

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: PHYSIK JENSEITS DES STANDARDMODELLS II

Prof. Dr. Nierste, Dr. Wiesenfeldt

Vorlesung Sommersemester 2008

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 14. August 2009

Mitschrieb der Vorlesung PHYSIK JENSEITS DES STANDARDMODELLS
von Herrn Prof. Dr. NIERSTE und Herrn Dr. WIESENFELDT im Sommersemester 2008
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Supersymmetrie	9
1.1	Motivation	9
1.1.1	Strahlungskorrekturen im Standardmodell	9
1.1.2	Erweiterung der Poincaré-Algebra	10
1.2	Graduierte Lie-Algebren	11
1.3	Casimir-Operatoren	14
1.4	Teilchen-Supermultiplets für $N = 1$ -Supersymmetrie	15
1.4.1	Massive Teilchen	15
1.4.2	Masseloses Teilchen	15
1.5	Superfelder	16
1.5.1	Das Rechnen mit Grassmann-Zahlen	16
1.6	$N = 1$ -Superfelder	17
1.6.1	Chirales Superfeld	18
1.6.2	Vektor-Superfelder	18
1.7	SUSY-Feldstärke	19
1.8	SUSY-Wirkungen	20
1.8.1	Wess-Zumino-Modell	20
1.8.2	SUSY-Yang-Mills-Theorie	21
1.8.3	SUSY-Feynman-Diagramme	22
1.9	Das supersymmetrische Standardmodell	23
1.9.1	Standardmodell	23
1.9.2	Supersymmetrisierung	23
1.9.3	Kopplungen	23
1.10	Gebrochene Supersymmetrie	25
1.11	Brechung der elektroschwachen Symmetrie in der Supersymmetrie	25
1.12	Spartikel-Spektrum	27
1.13	Nicht-minimale Modelle	28
1.14	SUSY-Flavour und CP-Problem	28
2	Brechung der Supersymmetrie	29
2.1	Spontane Symmetriebrechung	29
2.2	Goldstino	30
2.3	Supergravitation	30
2.4	Brechungsszenarien	30
2.4.1	„Gauge-mediated“	31
2.4.2	„Gravity-mediated“	31
2.4.3	Nichtrenormierungstheorem	33
2.5	Laufen der Eichkopplungen im MSSM	33
2.6	Radiative elektroschwache Symmetriebrechung	33
3	SUSY-SU(5)	35
3.1	Protonzerfall	36
3.2	Yukawa-Kopplungen	37

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{15} \left(\frac{N_\Sigma}{V_\Sigma} \right)^2 - \frac{3}{80} \frac{N_\Sigma}{V_\Sigma} - \frac{7\varepsilon}{1200\alpha} \left(\frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 3\Lambda_4 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (323)$$

$$\Lambda_2 = \frac{3}{8} \frac{N_\Sigma}{V_\Sigma} + \frac{\varepsilon}{40\alpha} \left(\frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 3\Lambda_4 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (324)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_H &= \frac{1}{8\varepsilon^2} \left(6 \frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 4 \left(\frac{N_4}{V_\Sigma} \right)^2 - 30\Lambda_3 - 9\Lambda_4 \right) = \\ &= \frac{\alpha}{2\varepsilon} \left(\frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 3\Lambda_4 \right) - \alpha^2 \left(\Lambda_3 + \frac{\Lambda_4}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \dots \end{aligned} \quad (325)$$

An (325) erkennt man das **Hierarchieproblem**, das aus $\varepsilon \ll 1$ resultiert: Damit das Higgspotential $V_\Sigma \gg V_W$ mit $\Lambda_H \leq \mathcal{O}(1)$ liefert, müssen verschiedene Parameter auf die Größenordnung ε^2 gegeneinander abgestimmt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang vom **Finetuning-Problem**. Mit

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 3\Lambda_4, \\ K_2 &= \frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} - 10\Lambda_3, \end{aligned} \quad (326)$$

werden (323) bis (325) zu:

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{15} \left(\frac{N_\Sigma}{V_\Sigma} \right)^2 - \frac{3}{80} \frac{N_\Sigma}{V_\Sigma} - \frac{7\varepsilon K_1}{1200\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (327)$$

$$\Lambda_2 = \frac{3}{8} \frac{N_{\Sigma \times H}}{V_\Sigma} + \frac{1}{40} \frac{\varepsilon K_1}{\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (328)$$

$$\Lambda_H = \frac{1}{8\varepsilon} \left(3K_1 + 3K_2 - 4 \frac{M_H^2}{V_\Sigma^2} \right) + \frac{\alpha K_1}{2\varepsilon} - \alpha^2 \left(\Lambda_3 + \frac{1}{2} \Lambda_4 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (329)$$

Die Feinabstimmung in (329) ist

$$3K_1 + 3K_2 - 4 \frac{M_H^2}{V_\Sigma^2} + 4\varepsilon\alpha K_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (330)$$

