal{O}(m_{\nu_i} - m_{\nu_j})$) $M \approx \mathcal{O}(10^{14} \text{ GeV})$. Ist dies der zweite Hinweis auf die GUT-Skala? Wo könnte $\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)}$ herkommen? Beispielsweise sind schwere ν_R Singulettts unter G_{SM} .

$$\mathcal{L}_{\text{Maj}}^{\nu_R} = -M_j [\bar{\nu}_{R_i} \nu_{R_j}^c + \bar{\nu}_{R_j}^c \nu_{R_i}]$$

Für $M \gg v$ ist erlaubt:



Die Existenz einer großen Skala M führt zu einem Stabilitätsproblem der elektroschwachen Skala v . Higgs-Masse: Eichboson, M



Um die Schleifenbeiträge durch den Counterterm wegzuheben, ist eine Feinabstimmung auf etwa 26 Stellen notwendig.

$$\delta m_h^2 \approx -\frac{g^2}{16\pi^2} \mathcal{O}(M^2) \text{ mit } \frac{g^2}{16\pi^2} \approx 10^{-4} \text{ und } \mathcal{O}(M^2) \approx 10^{30} \quad (101)$$

Man spricht dabei vom **Feinabstimmungsproblem** oder auch **Natürlichkeitsproblem**. Dies stellt kein Problem für die massiven Eichbosonen W und Z dar, weil deren Massen durch die Eichsymmetrie geschützt sind: $M_W^2, M_Z^2 \propto v^2$. Ebenso gilt dies für die Fermionmasse: $m_f = y_f \cdot v$. Welche neue Symmetrie schützt m_h ? Oder: Higgs-Feld ist nicht elementar, sondern ein Bindungszustand!

2.2 t'Hooft'sches Natürlichkeitsprinzip

„Eine Größe x darf nur klein sein, wenn man im Limes $x \mapsto 0$ eine Symmetrie gewinnt. Das heißt, x ist proportional zu einem kleinen Symmetriebrechungsparameter.“ Kleine Yukawa-Kopplungen sind durch die chiralen U(1)-Symmetrien geschützt, die man für $y \mapsto 0$ gewinnt. Betrachten wir dazu die fermionische Largedichte für ein Fermion:

$$\mathcal{L}_{f,\text{eich}} = \bar{f}_L i \not{D} f_L + \bar{f}_R i \not{D} f_R$$

Diese Dichte ist invariant unter $U(1)_L \times U(1)_R \in [U(3)]^5$ mit $f_{L/R} \mapsto \exp(iR_{L/R}) f_{L/R}$. $y \cdot \bar{f}_L \phi_0 f_R$ ist jedoch nur unter $U(1)_{L+R} =: U(1)_V$ mit $f_{L/R} \mapsto \exp(i\varphi) f_{L/R}$ invariant. Das Feinabstimmungsproblem ist der einzige Grund, warum man an neue Physik bei (maximal) der TeV-Skala glaubt (LHC). Diese neue Physik könnte man mit $\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(6)} \sim 1/M_{\text{TeV}}^2$ mit $M_{\text{TeV}} \leq \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$ parametrisieren. Man bekommt jedoch dann zu viele Operatoren.

Kapitel 3

Symmetrien und Anomalien

Kontinuierliche Symmetrien: Symmetrietransformationen bilden eine Lie-Gruppe \mathcal{G} . Äußere Symmetrien betreffen zusätzlich die Raum-Zeit. Dazu gehört beispielsweise die Poincare-Transformation:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

$$\psi \mapsto \psi' = S(\Lambda, a)\psi$$

Innere Symmetrien lassen die Raum-Zeit außen vor:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu$$

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi$$

Das Noether-Theorem besagt, dass zu einer kontinuierlichen Symmetrie ein erhaltener Strom gehört. Betrachten wir als Beispiel die $SU(N)$ -Symmetrie (vergleiche (7)):

$$\psi \mapsto \exp(i\alpha_a T^a)\psi \tag{102}$$

mit der Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

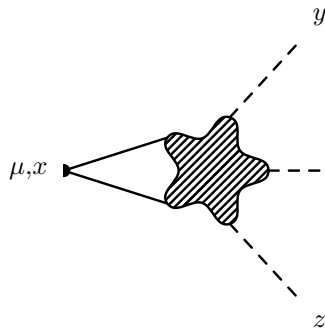
und den Strukturkonstanten f^{abc} . Der Noether-Strom ist hierbei gegeben durch

$$j_\mu^a = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu T^a \psi(x) \tag{104}$$

Es gilt also $\partial^\mu j_\mu^a(x) = 0$ (105). Gleichung (105) gilt für **klassische** Felder. In der Quantenfeldtheorie müssen wir Greenfunktionen von j^μ betrachten

$$G_j^\mu(x; y, \dots, z) := \langle 0|Tj^\mu(x)\varphi(y)\dots\varphi(z)|0\rangle \tag{106}$$

wobei φ irgendwelche Felder sind.



Schleifenkorrekturen können (105) zerstören. Die Symmetrie ist dann auf Quantenniveau gebrochen. Man spricht dann von einer **anomalen** Symmetrie.

Beispiel:

Betrachten wir ein U(1)-Eichfeld: $A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \alpha$ bzw. $\delta_\alpha A^\mu = \partial^\mu \alpha$ mit der Wirkung

$$S = \int d^4x A^\mu(x) j_\mu(x)$$

Die Variation der Wirkung muss verschwinden:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta_\alpha S = \int d^4x (\partial^\mu \alpha) j_\mu(x) = - \int d^4x \alpha \cdot \partial^\mu j_\mu(x) \Leftrightarrow \partial^\mu j_\mu \stackrel{!}{=} 0$$

Die Eichfelder müssen somit an erhaltene Ströme koppeln. Globale Symmetrien dürfen anomal sein. Dann treten nämlich interessante Effekte auf.

Die Konsequenz von Symmetrien für Greenfunktionen heißen **Ward-Identitäten**. Ward-Identitäten nicht-abelscher Theorien heißen **Slavnov-Taylor-Identitäten**.

Beispiel:

Betrachten wir die ϕ^4 -Theorie für ein komplexes Skalarfeld:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (107)$$

Dieses hat die U(1)-Symmetrie $\phi \mapsto \phi \exp(i\alpha)$ mit Noether-Strom

$$j^\mu(x) = i[(\partial^\mu \phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger(\partial^\mu \phi)] \quad (108)$$

Die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} &= [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)]_{x^0=y^0} = [\partial_0 \phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = [\partial_0 \phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)]_{x^0=y^0} = 0 \\ [\partial_0 \phi^\dagger(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} &= -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (109)$$

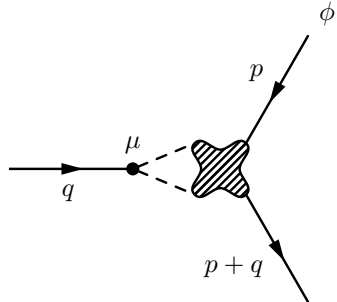
implizieren:

$$\begin{aligned} [j^0(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] &\stackrel{(108)}{=} i[\partial^0 \phi^\dagger(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)]\phi(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{x}, t) \\ [j^0(\vec{x}, t), \phi^\dagger(\vec{y}, t)] &= -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\phi^\dagger(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (110)$$

Klar wegen Noetherladung:

$$\delta\phi = i\alpha\phi = i\alpha[Q, \phi]$$

Dreipunkt-Funktion (vergleiche (106)):



$$\tilde{G}_j^\mu(p, q) = \int d^4x \int d^4y \exp(iqx + ipy) \langle 0 | T j^\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle \quad (111)$$

$$\begin{aligned} q_\mu \tilde{G}_j^\mu &= i \int d^4x \int d^4y \exp(iqx + ipy) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T j^\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle = \\ &= i \int d^4x \int d^4y \exp(iqx + ipy) [\langle 0 | T \partial_\mu j^\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T [j^0(x), \phi(y)] \phi^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &\quad \delta(x^0) \langle 0 | T [j^0(x), \phi^\dagger(0)] \phi(y) | 0 \rangle] \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme in (112) stammen aus der Zeitableitung des T-Produkts. Beispielsweise gilt nämlich:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^0} [\theta(x^0 - y^0) \theta(y^0) j^\mu(x) \phi(y) \phi(0) + \dots]}_{=\delta(x^0 - y^0)}$$

Mit (110) ist

$$\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | T [j^0(x), \phi(y)] \phi^\dagger(0) | 0 \rangle = \delta^{(4)}(x - y) \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle = \delta^{(4)}(x - y) G_2(x) \quad (113)$$

Analog gilt:

$$\delta(x^0) \langle 0 | T [j^0(x), \phi^\dagger(0)] \phi(y) | 0 \rangle = -\delta^{(4)}(x) G_2(y)$$

$$\begin{aligned} q_\mu \tilde{G}_j^\mu &\stackrel{(113)}{=} i \int d^4x d^4y \exp(iqx + ipy) \langle 0 | T \partial_\mu j^\mu(x) \phi(y) \phi^\mu(0) | 0 \rangle \\ &+ i \int d^4x \exp(i(q+p)x) G_2(x) - i \int d^4y \exp(ipy) G_2(y) \end{aligned} \quad (114)$$

Es ist also

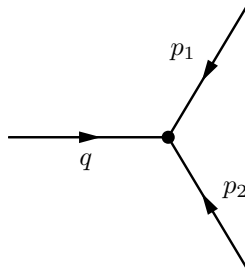
$$\langle 0 | T \partial_\mu j^\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle = 0$$

genau dann erfüllt, wenn

$$-iq_\mu \tilde{G}_j^\mu = \tilde{G}_2(q+p) - \tilde{G}_2(p) \quad (115)$$

erfüllt ist. (115) ist die **Vektorstrom-Ward-Identität** für unsere ϕ^4 -Theorie. Wir überprüfen das Ganze auf Baumgraphenniveau. Betrachten wir hierzu die Feynmanregeln:

$$j^\mu(x) = i(\partial^\mu \phi^\dagger \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi)$$



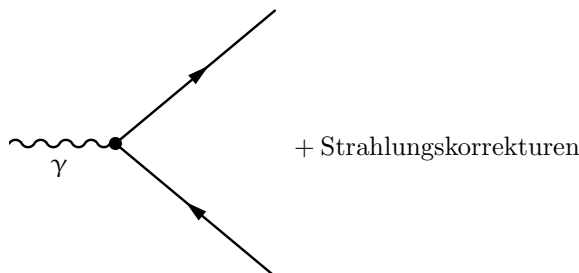
$i\partial^\mu$ wird durch den einlaufenden Impuls ersetzt. Feynmanregel: $p_2^\mu - p_1^\mu = -2p_1^\mu - q^\mu$.

$$\begin{aligned} -iq_\mu G_j^\mu &= -i \frac{i}{(q+p)^2 - m^2} q_\mu (-q^\mu - 2p^\mu) \frac{i}{p^2 - m^2} = -i \frac{q^2 + 2pq}{[(q+p)^2 - m^2][p^2 - m^2]} = \\ &= -i \frac{[(q+p)^2 - m^2] - [p^2 - m^2]}{[(q+p)^2 - m^2][p^2 - m^2]} = -\frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(q+p)^2 - m^2} \end{aligned}$$

und erfüllt (115).

Für die ϕ^4 -Theorie ist (115) auch auf Schleifenniveau erfüllt; j^μ ist also **kein anomaler Strom**. In Eichtheorien koppelt der zur Eichsymmetrie gehörende Strom j^μ ans Eichfeld, so dass man Ward-Identitäten für die Greenfunktionen mit Eichfeld betrachten kann. In der QED ist $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ der elektromagnetische Strom. Betrachte die Vertex-Funktion:

$$V^\mu(y, x) = \langle 0 | T A^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$



Die **QED-Ward-Identität** im Impulsraum ist dann

$$-\frac{1}{\xi}q^2q^\mu V(p, q) = eS(p+q) - eS(p) \quad (116)$$

wobei $S(p)$ und $S(p, q)$ die Propagatoren sind. Wir überprüfen (116) auf Baumgraphenniveau:

$$V_\mu(p, q) = \frac{i}{q^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] i[\not{p} + \not{q} - m]^{-1} (-ie\gamma^\nu) [\not{p} - m]^{-1} \quad (117)$$

Mit

$$q^\mu \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] = \xi \cdot q_\nu$$

vereinfacht sich der Ausdruck:

$$q^\mu V_\mu(p, q) \stackrel{(117)}{=} i\xi \frac{e}{q^2} [\not{p} + \not{q} - m]^{-1} \not{q} [\not{p} - m]^{-1} = i \frac{\xi e}{q^2} \{ [\not{p} - m]^{-1} - [\not{p} + \not{q} - m]^{-1} \}$$

Damit gilt also

$$-\frac{q^2}{\xi} V_\mu(p, q) = eS(p+q) - eS(p)$$

und Gleichung (116) ist erfüllt. In höheren Ordnungen schränkt (116) die Renormierung via beispielsweise ξ ein. Die Ward-Identitäten schreiben also bestimmte Relationen zwischen den Renormierungskonstanten vor. Allgemein gilt: Findet man ein Renormierungsschema, in dem die Ward-Identitäten der Eichsymmetrie erfüllt sind, so ist die Eichtheorie **anomaliefrei**.

3.1 Beispiel für eine globale (also erlaubte) Anomalie

Die **Skaleninvarianz (Invarianz unter Dilatation)** ist die Invarianz der Theorie unter der Transformation

$$x \mapsto x' = \exp(-\alpha)x \quad (118)$$

wobei $\exp(-\alpha)$ der Skalenfaktor ist. Enthält \mathcal{L} keine dimensionsbehafteten Größen (insbesondere keine Massen), so ist (118) eine Symmetrie von \mathcal{L} , wenn sich die Felder wie $p \mapsto \exp(d_\phi \alpha)\varphi$ mit $d_\phi = 1$ für Bosonen und $d_\phi = 3/2$ für Fermionen, also über

$$\varphi \mapsto \exp(\alpha)\varphi, \psi \mapsto \exp\left(\frac{3}{2}\alpha\right)\psi \text{ und } A^\mu \mapsto \exp(\alpha)A^\mu, D_\mu \mapsto \exp(\alpha)D_\mu \quad (119)$$

transformieren.

$$S = i \int d^4x [\bar{\psi}i\not{D}\psi + \dots] \mapsto i \int d^4x \exp(-4\alpha) \left[\exp\left(\frac{3}{2}\alpha\right) \bar{\psi} \exp(\alpha) i\not{D} \exp\left(\frac{3}{2}\alpha\right) \right] = S$$

Der zu (118) gehörende Noether-Strom, der **Dilatationsstrom** ist:

$$j_{\text{Dil}}^\mu = \sum_{\text{Felder } \varphi} \Pi_\varphi^\mu \cdot d_\phi \varphi(x) + x_\nu T^{\mu\nu} \quad (120)$$

mit

$$\Pi_\varphi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$$

und dem Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \left[\sum_{\text{Felder } \varphi} \Pi_\varphi^\mu \partial^\nu \varphi(x) \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (121)$$

$\partial_\mu j_{\text{Dil}}^\mu$ ist etwas sperrig. Die Verletzung der Skaleninvarianz (118) ist in allen UV-divergenten Theorien einfacher direkter zu sehen.

3.2 Beispiel: masselose QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{q=u,d,s} \bar{q} i \not{D} q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a (G^{\mu\nu})^a \quad (122)$$

$G_{\mu\nu}^a$ ist der Gluon-Feldstärketensor. Dimensionale Regularisierung:

$$S = \int d^D x \mathcal{L}_{\text{QCD}}$$

\mathcal{L}_{QCD} besitzt die Dimension $D = 4 - 2\varepsilon$.

$$[A^{\mu,a}] = \frac{D-2}{2}, [q] = \frac{D-1}{2} \quad (123)$$

$$[g^{\text{bare}} A_\mu^a \bar{q} T^a \gamma^\mu q] = D$$

$$[g^{\text{bare}}] = D - \frac{D-2}{2} - (D-1) = 2 - \frac{D}{2} = \varepsilon \quad (124)$$

Für die renormierte Kopplung gilt $[g] = 0$, also

$$g^{\text{bare}} = Z_g \cdot g \cdot \mu^\varepsilon \quad (125)$$

mit der **Renormierungsskala** μ . Schleifendiagramme hängen logarithmisch von μ ab, wie beispielsweise

$$\begin{aligned}
 A^{\text{bare}} &= \text{tree} + \text{self-energy} + \text{vertex} + \dots = \\
 &= \text{tree} \left[1 + g^2 \mu^{2\varepsilon} (q^2)^{-2\varepsilon} f \left(\frac{p_1^2}{q^2}, \frac{p_2^2}{q^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Die Funktion f ist dimensionslos und die Schleifenkorrekturen haben die Dimension $D - 4$.

$$\begin{aligned}
 A^{\text{bare}} &= \text{tree} \left\{ 1 + g^2 \left(\frac{\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \left[\frac{f_{\text{div}}}{\varepsilon} + f_{\text{endl}} \left(\frac{p_1^2}{q^2}, \frac{p_2^2}{q^2} \right) \right] \right\} \propto \\
 &\propto g^{\text{bare}} \left\{ 1 + g^2 \left[\frac{f_{\text{div}}}{\varepsilon} + f_{\text{div}} \ln \left(\frac{\mu^2}{q^2} \right) + f_{\text{endl}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$f_{\text{div}}/\varepsilon$ wird vom Gegenterm in Z_g aufgehoben.

$$A^{\text{ren}} \propto g \mu^\varepsilon \left\{ 1 + g^2 \left[f_{\text{div}} \ln \left(\frac{\mu^2}{q^2} \right) + f_{\text{endl}} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon g^2) \right\} \quad (126)$$

Die Unabhängigkeit von A^{ren} von der unphysikalischen Skala μ bestimmt die μ -Abhängigkeit von $g(\mu)$.

$$0 \stackrel{!}{=} \mu \frac{d}{d\mu} A^{\text{ren}} = \mu^{1+\varepsilon} \frac{dg}{d\mu} + \varepsilon g \mu^\varepsilon + 2 f_{\text{div}} \mu^\varepsilon g^3 + \mathcal{O}(g^5, \varepsilon g^3)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{dg}{d\mu} = -\varepsilon g - 2f_{\text{div}} g^3$$

Ein Vergleich mit (67) liefert:

$$\beta_0 = -32\pi^2 f_{\text{div}} < 0 \text{ in QCD}$$

Die laufende Kopplung (für $\varepsilon = 0$) ist gegeben durch:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{\beta_0}{16\pi^2} g^3 + \mathcal{O}(g^5) \quad (127)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung (68), die man mit ($a = g^2/(16\pi^2)$)

$$\frac{1}{a(\mu_0)} =: 2\beta_0 \ln \left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{\mu_0} \right) \quad (128)$$

umschreiben kann in

$$a(\mu) = \frac{1}{-2\beta_0 \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)} + \mathcal{O}(a^2) \quad (129)$$

Λ_{QCD} ist der **Skalenparameter der QCD**. Eine sinnvolle Definition erfordert, dass man die $\mathcal{O}(a^2)$ -Terme in (129) mitnimmt:

$$a(\mu) = -\frac{1}{\beta_0 \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)} + \frac{\beta_1 \ln \left(\ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right) \right)}{\beta_0^3 \ln^2 \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)} + \mathcal{O}(a^3) \quad (130)$$

Invertiert:

$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu \left(-\beta_0 a(\mu) \right)^{\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp \left(\frac{1}{2\beta_0 a(\mu)} \right) [1 + \mathcal{O}(a)] \quad (131)$$

Die $\mathcal{O}(a)$ -Korrekturen verschwinden im Limes $\mu \mapsto \infty$. Λ_{QCD} hängt vom Renormierungsschema ab und der Zahl f der aktiven Quarkflavours. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f=6)} &= 97 \text{ MeV} \\ \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f=5)} &= 238 \text{ MeV} \\ \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f=4)} &= 339 \text{ MeV} \\ \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f=3)} &= 445 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (132)$$

Man fordert Stetigkeit bei der Top-Quark-Masse. Die Quarkmassen spielen keine Rolle für (132) und Niederenergie-Physik. Das Auftreten eines Skalenparameters Λ_{QCD} in einer skalenlosen Theorie heißt **dimensionale Transmutation**.

Fazit:

Die Anomalie der Skaleninvarianz (118) hat sich auf Ein-Schleifen-Niveau gezeigt in der Generierung der neuen Skala Λ_{QCD} .

3.3 Exkursion: Ward-Identitäten und Renormierbarkeit

Die Ward-Identität (115) ist für unrenormierte Felder hergeleitet. Mit $\varphi = Z_\varphi^{1/2} \varphi^{\text{ren}}$ und $j = Z_j j^{\text{ren}}$ ist

$$G_2^{\text{ren}}(y-x) = \langle 0 | T \varphi^{\text{ren}}(y) \varphi^{\text{ren}}(x) | 0 \rangle = Z_\varphi^{-1} G_2$$

und

$$G_j^{\text{ren}, \mu} = Z_j^{-1} Z_\varphi^{-1} G_j^\mu$$

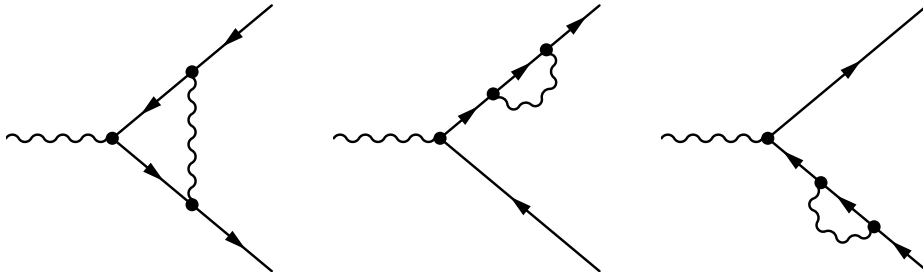
Aus (115) folgt:

$$-i Z_j q_\mu \tilde{G}^{\mu, \text{ren}} = \tilde{G}_2^{\text{ren}}(q+p) - \tilde{G}_2^{\text{ren}}(p)$$

Aus der Tatsache, dass $\tilde{G}^{\mu, \text{ren}}(p, q)$, \tilde{G}_2^{ren} und \tilde{G}_2^{ren} folgt die Endlichkeit von Z_j . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $Z_j \equiv 1$ wählen. Solche Renormierungsschemata „erhalten die Ward-Identitäten“. **Erhaltene Ströme werden nicht renormiert.**

Beispiel:

In der Quantenelektrodynamik wird $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ renormiert durch



Alle Divergenzen verschwinden via $\psi = Z_\psi^{\frac{1}{2}}\psi^{\text{ren}}$.

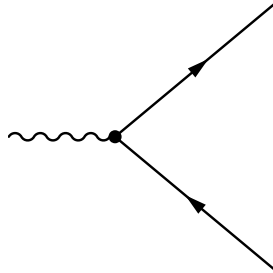
In der QED wird die elektrische Kopplungskonstante renormiert über

$$e^{\text{bare}} = Z_e e^{\text{ren}}$$

und das Photonfeld durch

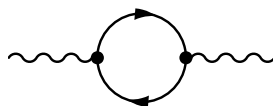
$$A_\mu^{\text{bare}} = Z_A^{\frac{1}{2}} A_\mu^{\text{ren}}$$

Kopplung:



$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \supset e^{\text{bare}} A_\mu^{\text{bare}}(x) j^\mu(x) \text{ mit } Z_j = 1$$

Damit ist $Z_e \cdot Z_A^{\frac{1}{2}}$ endlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $Z_e = Z_A^{-\frac{1}{2}}$ (133). Aus dem Selbstenergiebeitrag



allein ist somit Z_e und Z_A bestimmbar.

3.4 Die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie (ABJ-Anomalie)

Wir betrachten eine Eichtheorie mit Fermionfeldern f_1 und f_2 . Die chirale U(1)-Symmetrie ist gegeben durch $f_{L/R} \mapsto \exp(i\varphi_{L/R})f_{L/R}$ (134). Die klassisch erhaltenen Fermionströme für zunächst zwei Fermionspezies sind gegeben durch

$$j_L^\mu = \bar{f}_L \gamma^\mu f_L \text{ und } j_R^\mu = \bar{f}_R \gamma^\mu f_R \tag{135}$$

Alternativ können wir auch den Vektorstrom und Axialvektorstrom betrachten:

$$j_V^\mu = j_L^\mu + j_R^\mu = \bar{f} \gamma^\mu f \tag{136}$$

$$j_A^\mu = j_R^\mu - j_L^\mu = \bar{f} \gamma^\mu \gamma_5 f \tag{137}$$

Ein Massenterm $-m\bar{f}f$ bricht die **axiale U(1)-Symmetrie**

$$f \mapsto \exp(i\varphi\gamma_5)f \tag{138}$$

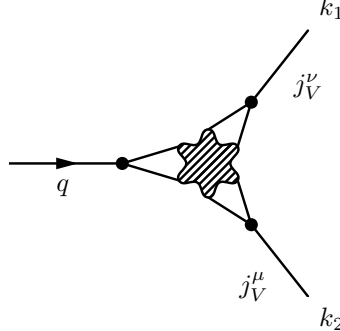
und es gilt

$$\partial_\mu j_A^\mu = 2im\bar{f}\gamma_5 f =: 2imj_p$$

j_p wird auch als pseudoskalarer Strom bezeichnet. Ist eine Symmetrie durch einen Parameter mit positiver Massendimension gebrochen, so spricht man von **weicher Brechung**. Die axiale U(1)-Symmetrie in (138) ist weich gebrochen durch $m \neq 0$. Ein Theorem von **Kurt Symanzik** besagt, dass die **Nichtrenormierung eines erhaltenen Stroms** (also $Z_j = 1$) gültig bleibt, wenn die Symmetrie weich gebrochen ist. In unserem Fall (139) gilt:

$$m^{\text{bare}} j_p^{\text{bare}} = m^{\text{ren}} Z_m Z_p j_p^{\text{ren}} = m^{\text{ren}} j_p^{\text{ren}} \text{ mit } Z_m Z_p = 1$$

Das heißt, die rechte Seite ist konvergent und $Z_{j_A} = 1$ bleibt intakt. Also ist $Z_{j_A} \neq 1$ äquivalent dazu, dass j_A^μ anomal ist. Betrachte die „VVA“-Greenfunktion:



$$T^{\mu\nu,A}(k_1, k_2) := i \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 0 | T j_V^\mu(x_1) j_V^\nu(x_2) j_A^\lambda(0) | 0 \rangle \exp(-ik_1x_1 - ik_2x_2) \quad (140)$$