Diese Abstimmung muss in jeder höheren Ordnung der Störungstheorie wieder neu angepasst werden. Die Skala V_W ist nicht gegen Strahlungskorrekturen $\sim V_\Sigma$ geschützt. Supersymmetrie lindert dieses Problem; gilt (330) in supersymmetrischen Theorien auf Baumgraphen-Niveau, so auch in allen höheren Ordnung. Es gibt 24 Felder in Σ , 10 in H (komplexe Darstellungen), was zu 34 reellen Higgfeldern führt. Aus der Diagonalisierung der Massenmatrix

$$M_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_i \partial h_j} \right|_{V \in v}, \quad (331)$$

findet man (nach Einsetzen der Minimierungsbedingung (327) bis (329)) die Higgsmassen:

- 1.) 15 Bosonen haben die Masse 0; sie sind Goldstone-Bosonen der

$$\dim(\text{SU}(5)) - \dim(\text{SU}(3) \times \text{U}(1)) = 24 - (8 + 1) = 15,$$

Generatoren der gebrochenen Symmetrien. Diese 15 werden später massiv und zu longitudinalen Komponenten.

- 2.) Ein Boson h^0 hat Masse

$$m_{h^0}^2 = -\frac{V_\Sigma^2}{2} \underbrace{\left(3K_1 + 3K_2 - 4 \frac{M_H^2}{V_\Sigma^2} + 4\varepsilon\alpha K_1 \right)}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ wegen (330)}} + 2\varepsilon^2 V_\Sigma^2 \alpha^2 (2\Lambda_3 + \Lambda_4) \stackrel{(330)}{=} \mathcal{O}(V_W^2). \quad (332)$$

3.) Für $\alpha = \mathcal{O}(1)$ gibt es drei Bosonen mit Masse

$$\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon} \cdot V_\Sigma) \approx 10^9 \text{ GeV} = \mathcal{O}(\sqrt{V_W \cdot V_\Sigma}).$$

4.) 15 Bosonen haben Masse V_Σ . Das Feinabstimmungsproblem in (330) wird auch „Dublett-Triplett-Aufspaltungs-Problem“ genannt:

$$H = \left. \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} \text{Farb-Triplett mit Masse } V_\Sigma \\ \text{SU}(2)_L\text{-Dublett mit Masse } V_W \end{array}.$$

Yukawa-Kopplungen

$$\langle H \rangle \stackrel{(319)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_W \end{pmatrix},$$

muss allen Fermionen Masse geben.

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^5 + \mathcal{L}_Y^{10}, \quad (333)$$

mit

$$\mathcal{L}_Y^5 = - \sum_{j,k=1}^3 \sqrt{2} y_{jk}^5 \bar{\psi}_j C \chi_k H + \text{h.c.} \quad (334)$$

Hier ist C die Ladungskonjugationsmatrix ($Ce^c = e_R$), $\bar{\psi}_j$ aus (291), χ_k aus (292) und H aus (313). Das SU(5)-Transformationsverhalten ($U_5 \in \text{SU}(5)$) ist gegeben durch:

$$C\chi \mapsto U_5^* C\chi U_5^\dagger.$$

Für $\psi \in 5^*$ gilt:

$$\psi \mapsto U_5^* \psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} U_5^\dagger.$$

Wegen $H \mapsto U_5 H$ ist also (334) invariant:

$$\bar{\psi}_j C \chi_k H \mapsto \bar{\psi}_j U_5^\dagger U_5^* (C\chi_k) U_5^\dagger U_5 H = \bar{\psi}_j \mathbf{1} (C\chi_k) \mathbf{1} H = \bar{\psi}_j C \chi_k H.$$

$$\mathcal{L}_Y^5 = - \sum_{j,k} y_{jk}^5 (\bar{d}^{c^r}, \bar{d}^{c^g}, \bar{d}^{c^b}, \bar{e}_L, -\bar{\nu}_{eL})_j \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u_R^b & -u_R^g & (u_L^r)^c & (d_L^r)^c \\ -u_R^b & 0 & u_R^r & (u_L^g)^c & (d_L^g)^c \\ u_R^g & -u_R^r & 0 & (u_L^b)^c & (d_L^b)^c \\ \hline -(u_L^r)^c & -(u_L^g)^c & -(u_L^b)^c & 0 & e_R \\ -(d_L^r)^c & -(d_L^g)^c & -(d_L^b)^c & -e_R & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (335)$$

Das Standardmodell-Higgsboson aus (24) ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_4 \\ H_5 \end{pmatrix},$$

so dass (335) alle Φ -Kopplungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^5 &= - \sum_{j,k} y_{jk}^5 \left\{ \bar{d}_{Rj}^c \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_{Lk}^c \\ d_{Lk}^c \end{pmatrix} + \bar{L}_j \Phi e_{Rk} \right\} \stackrel{\psi_1^c \psi_2^c = \bar{\psi}_2 \psi_1}{=} - \sum_{j,k} y_{jk}^5 \left\{ \bar{Q}_k \Phi d_{Rj} + \bar{L}_j \Phi e_{Rk} \right\} = \\ &= -\bar{Q} y^{5\top} \Phi d_R + \bar{L} y^5 \Phi e_R. \end{aligned} \quad (336)$$