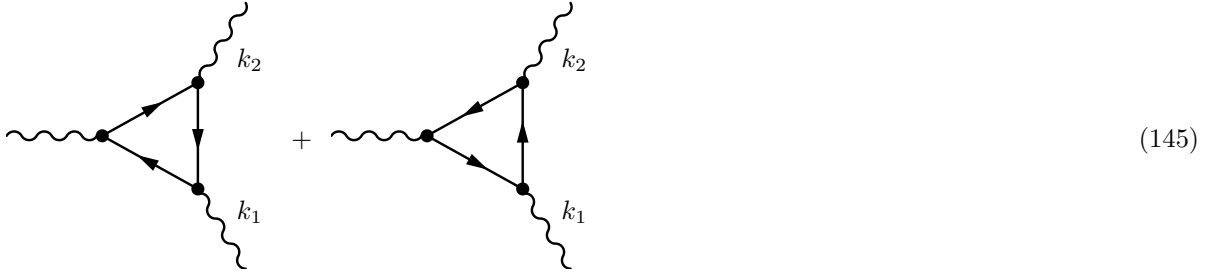
und („VVP“):

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T j_V^\mu(x_1) j_V^\nu(x_2) j_p(0) | 0 \rangle \exp(-ik_1x_1 - ik_2x_2) \quad (141)$$

Analog zu (115) findet man die **VVA-Ward-Identitäten**

$$k_{1,\mu} T^{\mu\nu\lambda} = k_{2,\nu} T^{\mu\nu\lambda} = 0 \text{ und } q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2m T^{\mu\nu} \quad (142)$$

Die Beiträge niedrigster Ordnung zu $T^{\mu\nu\lambda}$ sind gegeben durch



Es ist ersichtlich, dass $D_2(k_1, k_2) = D_1(k_2, k_1)$ gilt. Um die Diagramme in (143) auszurechnen, muss man γ_5 in D Dimensionen neu definieren.

$$\gamma_5 = \gamma^5 = -\frac{i}{24} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \neq i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (144)$$

Die γ -Matrizen haben wir im D -dimensionalen Raum definiert. Das Levi-Civita-Symbol ist jedoch ein intrinsisch vierdimensionales Objekt. In vier Dimensionen findet man nämlich kein anderes antisymmetrisches Objekt, das durch eine Zahl, nämlich beispielsweise $\varepsilon_{0123} = 1$, charakterisiert ist. Eine wichtige Eigenschaft ist $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = \mathcal{O}(D-4) \neq 0$.

γ_5 in (144) ist die 't-Hooft-Veltman-Definition von γ_5 . Mit ihr ist

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (145)$$

und die Diagramme in (143) ergeben (bei Kontraktion mit $k_{1,\mu}, k_{2,\nu}, q_\lambda$):

$$k_{1,\mu} T^{\mu\nu\lambda} = k_{2,\nu} T^{\mu\nu\lambda} \equiv 0 \quad (146)$$

und

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2mT^{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{1,\rho} k_{2,\sigma} \quad (147)$$

Damit ist also die dritte Ward-Identität in (142) verletzt. Man kann andere Definitionen von γ_5 als (144) wählen und kann

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2mT^{\mu\nu}$$

retten. Dann ist jedoch die Vektor-Ward-Identität verletzt:

$$k_\mu T^{\mu\nu\lambda} \neq 0 \neq k_{2,\nu} T^{\mu\nu\lambda}$$

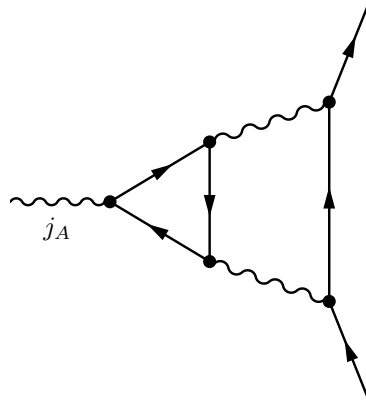
Das heißt, Gleichung (146) bedeutet, dass die Vektorstromerhaltung intakt bleibt. Der Axialvektorstrom ist wegen (147) anomal. Betrachten wir QED mit externen Photonfeldern, also

$$j_V^\mu \mapsto -e j_{em}^\mu = -e \bar{f} \gamma^\mu f \text{ und } j_P \mapsto -e j_P$$

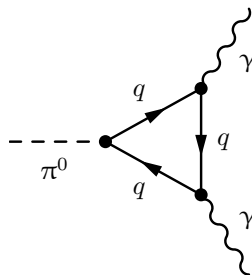
so ist (147) im Ortsraums gegeben durch:

$$j_\mu j_A^\mu = 2imj_P - \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}}_{\text{„die Anomalie“}} \text{ mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi^2} \approx \frac{1}{137}$$

Die Anomalie überlebt im Limes $m \mapsto 0$. Insbesondere führt die Anomalie dazu, dass das Diagramm

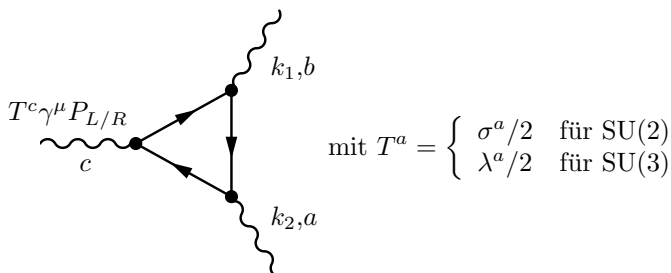


divergent ist. Somit gilt $Z_{j_A} \neq 1$. Eine erste Beobachtung globaler **ABJ-Anomalie** liefert die große Zerfallsrate $\pi^0 \mapsto \gamma\gamma$ über



Dies hat auch zur Bestimmung von $N_c = 3$ geführt.

Wegen (148) können wir kein Eichfeld an j_A^μ koppeln. Was ist mit den z -Kopplungen des Standardmodells? Bei nicht-abelschen Theorien sind Fermionen in Symmetrie-Multipletts à la $(q_R^r, q_R^g, q_R^b)^\top \in \text{SU}(3)$ oder $L = (\nu_L, e_L)^\top \in \text{SU}(2)$ eingebettet.



$$\text{mit } T^a = \begin{cases} \sigma^a/2 & \text{für SU}(2) \\ \lambda^a/2 & \text{für SU}(3) \end{cases}$$

Nun ist nicht mehr $D_2(k_1, k_2) = D_1(k_2, k_1)$, weil $\text{Sp}(T^a T^b T^c) \neq \text{Sp}(T^b T^a T^c)$ gilt. Der zweite Term rechts in (147) wird modifiziert zu

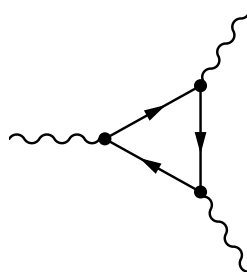
$$-\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\mu\nu} k_{\rho\sigma} D^{abc} \tag{149}$$

mit

$$D^{abc} = \frac{1}{2} \text{Sp}[\{T^a, T^b\} T^c] \tag{150}$$

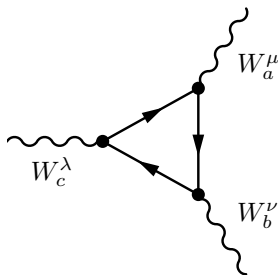
3.4.1 Anomaliecheck des Standardmodells

(Nachlesen kann man das Folgende beispielsweise in CHENG, LI: „Gauge Theory of Elementary Particle Physics“ in Kapitel 11.2.) Weil links- und rechtshändige Felder unterschiedliche $SU(2)_L$ - und $U(1)_Y$ -Quantenzahlen haben, enthalten die Diagramme



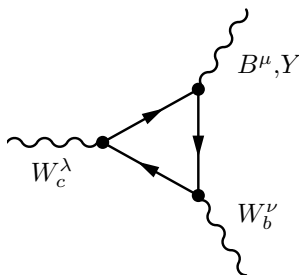
mit äußeren $W_{1,2,3}^\mu$ - oder B_μ -Feldern VVA-Anteile aus $\gamma^\mu P_L = \gamma^\mu \pm \gamma^\mu \gamma_5$.

1.) Nur $SU(2)$:



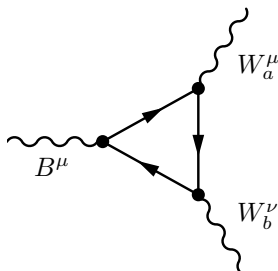
$$D^{abc} \stackrel{(150)}{=} \frac{1}{16} \text{Sp}[\{\sigma^a, \sigma^b\} \sigma^c] = \frac{1}{8} \delta^{ab} \text{Sp}(\sigma^c) = 0 \tag{151}$$

2.) Zwei $SU(2)$ -Eichfelder, $U(1)$ -Eichfeld



$$\begin{aligned} D^{Ybc} &= \frac{1}{8} \text{Sp}[\{Y, \sigma^b\} \sigma^c] = \frac{1}{8} \text{Sp}(Y) \cdot 2 \text{Sp}[\sigma^b \sigma^c] = \\ &= \frac{1}{8} \text{Sp}(Y) \cdot 4 \delta^{bc} = \frac{1}{2} \delta^{bc} \text{Sp}(Y) \end{aligned} \tag{152a}$$

oder:



$$D^{abY} = \frac{1}{8} \text{Sp}[\{\sigma^a, \sigma^b\} Y] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \text{Sp}(Y) \tag{152b}$$

Jedoch gilt:

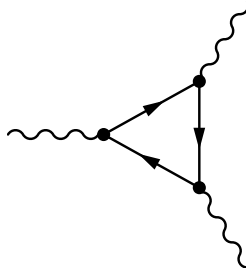
$$\begin{aligned} \text{Sp}(Y) &= \sum_{\text{fermion } j} Y_j = \sum_{\substack{\text{lepton } j \\ \text{Dubletts}}} Y_j + \sum_{\substack{\text{quark } j \\ \text{Dubletts}}} Y_j \text{ mit } \sum_{\substack{\text{lepton } j \\ \text{Dubletts}}} Y_j = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot (-1) \end{aligned} \quad (153)$$

$$\sum_{\substack{\text{quark } j \\ \text{Dubletts}}} Y_j = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = 3 \cdot 1 \quad (154)$$

Hieraus folgt $\text{Sp}(Y) = 0$.

Die $U(1)_Y$ - $SU(2)_L$ - $SU(2)_L$ -Anomalie ist durch Auslöschung („cancellation“) der Lepton- mit den Quark-Beiträgen abwesend. Die Anomaliefreiheit ist Konsequenz des Teilcheninhalts und der Quantentahlen. Die Zahl der Generationen ist unerheblich. (Das Ganze liefert ein besseres Verständnis der Hyperladung. Diese wurde nämlich ursprünglich so gewählt, dass alles stimmt.)

3.) Drei $U(1)$ -Felder



$$\begin{aligned} \text{Sp}(Y^3) &= \sum_{\text{fermion } j} Y_j^3 = 3 \cdot \left[(-1)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \right] + 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \right] = \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

Ist das Standardmodell also anomal? Es gilt jedoch nach (29) $Y = Q - I_w^3$ und somit:

$$\begin{aligned} B^\mu \sum_f (\bar{F}_L \gamma^\mu Y F_L + \bar{f}_R \gamma^\mu Y f_R) &= B^\mu \sum_f \left(q_f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + q_f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R - \bar{F}_L \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} F_L \right) = \\ &= B^\mu \sum_f \left(q_f \bar{f} \gamma^\mu f - \bar{F}_L \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} F_L \right) \end{aligned}$$

Es existiert also kein Axialvektorstrom in elektromagnetischer Kopplung und das Photonfeld hat nur eine Vektorkopplung. Also gilt:

$$Y^3 = [Q - I_w^3]^3 = Q^3 - 3Q^2 I_w^3 + 3Q(I_w^3)^2 - (I_w^3)^3$$

- 1. Term Q^3 : keine Vektorströme
- 2. Term $-3Q^2 I_w^3$: Beitrag zum VVA-Diagramm
- 3. Term $3Q(I_w^3)^2$: Beitrag zum VVA-Diagramm

$$\text{Sp}(Q(I_w^3)^2) = \text{Sp} \left[\left(\frac{\sigma^3}{2} \right)^2 \right] \cdot \text{Sp}(Q) = \frac{1}{2} \sum_{\text{Dubletts } f} q_f$$

$$\text{Sp}(Q) = \sum_{\text{Dubletts } f} q_f \stackrel{(29)}{=} \sum_{\substack{\text{linkshändige} \\ \text{Dubletts } f_L}} (Y_{f_L} + (I_w^3)_{f_L}) \stackrel{(153),(154)}{=} 0$$

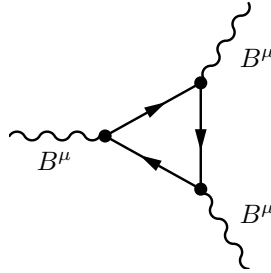
Also gilt:

$$\text{Sp}[Q(I_w^3)^2] = 0$$

- 4. Term $-(I_w^3)^3$:

$$\text{Sp}[(I_w^3)^3] = \frac{1}{8} \text{Sp}[(\sigma^3)^3] = \frac{1}{8} \text{Sp}(\sigma^3) = 0$$

Es tritt somit keine VVA-Anomalie auf in



Die Quellen der Anomaliefreiheit (oben: Gruppenstruktur und Hyperladung, jetzt: gleiche Ladung) rühren vom Teilcheninhalt und den Quantenzahlen her. Es gilt nämlich $q_{f_R} = q_{f_L}$ und somit:

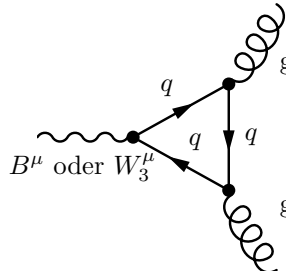
$$Y_{f_R} = Y_{f_L} \pm \frac{1}{2} \text{ für } \begin{cases} \text{upartige } f \\ \text{downartige } f \end{cases} \quad (158)$$

Korollar:

In der QED müssen die links- und rechtshändigen Felder gleiche Ladungen haben. Sonst gäbe es anomale Axialvektorströme mit

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \supset -\frac{e}{2} A_\mu (q_{e_R} - q_{e_L}) \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e$$

4.) Zwei Gluonen und ein Eichboson:



$$\text{Sp}(Y) = \sum_{\text{quark } j} Y_j \neq 0$$

Aber wegen $Y = Q - I_w^3$ gibt es keinen Beitrag. Der erste Term liefert keinen Beitrag, da er nur VVV. Der zweite Term verschwindet für q_R und für Q_L wegen $\text{Sp}(\sigma^3/2) = 0$. Der Grund für die Anomaliefreiheit sind die gleichen SU(3)-Darstellungen für q_L und q_R (vektorartige SU(3)_L).

Wir hatten die $U(1)_Y$ -Quantenzahlen der SM-Fermionen phänomenologisch bestimmt, so dass über $Q = Y + I_w^3$ die beobachteten elektrische Ladungen richtig herauskamen. Kann man die Hyperladungen aus der Forderung nach Anomaliefreiheit bestimmen? Wir nehmen an, dass SU(3)_c und SU(2)_L-Quantenzahlen wie im Standardmodell die Anomalien auslöschen in jeder Generation. Wir betrachten im Folgenden nur eine Generation. Start:

$$L = \varepsilon - \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ also } q_{\nu_L} = \varepsilon$$

Brauche ν_R (wegen (158)) mit $y_{\nu_R} = \varepsilon$. Aus (158) ergibt sich $q_{e_L} = -1 + \varepsilon$ und $q_{e_R} = y_{e_R} = -1 + \varepsilon$. Mit $y_L = \varepsilon - 1/2$ und Gleichung (154) folgt:

$$\sum_{\text{Quark-Doublets}} y_Q = 3y_Q \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} - \varepsilon \Rightarrow y_Q = \frac{1}{6} - \frac{\varepsilon}{3}$$

Die Hyperladungen sind über die Bedingung (158) festgelegt:

$$y_{u_R} = \frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } y_{d_R} = -\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{3}$$

Die elektrischen Ladungen der Teilchen wären

ν	e	d	u
ε	$-1 + \varepsilon$	$-1/3 - \varepsilon/3$	$2/3 - \varepsilon/3$

und die Brechung $G_{SM} \mapsto U(1)_{em}$ funktioniert mit dem Higgsfeld. Das H-Atom ist neutral, aber nicht ${}^2H = D$.

- Fall $\varepsilon = 1$: CP-konjugiertes Standardmodell

$$(L \mapsto \varepsilon L^* \text{ usw.}) : \nu_L \mapsto e_R^C, e_R \mapsto \nu_L^C$$

$U(1)$ -Quantenzahlen sind a priori reelle Zahlen. Die Antwort auf die Frage, ob man ... bestimmen kann ist „Nein!“.

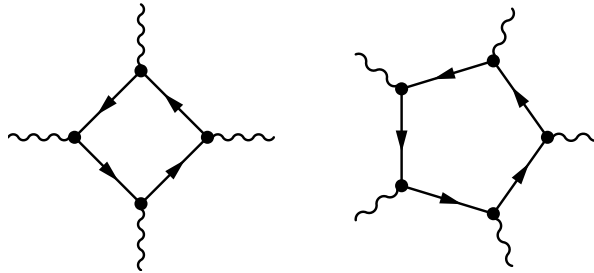
3.4.2 Ladungsquantisierungsproblem des Standardmodells

Warum ist $\varepsilon = 0$ und zwar für alle drei Generationen? Könnte $\varepsilon \neq 0$ klein sein? Vielleicht, aber: Die drei Generationen mischen ($V_{CKM} \neq 1$), haben also identische Hyperladung. Das heißt, es gilt:

$$\varepsilon(\text{1. Generation}) = \varepsilon(\text{2. Generation}) = \varepsilon(\text{3. Generation})$$

3.4.3 Drei Bemerkungen zu Anomalien

- Ist die ABJ-Anomalie abwesend, so auch



die im Allgemeinen zur rechten Seite von (147) beitragen.

- Die Anomalie

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = -\frac{\alpha}{2\pi} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}$$

erhält keine Korrekturen aus Zwei- und Mehrschleifendiagrammen.

- Definiert man

$$\hat{j}_A^\mu := j_A^\mu + \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma},$$

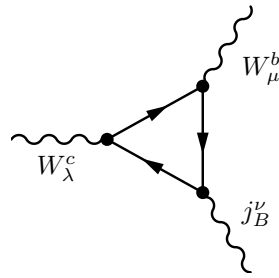
so ist $\partial_\mu \hat{j}^\mu = 2imj_p$. Jedoch ist \hat{j}_A^μ nicht eichinvariant. Die ABJ-Anomalie hat eine dramatische Konsequenz für das Standardmodell. Noetherströme zur Baryonzahl und Leptonzahl (eine Generation):

$$j_B^\mu = 3 \cdot \frac{1}{3} [\bar{Q}_L \gamma^\mu Q_L + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R]$$

Hier wird mit der Anzahl $n_c = 3$ der Farben multipliziert und durch die Baryonzahl = 3 dividiert.

$$j_L^\mu = 1 \cdot [\bar{L} \gamma^\mu L + \bar{l}_R \gamma^\mu l_R] \tag{160}$$

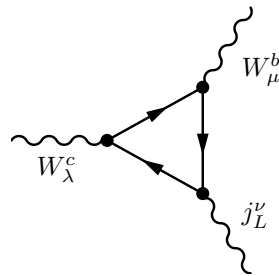
Hier bedeutet 1 die Leptonzahl.



Wir berechnen den Anomaliekoeffizienten (pro Generation):

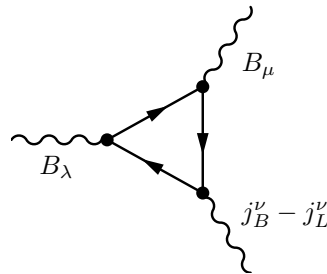
$$D^{Bbc} = \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\left\{ \mathbb{1}, \frac{\sigma^b}{2} \right\} \frac{\sigma_c}{2} \right] = \frac{1}{2} \delta^{bc} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}$$

Damit ist der Baryonzahlstrom anomal.



$$D^{Lbc} = \frac{1}{2} \delta^{bc}$$

Somit ist auch der Leptonzahlstrom anomal. Eine anomalfreie Größe ist die Differenz der beiden Ströme, also $j_B^\nu - j_L^\nu$. Ebenso gilt:



Unter Ausnutzung von $Y = Q - I_w^3$ findet man, dass $B - L$ **anomalfrei** ist bezüglich $U(1)_Y$. $B - L$ ist erhalten und $B + L$ ist anomal gebrochen! Einen $B + L$ -verletzenden Prozess sieht man nicht in der Störungstheorie. Diesen nichtperturbativen Effekt ($\sim \exp(-1/\alpha_2)$) (Tunneln zwischen Zuständen mit unterschiedlicher $B + L$ -Quantenzahlen durch sogenannte Instantonen) kann man in semiklassischen Rechnungen reproduzieren.

Im Standardmodell gibt es eine **einzig globale** Symmetrie, nämlich $U(1)_{B-L}$. ε in (159) ist Linearkombination aus Y und $B - L$. $\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)}$, unser Neutrino-Massenterm, bricht L (und L_e, L_μ, L_τ), also auch $B - L$ und wegen $B + L$ auch B („Baryogenese durch Leptogenese“).

Die Anomalfreiheit der Eichsymmetrie ist ein wichtiges Kriterium für den Modellbau.

Anomalfreie Gruppen (also $D^{abc} = 0$ für die Fundamentaldarstellung) mit

$$D^{abc} = \frac{1}{2} \text{Sp}[\{T^a, T^b\}T^c]$$

heißen **sichere Gruppen**. Dazu gehören:

- $SU(2) = \text{Sp}(2) \simeq SO(3)$
- $SO(N)$ außer $SO(6) \simeq SU(4)$
- alle symplektischen Gruppen $\text{Sp}(2N)$

3.4. DIE ADLER-BELL-JACKIW-ANOMALIE (ABJ-ANOMALIE)

Alle anderen Gruppen heißen **gefährlich**. Dazu gehört $SU(N)$ mit $N \geq 3$. Hier müssen die Darstellungen der Fermionen so gewählt werden, dass $D^{abc} = 0$ ist wie beispielsweise im Fall der $U(1)_Y$ via $\text{Sp}(Y) = 0$, wobei die Spur so zu verstehen ist, dass über alle Fermionen summiert wird. Hinreichend für $D^{abc} = 0$ ist, dass (bei kompakten Gruppen) eine Darstellung **reell** ist. Das heißt, es gibt ein unitäres U mit

$$U^\dagger T^a U = -(T^a)^* \tag{161}$$

wobei die $(T^a)^*$ die komplex konjugierte Darstellung bilden.

$$D^{abc} = \text{Sp}[\{T^a, T^b\}T^c] \stackrel{(161)}{=} -\text{Sp}[\{(T^a)^*, (T^b)^*\}, (T^c)^*] = -\text{Sp}[\{T^a, T^b\}, T^c]^* = -\text{Sp}[T^c \{T^b, T^a\}] = -D^{abc}$$

wegen $(T^a)^\dagger = T^a$. Damit ist $D^{abc} = 0$. Für die $SU(3)$ sind nur die $\underline{8}$ und $\underline{3} + \underline{3}^*$ anomaliefrei!

Kapitel 4

Das Zwei-Higgs-Dublett-Modell

Wir betrachten zwei SU(2)-Dubletts:

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} (h_u^0)^* \\ -h_u^- \end{pmatrix}_{Y=-1/2}, \quad \Phi_d = \begin{pmatrix} h_d^+ \\ h_d^0 \end{pmatrix}_{Y=+1/2} \quad (162)$$

Die ladungskonjugierten Higgsfelder ergeben sich über

$$\begin{aligned} \Phi_i^c &= \varepsilon \phi_i^* \text{ für } i = u, d \\ \Phi_u^c &= - \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (163)$$

Erlaubte Yukawa-Wechselwirkung für Quarks:

$$\mathcal{L}_Y^q = - \sum_{j,k} \{ y_{jk}^d \bar{Q}_j \Phi_d d_{Rk} - \tilde{y}_{jk}^d \bar{Q}_j \Phi_u^c d_{Rk} + y_{jk}^u \bar{Q}_j \Phi_u u_{Rk} + \tilde{y}_{jk}^u \bar{Q}_j \Phi_d^c u_{Rk} \} + \text{h.c.} \quad (164)$$

Vakuumerwartungswerte:

$$\phi_{u,\min} = \begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{d,\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_d \end{pmatrix} \quad (165)$$

Wir schauen uns den eich-kinetischen Term an:

$$\begin{aligned} &[D_\mu \Phi_u]^\dagger D^\mu \Phi_u + [D_\mu \Phi_d]^\dagger D^\mu \Phi_d \\ \Rightarrow M_W^2 &= \frac{1}{2} g_2^2 (|v_u|^2 + |v_d|^2) = \frac{1}{2} g_2^2 v^2 \text{ mit } v := \sqrt{|v_u|^2 + |v_d|^2} = 174 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (166)$$

Die Phasentransformation $\phi_i \mapsto \exp(-i \arg(v_i)) \phi_i$ macht v_u und v_d reell. Damit nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $v_u, v_d \in \mathbb{R}$ sind.

$$\frac{v_u}{v_d} =: \tan \beta \text{ und } v_u = v \sin \beta, \quad v_d = v \cos \beta \quad (167)$$

(164) führt zu den Massenmatrizen

$$M_{jk}^d = y_{jk}^d v_d + \tilde{y}_{jk}^d v_u \text{ und } M_{jk}^u = y_{jk}^u v_u + \tilde{y}_{jk}^u v_d \quad (168)$$

Man rotiert die beiden Felder ϕ_d und ϕ_u^c mittels des zuvor definierten Winkels β .

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_d \\ -\phi_u^c \end{pmatrix} \quad (169)$$

Hieraus folgt, dass

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

den Vakuumerwartungswert

$$\phi_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos^2 \beta + v \sin^2 \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (170)$$

und

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'^+ \\ \phi'^0 \end{pmatrix}$$

hat keinen Vakuumerwartungswert. Die Kopplungen der neuen Felder an Quarks sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^q = & - \sum_{j,k} \{ \bar{Q}_{jk} [y_{jk}^d \cos \beta + \tilde{y}_{jk}^d \sin \beta] \Phi d_{Rk} + \bar{Q}_j [-y_{jk}^d \sin \beta + \tilde{y}_{jk}^d \cos \beta] \Phi' d_{Rk} \\ & + \bar{q}_j [\tilde{y}_{jk}^u \cos \beta + y_{jk}^u \sin \beta] \Phi^c u_{Rk} + \bar{Q}_j [-\tilde{y}_{jk}^u \sin \beta + y_{jk}^u \cos \beta] \Phi'^c u_{Rk} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (171)$$

$$\mathcal{L}_Y^q \stackrel{(168)}{=} - \sum_{j,k} \left\{ \frac{M_{jk}^d}{v} \bar{Q}_j \Phi d_{Rk} + \frac{M_{jk}^u}{v} \bar{Q}_j \Phi^c u_{Rk} + K_{jk} \bar{Q}_j \Phi' d_{Rk} + \tilde{K}_{jk} \bar{Q}_j \Phi'^c u_{Rk} \right\} \quad (172)$$

mit

$$K_{jk} = -y_{jk}^d \sin \beta + \tilde{y}_{jk}^d \cos \beta \quad \text{und} \quad \tilde{K}_{jk} = y_{jk}^u \cos \beta - \tilde{y}_{jk}^u \sin \beta \quad (173)$$

Wie im Standardmodell können wir M_{jk}^d und M_{jk}^u diagonalisieren und erhalten Quarkmassen und CKM-Matrix. Aber es gilt im Allgemeinen

$$[M^d, K] \neq 0 \neq [M^u, \tilde{K}]$$

und K, \tilde{K} sind in der Massen-Eigenzustand-Basis nicht diagonal. Somit hat ϕ'^0 FCNC-Kopplungen wie beispielsweise $-K_{12} \cdot \bar{d}_L \phi'^0 s_R$. Im Zwei-Higgs-Dublett-Modell gibt es im Allgemeinen große Beiträge zur $K^0 - \bar{K}^0$ -Mischung. Eine Ad-Hoc-Lösung des FCNC-Problems besteht darin, diskrete Symmetrien einzuführen, um zwei der vier Kopplungen in (164) zu verbieten.

4.0.4 Typ-I-2-HDM

Φ_u bekommt die Quantenzahl +1 und $\Phi_d, Q_j, d_{Rk}, u_{Rk}$ die Quantenzahl 0. Damit koppelt nur Φ_d an Fermionen. Es gibt keine FCNS's, denn es gilt $\tilde{y}_{jk}^d = y_{jk}^u = 0$, so dass

$$K_{jk} = -\frac{\tan \beta}{v} M_{jk}^d$$

und

$$\tilde{K}_{jk} = -\frac{\tan \beta}{v} M_{jk}^u$$

gilt.

4.0.5 Typ-II-2-HDM

d_R und Φ_d erhalten +1 und ϕ_u, u_R die Quantenzahl -1. Hieraus folgt:

$$\mathcal{L}_Y^q = - \sum_{j,k} \{ y_{jk}^d \bar{Q}_j \phi_d d_{Rk} + y_{jk}^u \bar{Q}_j \phi_u u_{Rk} \} \quad (174)$$

und (mit (168)):

$$M_{jk}^d = y_{jk}^d v \cos \beta \quad \text{und} \quad M_{jk}^u = y_{jk}^u v \sin \beta \quad (175)$$

$$\Rightarrow \frac{m_t(\mu)}{m_b(\mu)} = \frac{y_t}{y_b} \tan \beta \quad (176)$$

Vereinigen sich y_d und y_b , also (bei der elektroschwachen Skala) $y_d \approx y_b$, so muss

$$\tan \beta = \frac{m_t(\mu)}{m_b(\mu)} \approx 53$$

sein. Aber es gilt

$$\frac{m_c(\mu)}{m_s(\mu)} \approx 14$$

und

$$\frac{m_b(\mu)}{m_d(\mu)} \approx \frac{1}{2}.$$

- Typ-I-2HDM: $\phi_u \leftrightarrow -\phi_u$, alle anderen Felder:

$$\Phi_d, Q_j, d_{Rk}, u_{Rk} \leftrightarrow \Phi_d, Q_j, d_{Rk}, u_{Rk}$$

- Typ-II-2HDM: $\phi_d \leftrightarrow \phi_d, d_{Rk} \leftrightarrow d_{Rk}, \phi_u \leftrightarrow -\phi_u, u_{Rk} \leftrightarrow -u_{Rk}$

4.1 Higgs-Freiheitsgrade des 2HDM

Es gibt vier neutrale und vier geladene Felder. Davon sind drei Goldstone-Bosonen G_0 und G^\pm . Also liegen drei neutrale Higgs-Bosonen H_1^0, H_2^0 und H_3^0 vorund zwei geladene H^\pm . Aus (siehe (169), (170)) $\langle \phi^0 \rangle = v$ und $\langle \phi'^0 \rangle = 0$ folgt sofort:

$$\Phi = \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}(h^0 + iG^0) \right) \quad (177)$$

denn $[D_\mu \Phi]^\dagger D^\mu \Phi$ ist identisch zum Eich-Higgs-Sektor des Standardmodells und $\phi'_{\min} = (0, 0)$, so dass keine Komponente masselos sein kann und zu G^\pm, G^0 beitragen könnte.

$$\Phi' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(h'^0 + iA^0) \right) \quad (178)$$

H_1^0, H_2^0 und H_3^0 sind Linearkombination von h^0, h'^0 und A^0 , die man findet, wenn man aus dem Higgs-Potential die (h^0, h'^0, A^0) -Massenmatrix bestimmt und diese diagonalisiert. Kommen wir nun zum Higgs-Potential:

$$\begin{aligned} V(\Phi_u, \Phi_d) = & m_{11}^2 \Phi_d^\dagger \Phi_d + m_{22}^2 \Phi_u^\dagger \Phi_u - m_{12}^2 \underbrace{\Phi_u^\dagger \varepsilon \Phi_d^*}_{\Phi_d^c} + m_{12}^{2*} \underbrace{\Phi_d^\dagger \varepsilon \Phi_u}_{-\Phi_d^{c\dagger}} \\ & + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_d^\dagger \Phi_d)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_u^\dagger \Phi_u)^2 + \lambda_3 (\Phi_u^\dagger \Phi_u) (\Phi_d^\dagger \Phi_d) + \lambda_4 (\Phi_u^\dagger \Phi_d) (\Phi_d^\dagger \Phi_u) \\ & + \left\{ \frac{\lambda_5}{2} (\Phi_u^\dagger \varepsilon \Phi_d^*)^2 - \lambda_6 (\Phi_d^\dagger \Phi_d) (\Phi_u^\dagger \varepsilon \Phi_d^*) - \lambda_7 (\Phi_u^\dagger \Phi_u) (\Phi_u^\dagger \varepsilon \Phi_d^*) + \text{h.c.} \right\} \end{aligned}$$

Dabei sind $m_{12}^2, \lambda_5, \lambda_6$ und λ_7 komplex; die anderen Parameter sind reell. Die diskrete Symmetrie $\Phi_u \leftrightarrow -\Phi_u$ verbietet λ_6, λ_7 und m_{12}^2 und wir setzen $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$. m_{12}^2 ist als weicher Brechungsparameter tolerabel. Für $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$ sind die Vakuumerwartungswerte reell für $\arg(m_{12}^2) = \arg(\lambda_5)$. Wir führen die Ladungskonjugation ein durch die Operation

$$C\Phi = \Phi^* \quad (179)$$

Das Vorzeichen der $U(1)_Y$ -Ladung und der $U(1)_{\text{em}}$ (und von U_w^3) wechselt unter C . Also gilt $\Phi^c = \varepsilon C\Phi$. (179) bedeutet (siehe (177)).

$$v \xrightarrow{c} v \quad (180)$$

$$h^0 \xrightarrow{c} h^0 \quad (181)$$

$$G^0 \xrightarrow{c} -G^0 \quad (182)$$

Für Φ' hat man mehr Freiheit:

$$C\Phi' = \exp(i\varphi_{\text{CP}})\Phi'^* \quad (183)$$

mit beliebigem φ_{CP} . In (179) ist $\exp(i\varphi_{\text{CP}})$ nicht erlaubt, weil sonst (180) verletzt wäre. Zunächst betrachten wir die J^{PC} -Eichbosonen. Das Photon ist ein 1^{--} -Feld. Damit sind B_μ, W_μ (und Z_μ) ebenfalls 1^{--} -Felder

$$B_\mu \xrightarrow{c} -B_\mu, W_\mu^3 \xrightarrow{c} -W_\mu^3 \quad (184)$$

Wenn Kopplungen an Fermionen vernachlässigt werden. Betrachten wir den Feldstärketensor:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$$

C -Invarianz von

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a}$$

erfordert $W_{\mu\nu}^a \xrightarrow{C} \pm W_{\mu\nu}^a$. Aus (184) folgt $W_{\mu\nu}^3 \xrightarrow{C} -W_{\mu\nu}^3$, also

$$W_\mu^1, W_\mu^2 \xrightarrow{C} -W_\mu^1 W_\mu^2$$

Es gibt also zwei Möglichkeiten, die äquivalent sind. Wir entscheiden uns für

$$W_\mu^1 \xrightarrow{C} -W_\mu^1, W_\mu^2 \xrightarrow{C} W_\mu^2 \Rightarrow W_\mu^\pm \xrightarrow{C} -W_\mu^\mp \quad (185)$$

(Nebenbemerkung: Drei Gluonen haben $C = +1$ und fünf Gluonen $C = -1$. Gluonen haben jedoch keine C-Quantenzahlen, weil diese invariant unter $SU(3)_c$ sind und als Oktett transformieren. Es macht keinen Sinn, bestimmte Elemente des Oktetts auszuzeichnen, weil diese ununterscheidbar sind.) Mit (185) ist

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig_1 Y B_\mu \xrightarrow{C} \partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma^{a*}}{2} W_\mu^a + ig_1 Y B_\mu = D_\mu^* \quad (186)$$

Also ist

$$[D_\mu \Phi]^\dagger D^\mu \Phi \xrightarrow{C} [D_\mu^* \Phi^*]^\dagger [D^{\mu*} \Phi^*] = [D_\mu \Phi]^\dagger D^\mu \Phi$$

und $[D_\mu \Phi]^\dagger D^\mu \Phi$ ist invariant unter C . Ebenso ist $[D_\mu \Phi']^\dagger D^\mu \Phi'$ invariant mit (183). Betrachtet man also **nur** die Eichwechselwirkungen der Bosonen, so kann man allen Boson-Feldern C- und P-Quantenzahlen zuordnen, so dass alle Wechselwirkungen C-, P- (und damit auch T-)invariant sind.

A	1^{--}	$W^\pm, 1^-$
Z	1^{--}	$H^\pm, 0^+$
h^0, h'^0	0^{++}	
A^0	0^{+-}	$H^\pm \xrightarrow{C} H^\mp$

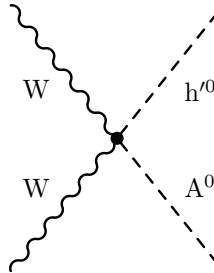
Diese Quantenzahlen sind für $\varphi_{CP} = 0$. Für $\varphi_{CP} = \pi$ ändern sich die C-Quantenzahlen von h'^0, A^0 und $H^\pm \xrightarrow{C} -H^\mp$. Beispielsweise gibt es keinen ZZG^0 -Vertex, der ja C verletzt. In der Tat käme dieser Vertex aus

$$[D_\mu \Phi]^\dagger D^\mu \Phi \supset \frac{g_2^2}{2} Z_\mu Z^\mu (v - iG^0)(v + iG^0)$$

wo sich vG^0 herauskürzt. Ebenso gilt

$$h'^0 A^0 W_\mu^+ W^{\mu-} \xrightarrow{C} h'^0 (-A^0) W_\mu^- W^{\mu+}$$

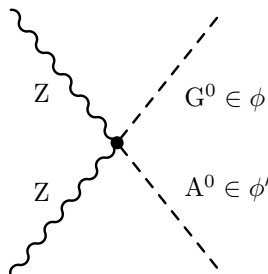
Daraus folgt, dass es keine Kopplung der Form



gibt. Außerdem gibt es wegen

$$[D_\mu H_u]^\dagger D^\mu H_u + [D_\mu H_d]^\dagger D^\mu H_d = [D_\mu \phi]^\dagger D^\mu \phi + [D_\mu \phi']^\dagger D^\mu \phi'$$

keine Eichwechselwirkung mit sowohl Teilchen aus ϕ und ϕ' . Beispielsweise existiert kein Vertex



der jedoch C -erlaubt wäre. Kommen wir nun zur Selbstwechselwirkung aus V (mit zunächst $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$). V ist C -invariant für $\varphi_{CP} = 0$ und reelles m_{12}^2 und λ_5 . Dann mischt A^0 nicht mit h^0 , h'^0 und A^0 ist Masseneigenzustand. Aus (169) folgen mit (177) die Gleichungen (178) und (162). Aus (169) folgt mit (177), (178) und (162) sofort:

$$\begin{aligned} G^0 &= h_d^0 \cos \beta + h_u^0 \sin \beta \\ A^0 &= -h_d^0 \sin \beta + h_u^0 \cos \beta \\ G^\pm &= h_d^\pm \cos \beta + h_u^\pm \sin \beta \\ H^\pm &= -h_d^\pm \sin \beta + h_u^\pm \cos \beta \end{aligned} \quad (188)$$

Einsetzen von (siehe (169))

$$\begin{pmatrix} \phi_d \\ -\phi_u^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} \quad (189)$$

in \mathcal{L}_Y^q in (171) liefert direkt die Yukawa-Kopplungen von G^0 , A^0 , G^\pm , H^\pm wie im Standardmodell.

4.1.1 Beispiel: H^\pm -Kopplungen im Typ-II-Modell

Schauen wir uns Gleichung (174) an, wobei die Up-Basis mit (47), (48) verwendet wird:

$$\mathcal{L}_Y^q \stackrel{(189)}{=} - \sum_{k=1}^3 \{ V_{jk} y_k^d \bar{Q}_j [\Phi \cos \beta - \Phi' \sin \beta] d_{Rk} + Y_R^u \bar{Q}_R [\Phi^c \sin \beta + \Phi'^c \cos \beta] u_{Rk} \} + \text{h.c.} \quad (190)$$

Wegen (siehe (178))

$$\Phi' = \begin{pmatrix} H^+ \\ \frac{h'_0 + iA^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

folgt aus (190):

$$\mathcal{L}_Y^q \supset \sum_{k=1}^3 \left\{ V_{jk} y_k^d \bar{u}_{Lj} H^+ d_{Rk} \sin \beta + y_R^u \bar{d}'_{Lk} H^- u_{Rk} \cos \beta \right\} + \text{h.c.} \quad (191)$$

mit dem Wechselwirkungseigenzustand

$$Q_j = \begin{pmatrix} u_j \\ d'_j \end{pmatrix}$$

Um die Down-Quark-Massenmatrix zu diagonalisieren, muss man (siehe (51)) noch

$$\bar{d}'_{Lk} = V_{kj}^* \bar{d}_{Lj}$$

transformieren und findet (inklusive h.c.):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^q \supset \sum_{k=1}^3 \{ & V_{jk} y_k^d \bar{u}_{Lj} H^+ d_{Rk} \sin \beta + V_{jk}^* y_k^d \bar{d}_{Rk} H^- u_{Lj} \sin \beta \\ & + V_{kj}^* y_k^u \bar{d}_{Lj} H^- u_{Rk} \cos \beta + V_{kj} y_k^u \bar{u}_{Rk} H^+ d_{Lj} \cos \beta \} \end{aligned} \quad (192)$$

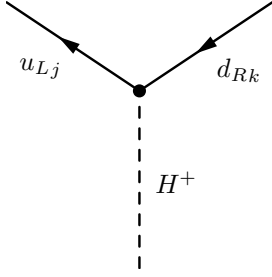
Relation zwischen y_k^q und m_q : In (190) setzt man $\phi \mapsto \phi_{\min} = (0, v)$:

$$\mathcal{L}_m^q = - \sum_{k=1}^3 \{ m_{dR} \bar{d}_{Lk} d_{Rk} + m_{uR} \bar{u}_{Lk} u_{Rk} + \text{h.c.} \} \stackrel{!}{=} - \sum_{k=1}^3 \{ y_k^d v \bar{d}_{Lk} d_{Rk} \cos \beta + y_k^u \bar{u}_{Lk} u_{Rk} \sin \beta \} \quad (198)$$

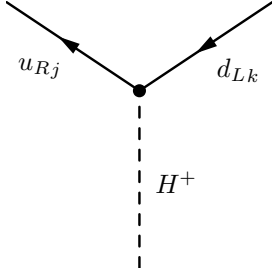
Aus $\bar{d}'_L V \hat{Y}^d = \bar{d}_L V^\dagger V \hat{Y}^d$ ergibt sich

$$y_k^d = \frac{m_{dR}}{v \cos \beta} \quad \text{und} \quad y_R^u = \frac{m_{uR}}{v \sin \beta} \quad (194)$$

und die H^+ -Feynmanregeln aus (192) sind:

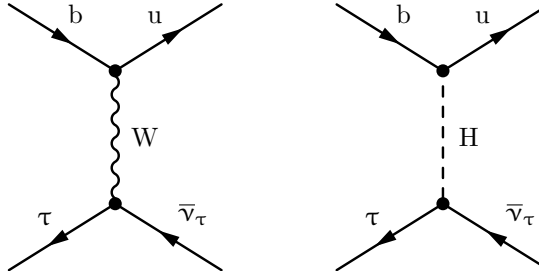


$$: \quad iV_{jk} \sin(\beta) y_k^d P_R \stackrel{(194)}{=} iV_{jk} \frac{m_{dk}}{v} \tan(\beta) P_R \quad (195)$$



$$: \quad iV_{jk} \cos(\beta) y_j^u P_L = iV_{jk} \frac{m_{uj}}{v} \cot(\beta) P_L \quad (196)$$

Vereinheitlichung von y_b und y_t bedeutet $\tan \beta \approx 52$. Dann sind die Kopplungen des H^+ an b_R und τ_R um den Faktor $\tan \beta$ in (195) verstärkt und man wird eine Veränderung (Verringerung) des Verzweungsverhältnisses von $B^- \mapsto \tau^- \nu_\tau$ sehen.



Die Kopplungen hier sind zwar ähnlich groß, besitzen aber entgegengesetztes Vorzeichen.

4.1.2 Higgs-Massenmatrix

Um das Minimum des Potentials zu finden, betrachten wir komplexe v_d und v_u .

$$0 = \left. \frac{\partial V(\phi_u, \phi_d)}{\partial h_d^0} \right|_{\substack{h_d^0 = v_d \\ h_u^0 = v_u \\ h_u^\pm = 0}}$$

Hieraus folgt:

$$0 = m_{11}^2 v_d^* - m_{12}^2 v_u^* + \lambda_1 |v_d|^2 v_d^* + (\lambda_3 + \lambda_4) |v_u|^2 v_d^* + \lambda_5^* v_u^{*2} v_d - \lambda_6^* v_d^* v_u - 2\lambda_6^* |v_d|^2 v_u^* - \lambda_7^* |v_u|^2 v_u^*$$

Die Bedingung $0 = \partial V / \partial h_d^{0*}$ liefert die komplex konjugierte Gleichung (197).

$$0 = \left. \frac{\partial V(\phi_u, \phi_d)}{\partial h_u^0} \right|_{h_d^0 = v_d, h_u^0 = v_u, h_u^\pm = 0}$$

$$0 = m_{22}^2 v_u^* - m_{12}^2 v_d^* + \lambda_2 |v_u|^2 v_u^* + (\lambda_3 + \lambda_4) |v_d|^2 v_u^* + \lambda_5 v_d^{*2} v_u - \lambda_6 |v_d|^2 v_d^* - \lambda_7^* v_u^{*2} v_d - 2\lambda_7 |v_u|^2 v_u^* \quad (198)$$

Ist (v_u, v_d) eine Lösung von (197) und (198), so auch $(v_u \exp(i\varphi), v_d \exp(i\varphi))$ mit beliebigem φ . Daraus folgt $U(1)_Y$ -Invarianz. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v_u = |v_u|$ und $v_d = |v_d| \exp(-i\xi)$. Außerdem gilt:

$$v_u^2 + |v_d|^2 = v^2 = (174 \text{ GeV})^2$$

Hier wollen wir die kubischen Gleichungen (197) und (198) für den Fall großer $\tan \beta$ lösen, also für $|v_d| \ll v_u$. Betrachten wir nur lineare Terme in v_d , so können wir $v_u^2 = v^2 - v_d^2 \approx v^2$ verwenden. Dann folgt aus (197)

$$0 \stackrel{\bullet}{=} m_{11}^2 v_d^* - m_{12}^2 v_u + (\lambda_3 + \lambda_4) v^2 v_d^* + \lambda_5^* v^2 v_d - \lambda_7^* v^2 v_u \quad (199)$$

und aus (198):

$$0 \stackrel{\bullet}{=} m_{22}^2 v_u - m_{12}^2 v_d^* + \lambda_2 v^2 v_u - \lambda_7^* v^2 v_d - 2\lambda_7 v^2 v_d^* \quad (200)$$

Aus der Linearkombination $\lambda_7^*(199) + \lambda_5^*(200)$ (für $(\lambda_5, \lambda_7) \neq (0, 0)$) folgt:

$$\exp(i\xi) \cot(\beta) = \frac{v_d^*}{v_u} = \frac{\lambda_7^*(m_{12}^{*2} + \lambda_7^* v^2) - \lambda_5^*(m_{22}^2 + \lambda_2 v^2)}{\lambda_7^*(m_{11}^2 + (\lambda_3 + \lambda_4)v^2) - \lambda_5^*(m_{12}^2 + 2\lambda_7 v^2)} + \mathcal{O}(\cot^2 \beta) \quad (201)$$

Einsetzen in (200) oder (199) liefert die Relation zwischen v^2 und m_1^2, m_2^2, m_{12}^2 (und den λ 's). Ist $(\lambda_5, \lambda_7) = (0, 0)$, so folgt aus (199), (200)

$$\frac{v_d^*}{v_u} \stackrel{(199)}{=} \frac{m_{12}^{*2}}{m_{11}^2 + (\lambda_5 + \lambda_7)v^2} \stackrel{(200)}{=} \frac{m_{22}^2 + \lambda_2 v^2}{m_{12}^2} + \mathcal{O}(\cot^2 \beta) \quad (202)$$

was auch v^2 bestimmt.

4.1.3 Bemerkungen zum Potential

- 1.) Damit spontane Symmetriebrechung auftritt, darf V bei $\phi_u = \phi_d = 0$ kein Minimum haben. Also muss $m_{11}^2 < 0$ oder $m_{22}^2 < 0$ oder $m_{11}^2 m_{22}^2 - |m_{12}^2|^2 < 0$ sein.
- 2.) Die Brechung $SU(2) \times U(1)_Y \mapsto U(1)_{\text{em}}$ ist nicht automatisch so gegeben wie im Standardmodell. Es könnten Vakuumerwartungswerte wie

$$\phi_{d,\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_d \end{pmatrix}, \quad \phi_{u,\min} = \begin{pmatrix} v_u \\ v_u^- \end{pmatrix}$$

aufzutreten, wenn die Parameter in V falsch gewählt sind. Das heißt, im Minimum muss

$$\left. \frac{\partial V}{\partial h_u^+ \partial h_u^-} \right|_{h_u^\pm=0} > 0$$

erfüllt sein.

Wir betrachten das allgemeinste $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \times P$ -invariantes **Higgs-Potential**:

$$\begin{aligned} V(\Delta_L, \Delta_R, \phi) = & -\mu_1^2 \text{Sp}(\phi^\dagger \phi) - \mu_2^2 \left\{ \text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger) + \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \phi) \right\} - \mu_3^2 \left\{ \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right\} \\ & + \lambda_1 [\text{Sp}(\phi \phi^\dagger)]^2 + \lambda_2 \left\{ [\text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger)]^2 + [\text{Sp}(\phi^{c\dagger} \phi)]^2 \right\} \\ & + \lambda_3 \text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger) \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \phi) + \lambda_4 \text{Sp}(\phi \phi^\dagger) [\text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger) + \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \phi)] \\ & + \varrho_1 \left\{ [\text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger)]^2 + [\text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger)]^2 \right\} \\ & + \varrho_2 \left\{ \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L) \text{Sp}(\Delta_L^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R) \text{Sp}(\Delta_R^\dagger \Delta_R^\dagger) \right\} \\ & + \varrho_3 \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \\ & + \varrho_4 \left\{ \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L) \text{Sp}(\Delta_R^\dagger \Delta_R^\dagger) + \text{Sp}(\Delta_L^\dagger \Delta_L^\dagger) \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R) \right\} \\ & + \alpha_1 \text{Sp}(\phi \phi^\dagger) \left\{ \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right\} \\ & + \alpha_2 \left\{ \text{Sp}(\phi \phi^{c\dagger}) \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger) \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right\} \\ & + \alpha_2^* \left\{ \text{Sp}(\phi^c \phi^\dagger) \text{Sp}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Sp}(\phi \phi^{c\dagger}) \text{Sp}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right\} \\ & + \alpha_3 \left\{ \text{Sp}(\phi \phi^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\phi^\dagger \phi \Delta_R \Delta_R^\dagger) \right\} + \beta_1 \left\{ \text{Sp}(\phi \Delta_R \phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\phi^\dagger \Delta_L \phi \Delta_R^\dagger) \right\} \\ & + \beta_2 \left\{ \text{Sp}(\phi^c \Delta_R \phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \Delta_L \phi \Delta_R^\dagger) \right\} + \beta_3 \left\{ \text{Sp}(\phi \Delta_R \phi^{c\dagger} \Delta_L^\dagger) + \text{Sp}(\phi^\dagger \Delta_L \phi^c \Delta_R^\dagger) \right\} \end{aligned} \quad (258)$$

Alle Parameter außer α_2 sind reell. Exemplarisch führen wir das Ganze für den β_2 -Term durch. $\text{Sp}(\phi^c \Delta_R \phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{h.c.}$ transformiert sich folgendermaßen:

- $SU(2)_L \times SU(2)_R$:

$$\text{Sp}(U_L \phi^c U_R^\dagger U_R \Delta_R U_R^\dagger U_R \phi^\dagger U_L^\dagger U_L \Delta_L^\dagger U_L^\dagger) + \text{h.c.} = \text{Sp}(\phi^c \Delta_R \phi^\dagger \Delta_L^\dagger)$$

\Rightarrow Invarianz

- $U(1)_{B-L}$: $\phi^c \Delta_R \phi^\dagger \Delta_L^\dagger$ Quantenzahlen: $\sum = 0 + 2 + 0 - 2 = 0$ (Invarianz)
- P : $\mapsto \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \Delta_L \phi \Delta_R^\dagger) = \text{h.c.}$
- C : $\mapsto \text{Sp}(\phi \Delta_R^c \phi^{c\dagger} \Delta_L^c) = \text{Sp}(\phi \varepsilon \Delta_R^* \varepsilon^\dagger \varepsilon \phi^* \varepsilon^\dagger \varepsilon \Delta_L^\dagger \varepsilon^\dagger)$

$$\underline{\text{Sp}(X) = \text{Sp}(X^\top)}, \text{Sp}(\varepsilon \Delta_L \phi^\dagger \Delta_R^\dagger \varepsilon^\dagger \phi^\top) = \text{Sp}(\phi^{c\dagger} \Delta_L \phi^\dagger \Delta_R^\dagger) = \text{h.c.}$$

V ist invariant unter C für $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Das Minimieren von V ist handhabbar, wenn man in $\delta = v/v_R$ entwickelt.

$$0 = \left. \frac{\partial V}{\partial \delta_R^{0*}} \right|_{\text{VEV}} = v_R [-\mu_3^2 + 2\varrho_1 v_R^2] + v_R \{ \varrho_3 |v_L|^2 + \alpha_1 (v_u^2 + |v_d|^2) + 4v_u \text{Re}(\alpha_2 v_d) + \alpha_3 |v_d|^2 \} + v_L \{ \beta_1 v_u v_d^* + \beta_2 v_u^2 + \beta_3 v_d^{*2} \} \quad (259)$$

(259) bedeutet

$$v_R^2 = \frac{\mu_3^2}{2\varrho_1} (1 + \mathcal{O}(\delta^2)) \quad (260)$$

was v_R bestimmt.

$$0 = \text{Im}(259) = \beta_1 v_u \text{Im}(v_L v_d^*) + \beta_2 v_u^2 \text{Im}(v_d^*) + \beta_3 \text{Im}(v_L v_d^{*2}) \quad (260a)$$

(260a) setzt die Phasen von v_L und v_d zueinander in Beziehung.

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \delta_L^{0*}} = \{ (-\mu_3^2 + \varrho_3 v_R^2) v_L + (\beta_1 v_u v_d + \beta_2 v_u^2 + \beta_3 v_d^2) v_R \} (1 + \mathcal{O}(\delta^3)) \quad (261)$$

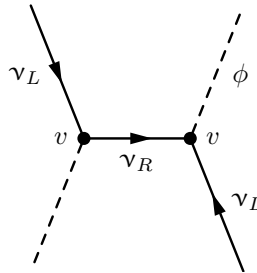
(261) impliziert

$$v_L v_R = \frac{\beta_1 v_u v_d + \beta_2 v_u^2 + \beta_3 v_d^2}{\frac{\mu_3^2}{v_R^2} - \varrho_3} \quad (262)$$

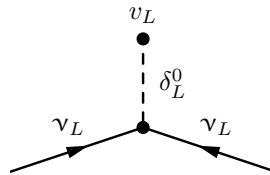
womit also gilt:

$$|v_L| = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{v_R}\right) \quad (263)$$

(263) ist eine **See-Saw-Relation** für VEVs; man spricht vom **Typ-II-See-Saw-Mechanismus**.



$$M_{\nu_L} = \frac{M_0^2}{M_{\nu_R}} = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{v_R}\right)$$



$$M_{\nu_L} = h^2 v_L \stackrel{(263)}{=} \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{v_R}\right)$$

Hier ist keine Dirac-Yukawa-Kopplung involviert!

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_1^0} = \{-\mu_1^2 v_u - \mu_2^2 v_d + \alpha_1 v_u [v_R^2 + |v_L|^2] + 2v_d [\alpha_2 v_R^2 + \alpha_2^* |v_L|^2]\} (1 + \mathcal{O}(\delta^3)) \quad (264)$$

$$\Rightarrow \frac{v_d}{v_u} = \frac{\mu_1^2 - \alpha_1 v_R^2}{2\alpha_2 v_R^2 - \mu_2^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (265)$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_2^{0*}} = [-\mu_1^2 v_d - \mu_2^2 v_u + \alpha_1 v_d v_R^2 + 2\alpha_2^* v_u v_R^2 + \alpha_3 v_d v_R^2][1 + \mathcal{P}(\delta^3)] \quad (266)$$

$$\Rightarrow \frac{v_d}{v_u} = \frac{\mu_2^2 - 2\alpha_2^* v_R^2}{(\alpha_1 + \alpha_3)v_R^2 - \mu_1^2} + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (267)$$

Setzt man (265)=(267), so findet man eine Feinabstimmungsbeziehung zwischen μ_1^2 , μ_2^2 , $\alpha_{1,2,3}$:

$$|\mu_2^3 - 2\alpha_2 v_R^2|^2 = (\mu_1^2 - \alpha_1 v_R^2)(\mu_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_3)v_R^2)[1 + \mathcal{O}(\delta^3)] \quad (268)$$

Nur, wenn die unnatürliche Beziehung (268) erfüllt ist, findet man $v_R \gg v$. Im Allgemeinen erfüllt man (268), indem man $\mu_1^2 = \mathcal{O}(v^2)$ und $\mu_2^2 = \mathcal{O}(v^2)$ und $\alpha_{1,2,3} = \mathcal{O}(\delta^2)$ wählt. Wähle alternativ $\mu_3^2 = \mathcal{O}(v^2)$ und $\varrho_1 = \mathcal{O}(\delta^2)$ in (260). Dann ist v_R durch (268) definiert und (259) definiert die elektroschwache Skala v . Berechnet man die Higgs-Massen, so findet man als Niederenergieetheorie nur dann das Standardmodell, wenn (268) mit $\mu^2 := \mathcal{O}(v_R^2)$, $d := \mathcal{O}(1)$ feinabgestimmt ist.

Ansonsten findet man im Entkopplungslimes $v_R \gg v$ ein 2-HDM (mit gefährlichen FCNCs) oder ein zusätzliches leichtes Higgs-Triplett, das LEP-I gefunden hätte. Der Beitrag von v_L zum ϱ -Parameter berechnet sich aus (93):

$$\varrho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_w} = 1 + \Delta\varrho^{\text{SM}} + \Delta\varrho^{\text{NP}}$$

$\Delta\varrho^{\text{SM}}$ rührt von Schleifenbeiträgen und $\Delta\varrho^{\text{NP}}$ von neuer Physik her. Durch Messungen folgt $\Delta\varrho_{\text{SM}} = 0,0098$. Man kann eine konservative Abschätzung der Form machen, dass $|\Delta\varrho^{\text{NP}}|$ maximal das Dreifache der Standardmodell-Higgs-Beiträge (0,0007) sein. Damit gilt dann $|\Delta\varrho^{\text{NP}}| \leq 0,002$. Δ_L koppelt an W_L und Z_L und trägt zu M_W und M_Z bei. Eine Theorie mit mehreren Higgs-Multipletts ϕ_j mit Quantenzahlen (I_{Lj}, Y_j) und dem Vakuumerwartungswert v_j hat den Baumgraphen- ϱ -Parameter :

$$\varrho^{\text{tree}} = \frac{\sum_j [I_{Lj}(I_{Lj} + 1) - Y_j^2] |v_j|^2 c_j}{2 \sum_j Y_j^2 |v_j|^2} \quad \text{wobei } c_j = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \phi_j \text{ komplexes Feld ist} \\ 1/2 & \text{wenn } \phi_j \text{ reelles Feld ist} \end{cases}$$

Im Standardmodell mit $c_1 = 1$, $I_{L1} = 1/2$ und $Y_1 = 1/2$ gilt tatsächlich $\varrho^{\text{tree}} = 1$. Im LR-Modell gilt:

- $j = 1$: $2\phi_u, \phi_d \in \Phi$: $I_{Lj} = 1/2$; $Y_j = \pm 1/2$; $v_1 = v_u, v_2 = v_d$
- $j = 3$: δ_R^0 : $I_{L3} = 0$, $Y_3 = 0$; $v_3 = v_R$
- $j = 4$: Δ_L : $I_{L4} = 1$; $Y_4 = (B - L)/2 = 1$; $v_4 = v_L$

Es gilt weiterhin $c_j = 1$ für $j = 1, 2, 3$ und 4. Damit folgt:

$$\varrho^{\text{tree}} = \frac{\frac{1}{2}(v_u^2 + |v_d|^2) + |v_L|^2}{\frac{1}{2}(v_u^2 + |v_d|^2) + 2|v_L|^2} \simeq 1 - \frac{2|v_L|^2}{v^2}$$

Aus der Schranke $|\Delta\varrho^{\text{NP}}| \leq 0,002$ folgt $|v_L| \leq 0,03v = 5,5 \text{ GeV}$. Dann ergibt sich aus $|v_L| \sim v^2/v_R$ folgt $v_R > 5,5 \cdot 10^3 \text{ GeV}$. Im LR-Modell gibt es weitere Korrekturen zum ϱ -Parameter, weil W_L und W_R keine Masseneigenzustände sind, sondern

$$W_1 = W_L + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{v_R^2}\right) W_R$$

$$W_2 = W_R + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{v_R^2}\right) W_L$$

Ebenso mischen Z_L und Z_R .

4.1.4 Zusammenfassung

Im LR-Modell

- versteht man die Hyperladung als

$$Y = I_R^3 + \frac{B-L}{2}$$

und $U(1)_{B-L}$ ist geeicht,

- ist die Parität spontan gebrochen und spontane C -Brechung ist ebenfalls möglich,
- mit Triplett-Feldern Δ_R, Δ_L
 - gibt es die See-Saw-Mechanismen der Typen I und II, die beide zu Neutrino-Massen der Ordnung v^2/v_R führen. Hieraus folgt $v_R = \mathcal{O}(10^{13} \text{ GeV})$.
 - findet man im Allgemeinen mehr als ein leichtes (also mit Massen $\sim u$ oder $\sim v_L$) Higgs-Boson.

Ist das Ladungsquantisierungsproblem gelöst? Wählt man andere $B-L$ -Quantenzahlen und ersetzt beispielsweise $B-L$ durch $(B-L)(1+\varepsilon)$ für alle Fermionen, so findet man wieder die lebensfeindlichen Quantenzahlen von (159) ff. Damit muss der $U(1)_{B-L}$ -Faktor in einer nichtabelschen Gruppe aufgehen! Schreibe $SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ -Transformationen als 4×4 -Matrix. Mit $U_3 \in SU(3)$ als 4×4 -Matrix: Mit $U_3 \in SU(3)_c$ und $\exp(i\varphi(B-L)) \in U(1)_{B-L}$ ist

$$\begin{pmatrix} Q_L^r \\ Q_L^g \\ Q_L^b \\ L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(3)_c \times U(1)_{B-L}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_3 \exp(i\varphi/3) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi) \end{pmatrix}}_{U_4} \begin{pmatrix} Q_L^r \\ Q_L^g \\ Q_L^b \\ L \end{pmatrix}$$

Ebenso kann man dies für Q_R und R tun. U_4 ist offensichtlich unitär. Wegen $\det(U_4) = 1$ ist $U_4 \in SU(4)$! Diese Einbettung $SU(3)_c \times U(1)_{B-L} \subset SU(4)$ ist nur möglich, weil

$$\text{Sp}(B-L) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ist, die $B-L$ -Quantenzahlen von Quarks- und Lepton-Dubletts der gleichen Chiralität sich also zu Null summieren. Das LR-Modell lässt sich also einbetten in das **Pati-Salam-Modell** mit Eichgruppe $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ (270), wobei $SU(4) \supset SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ ist. v_R führt zur Brechung $SU(3)_c \times U(1)_Y \times SU(2)_L$ und v bricht dies zu $SU(3)_c \times U(1)_{\text{em}}$. (J. Pati und A. Salam, PR D, no.1 (1974) 275: **Lepton number as the forth „color“**). $SU(4)$ hat $4^2 - 1 = 15$ Generatoren. Die ersten acht kann man als

$$T^a = \begin{pmatrix} \lambda^a/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (271)$$

mit den Gell-Mann-Matrizen λ^a wählen. (271) ist so normiert, dass

$$\text{Sp}[T^a, T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (272)$$

wobei der Faktor $1/2$, welcher die Normierung festlegt, der sogenannte Dynkin-Index ist. Die $SU(4)$ -Kopplung ist gleich der $SU(3)_c$ -Kopplung g_3 . Der $B-L$ -Generator in $SU(4)$ ist

$$T^{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{8}}(B-L) \quad (273)$$

In der $SU(4)$ -Normierung ist die $B-L$ -Kopplung g' aus (220) durch

$$g' = \sqrt{\frac{3}{2}} g_3 \quad (274)$$

gegeben. Sei $i = 1, 2$ der Isospinindex und $a = 1, 2, 3, 4$ der Farbindex, so gilt:

$$\psi_{ia}^L := \begin{cases} Q_{Li}^a & \text{für } a \leq 3 \\ L_i & \text{für } a = 4 \end{cases} \quad (275)$$

Analog $\psi_{i,a}^R$ (Generationenindex hier unterdrückt) also:

$$\psi^L = \begin{pmatrix} U_L^r & U_L^g & U_L^b & \nu_L \\ d_L^r & d_L^g & d_L^b & e_L \end{pmatrix} \quad (276)$$

Und mit $U_L \in \text{SU}(2)_L$ und $U_4 \in \text{SU}(4)$:

$$\psi^L \xrightarrow{\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(4)} U_L \psi_L U_4^\dagger \quad (277)$$

Eichkinetischer Term der Fermionen:

$$\mathcal{L}_F = \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{a=1 \\ b=1}}^4 \left[\bar{\psi}_a^{Lj} i \not{D}_{ab} \psi_b^{Lj} + \bar{\psi}_a^{Rj} i \not{D}_{ab} \psi_b^{Rj} \right]$$

Die erste Summe läuft über die Generationen; ψ_b^{Lj} ist ein $\text{SU}(2)_L$ -Dublett (278). Die kovariante Ableitung lautet:

$$D_{\mu ab} \psi_b^{Lj} = \partial_\mu \psi_a^{Lj} - ig_3 A_\mu^c T_{ab}^c \psi_b^{Lj} - ig_L W_{L\mu}^c \frac{\sigma^c}{2} \psi_a^{Lj} \quad (279)$$

T_{ab}^c folgt aus (271). Analog gilt das für $D_{\mu ab} \psi_b^{Rj}$.

Kapitel 5

Große vereinheitlichte Theorie

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Komponenten bilden ein Farb-Triplett und ein SU(2)-Singulett, die unteren beiden ein Farb-Singulett und ein SU(2)-Dublett. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_R^r \\ d_R^g \\ d_R^b \end{pmatrix}; \quad Y = -\frac{1}{3}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten für die Wahl von ψ_4 und ψ_5 mit rechtshändigen Feldern.

$$\begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix} = \varepsilon^\top L^c = \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ e_L^c \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix} = L^c = \begin{pmatrix} e_L^c \\ -\nu_L^c \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen gilt $Y = 1/2$. Die erste Möglichkeit kann nicht funktionieren, weil die Felder die gleiche Chiralität haben müssen. Ansonsten wird die Eichinvarianz gebrochen. (286) erfordert, dass die Hyperladung der fünf Felder ψ_i sich zu Null summieren: $\text{Sp}(Y) = 0$. Nach Möglichkeit (2) gilt:

$$\psi^c = \begin{pmatrix} d_R^r \\ d_R^g \\ d_R^b \\ L^c \end{pmatrix} \tag{287}$$

Die andere Möglichkeit (1) führt zu flipped SU(2). Mit $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top = (u_R^r, u_R^g, u_R^b)^\top$ gilt nicht $\text{Sp}(Y) = 0$. Die Aufgabe besteht nun darin, $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ in SU(5) einzubetten. Mit $U(5) \in \text{SU}(5)$ soll sich ψ wie

$$\psi^c \mapsto U_5 \psi^c \tag{288}$$

transformieren. ψ gehört also zur definierenden Darstellung $\underline{5}$ der SU(5). Üblich ist, dass alle betrachteten Felder linkshändig sind; das heißt, anstelle von d_R betrachtet man

$$d^c = C \bar{d}_R^\top \tag{289}$$

und erhält:

$$\psi = \begin{pmatrix} d^{cr} \\ d^{cb} \\ d^{cg} \\ e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix} \in \underline{5}^* \tag{290}$$

Was ist mit den anderen zehn Fermionen? Kommen wir nun zur Darstellungen der SU(5):

$$M_{ij} \in \underline{5} \times \underline{5}$$

Man zerlegt das Tensorprodukt der Darstellungen in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Aus der Darstellungstheorie folgt, dass beide Anteile irreduzibel sind.

$$M_{ij} = \underbrace{\frac{M_{ij} - M_{ji}}{2}}_{\in \underline{10}} + \underbrace{\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2}}_{\in \underline{15}}$$

$\chi \in \underline{10}$ transformiert sich also wie

$$\chi \xrightarrow{\text{SU}(5)} U_5 \chi U_5^\top \quad (\chi_{ij} \mapsto \chi'_{j'} = U_{5i'i} U_{5j'j} \chi_{ij}) \quad (291)$$

$$\chi = \left(\begin{array}{c|c} \text{Farbe} & \text{Farbe} \\ \text{kein } I_L & \text{und } I_L \\ \hline \text{Farbe} & \text{könnte } I_L \\ \text{und } I_L & \text{keine Farbe} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \text{Farbe} \\ \text{kein } I_L \\ \hline \text{Farbe} \\ \text{und } I_L \end{array}} \right\} 3 \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \text{Farbe} \\ \text{kein } I_L \\ \hline \text{Farbe} \\ \text{und } I_L \end{array}} \right\} 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u^{cb} & -u^{cg} & u_L^r & d_L^r \\ -u^{cb} & 0 & u^{cr} & u_L^g & d_L^g \\ u^{cg} & -u^{cr} & 0 & u_L^b & d_L^b \\ -u_L^r & -u_L^g & -u_L^b & 0 & e^c \\ -d_L^r & -d_L^g & -d_L^b & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (292)$$

Wegen

$$e^c \varepsilon \xrightarrow{\text{SU}(2)} e^c U_2 \varepsilon U_2 = e^c \varepsilon$$

ist e^c ein SU(2)-Singulett. (290) und (292) entsprechen den Zerlegungen

$$\underline{5}^* = (3^*, 1) \oplus (1, 2^*), \quad \underline{10} = (3^*, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \quad (293)$$

Der Hyperladungoperator ist gegeben durch

$$Y = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

denn es gilt:

$$Y \cdot \psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} d_R \\ \frac{1}{2} L^c \end{pmatrix}$$

Wegen (291) misst man die Hyperladung

$$Y \chi + \chi Y^\top = Y \chi + \chi Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \chi_{3 \times 3} & \frac{1}{6} \chi_{3 \times 2} \\ \frac{1}{6} \chi_{2 \times 3} & \chi_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

Das sind die korrekten Hyperladungen der Felder in (292). Die SU(5)-Symmetrie legt die Normierung der Hyperladung fest. Die SU(5) besitzt 24 Generatoren $\lambda^a/2$ mit

$$\lambda^a = \begin{pmatrix} \lambda_{\text{GM}}^a & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{für } a = 1, \dots, 8$$

$$\lambda^{20+a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix} \quad \text{für } a = 1, 2, 3$$

Hierbei werden mit λ_{GM}^a ($a = 1, \dots, 8$) die Gell-Mann-Matrizen bezeichnet. Durch schlichten Vergleich finden wir (und weil die Normierung aller Generatoren festgelegt ist) aus (294):

$$\lambda^{24} = -2 \sqrt{\frac{3}{5}} Y \quad (295)$$

Also ist die $U(1)_Y$ -Transformation

$$\exp \left(i \frac{\lambda^{24}}{2} \right) = \exp(iY)$$

Die kovariante Ableitung mit den Eichbosonen G_μ^a in der SU(5) ist gegeben durch:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (296)$$

Durch Vergleich mit (9) (und (294)) ist erkennbar, dass G_μ^a für $a = 1, \dots, 8$ den Gluonen entsprechend. Weiterhin gilt $G_\mu^{20+a} = W_\mu^a$ für $a = 1, 2, 3$ und $G_\mu^{24} = B_\mu$.

$$g_2 = g_3 \stackrel{(295)}{=} \stackrel{(296)}{=} -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1 =: g'_1 = g \quad (297)$$

g'_1 wird auch als „ g_1 in SU(5)-Normierung“ bezeichnet. Wie in (69) ff. gesehen, treffen sich g'_1 , g_2 und g_3 fast bei etwa 10^{15} GeV.

Die Vereinheitlichung des Standardmodells in eine SU(5)-GUT passt fast genau, braucht aber Korrekturen wie beispielsweise

- i.) mehr Teilchen mit Masse $m_i \ll M_{\text{GUT}}$, welche die β -Funktionen in (69) abändern. Dies ist in Supersymmetrie realisiert (de Boer, Fürstenau, Amaldi).
- ii.) g'_1 und g_2 treffen sich zuerst bei etwa $7 \cdot 10^{12}$ GeV. Dort könnten sich $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$ vereinigen. Die große Vereinheitlichung findet später statt.

(ii) klappt nicht mit

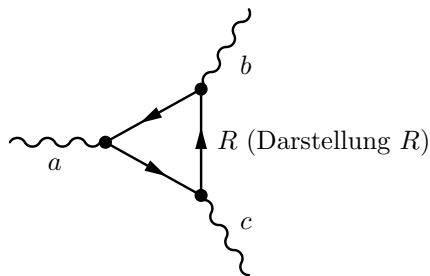
$$G_{LR} = SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$$

und SU(5), denn es gilt

$$\text{Rang}(SU(5)) = \text{Rang}(G_{\text{SM}}) = 4, \text{Rang}(G_{LR}) = 5$$

so dass die Symmetriegruppe des Links-Rechts-Modells keine Untergruppe von SU(5) sein kann.

Kommen wir zum Anomaliecheck:



Man kann zeigen, dass der Anomaliekoeffizient für Fermionen in der Darstellung R die Form

$$D_R^{abc} = \frac{1}{2} \text{Sp}[\{T_R^a, T_R^b\} \cdot T_R^c] = \frac{A(R)}{2} d^{abc} \quad (298)$$

hat, wobei d^{abc} durch

$$\left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} = d^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (299)$$

definiert ist. Dabei gilt

$$A(\underline{5}) = 1 \quad (300)$$

Wegen (298) können wir $A(\underline{10})$ beispielsweise mit $a = b = c = 24$ berechnen, denn es gilt:

$$d^{24,24,24} = \text{Sp} \left(\frac{\lambda^{24}}{2} \right)^3 = -\frac{1}{4\sqrt{15}} \quad (301)$$

$$\Rightarrow D_{\underline{10}}^{abc} = \frac{A(\underline{10})}{2} d^{abc} \stackrel{(298)}{=} \frac{1}{2} \text{Sp} [\{T_{\underline{10}}^a, T_{\underline{10}}^b\}, T_{\underline{10}}^c]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\underline{10}) &= \frac{1}{d^{24,24,24}} \text{Sp} [\{T_{\underline{10}}^{24}, T_{\underline{10}}^{24}\} T_{\underline{10}}^{24}] \stackrel{(295)}{=} -4\sqrt{15} \cdot \left(-\frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \text{Sp}[\{Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{10}}\} Y_{\underline{10}}] = \\ &= \frac{36}{5} \text{Sp}(Y_{\underline{10}}^3) = \frac{36}{5} \sum_{f \in \underline{10}} y_f^3 \stackrel{(292)}{=} \frac{36}{5} \left[3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^3 + 1^3 \right] = 1 \end{aligned} \quad (302)$$

Wegen $A(\underline{5}^*) = -A(\underline{5})$ (denn Ladungskonjugation dreht alle Hyperladungen um) finden wir $A(\underline{5}^*) + A(\underline{10}) = 0$. Das bedeutet, dass unsere SU(5)-GUT anomaliefrei wegen der gewählten Darstellungen $\underline{5}^*$ und $\underline{10}$ ist. Dadurch ist der Anomaliecheck abgeschlossen.

Schauen wir uns nun die Eichbosonen an:

$$\sum_{a=1}^{24} G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|cc} G_\mu^a \lambda_{\text{GM}}^a + 2/\sqrt{15} B_\mu \mathbb{1}_{3 \times 3} & X_\mu^r & Y_\mu^r & & \\ & X_\mu^g & Y_\mu^g & & \\ & X_\mu^b & Y_\mu^b & & \\ X_\mu^{r+} & X_\mu^{g+} & X_\mu^{b+} & W_\mu^3 - 3/\sqrt{15} B_\mu & W_\mu^+ \\ Y_\mu^{r+} & Y_\mu^{g+} & Y_\mu^{b+} & W_\mu^- & -W_\mu^3 - 3/\sqrt{15} B_\mu \end{array} \right) \in \underline{24} \quad (303)$$

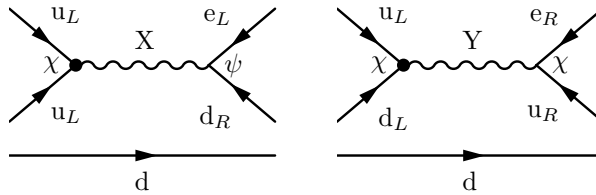
In (303) lesen wir die Zerlegung (bezüglich $SU(3) \times SU(2)$). Wir können dann die folgende Zerlegung ablesen:

$$\underline{24} = \underbrace{(\underline{8}, \underline{1})}_{G_\mu^a} \oplus (\underline{3}, \underline{2}^*) \oplus (\underline{3}^*, \underline{2}) \oplus \underbrace{(\underline{1}, \underline{3})}_{W_\mu} \oplus \underbrace{(\underline{1}, \underline{1})}_{B_\mu}$$

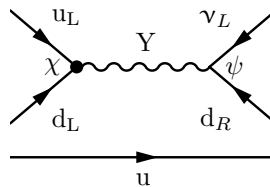
Neu sind die X- und Y-Bosonen mit Farbindex:

$$\begin{pmatrix} X_\mu^j \\ Y_\mu^j \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} X_\mu^{j+} \\ (X_\mu^j)^+ \end{pmatrix}$$

X_μ^j und Y_μ^j können Quarks in Antiquarks und Quarks in Leptonen umwandeln. In der SU(5)-GUT ist die (ungeeichte) $U(1)_{B-L}$ ungebrochen. Die X-Bosonen haben die elektrische Ladung $Q = 4/3$ und die $B - L$ -Quantenzahl $2/3$. Die Y-Bosonen haben $Q = 1/3$ und ebenfalls $B - L$ -Quantenzahl $2/3$. Beiträge zum Protonzerfall:



Beide Diagramme tragen also zum Zerfall $p \rightarrow e^+ \pi^0$ bei.



Damit ist auch der Zerfall $p \rightarrow \nu \pi^+$ möglich. Für drei Generationen braucht man entsprechend drei Quintupletts ψ^I für $I = 1, 2, 3$ und drei Dekupletts χ^I . Dann ist auch beispielsweise $p \rightarrow e^+ K^0$ mit $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ein möglicher Zerfall (mit schöner experimenteller Signatur).