Ein Vergleich mit (38) und (39) liefert

$$y^e = y^{d^\dagger} = y^5. \quad (337)$$

Die SU(5) verknüpft also y^e mit y^d . Bei $\mu = M_{\text{GUT}}$ gilt also insbesondere

$$y^b = y^\tau, \quad y^s = y^\mu, \quad y^d = y^e. \quad (338)$$

Die Verhältnisse der Yukawa-Kopplungen sind praktisch unabhängig von der Renormierungsskala μ , so dass wir (mit $\mu = v_W$)

$$\frac{m_b}{m_\tau} = \frac{m_s}{m_\mu} = \frac{m_d}{m_c}, \quad (339)$$

erwarten. (339) ist nicht gut erfüllt (siehe nach (284)):

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx 2,4, \quad \frac{m_s}{m_\mu} \approx 0,8, \quad \frac{m_d}{m_c} \approx 7,3, \quad (340)$$

bei $\mu = 4,2 \text{ GeV}$. (Zumindest stimmen die Größenordnungen überein.) Abweichungen sind zum Teil durch Dimension-5-Terme erklärbar.

Kommen wir zu den Massen für up-artige Quarks:

$$\mathcal{L}_Y^{10} = - \sum_{j,k=1}^3 \frac{1}{2} y_{j,k}^{10} \sum_{p,q,r,s,t=1}^5 \varepsilon^{pqrst} \bar{\chi}_{j;p,q} \zeta \chi_{k;r,s} H_k^* + \text{h.c.} \quad (341)$$

p, q und r, s sind SU(5)-Indizes. ζ ist der Ladungskonjugationsoperator: $\zeta\psi = \psi^c$ und $\zeta\psi^c = \psi$. Darstellungstheorie: Young-Tableau

Beispiel: Beiträge aus $p, q \in \{1, 2\}$ und $r, s \in \{3, 4\}$ zu (341):

$$\mathcal{L}_Y^{10} \supset - \frac{1}{2} \sum_{j,k} y_{j,k}^{10} \cdot \overline{u_j^{c,b} u_{L,k}^{b,c}} H_5^* \cdot 4 = - \sum_{j,k} y_{j,k}^{10} \overline{u_{L,k}^b} u_{R,j}^b H_5^*. \quad (342)$$

In (341) ist wegen

$$\bar{\chi}_{j;p,q} \zeta \chi_{k;r,s} = \bar{\chi}_{j;p,q} C \bar{\chi}_{k;r,s}^\top = -\bar{\chi}_{k;r,s} C^\top \bar{\chi}_{j;p,q}^\top = \bar{\chi}_{k;r,s} C \bar{\chi}_{j;p,q}^\top,$$

und $\varepsilon^{pqrst} = \varepsilon^{rspqt}$ die Kopplung y_{jk}^{10} o.B.d.A. symmetrisch in (j, k) :

$$y_{jk}^{10} = y_{kj}^{10}. \quad (343)$$

Mit $t = 4, 5$ finden wir (analog zu (342)) die Kopplungen des SM-Higgs-Dubletts ϕ :

$$\mathcal{L}_Y^{10} \supset - \sum_{j,k=1}^3 y_{jk}^{10} \bar{Q}_j \phi^c u_{Rk} + \text{h.c.} \quad (344)$$

Ein Vergleich mit (40) liefert:

$$y^u = y^{10}. \quad (345)$$

Die einzige Einschränkung aus der SU(5)-Struktur an y^u ist $y_{jk}^u = y_{kj}^u$ aus (343). Es gibt somit keine beobachtbaren Konsequenzen für die SM-Phänomenologie. Sind \mathcal{L}_Y^5 und \mathcal{L}_Y^{10} alle Yukawa-Kopplungen? Wir zerlegen die Darstellungen mit zwei Fermionfeldern:

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^* \times \mathbf{10} &= \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \Rightarrow \mathcal{L}_Y^5, \\ \mathbf{10} \times \mathbf{10} &= \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45}^* \oplus \mathbf{50} \Rightarrow \mathcal{L}_Y^{10}, \\ \mathbf{5}^* \times \mathbf{5}^* &= \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{15} \Rightarrow \text{keine Kopplung.} \end{aligned} \quad (346)$$

Insbesondere ist keine Kopplung ans **24**-Higgs Σ möglich und somit keine Kopplung von der Größenordnung der GUT-Skala!

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = \bar{\psi} i \not{D} \psi + \text{Sp}(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi) + g \text{Sp} \left(\bar{\psi} G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi G_\mu^a \frac{\lambda^{a\top}}{2} \right),$$

mit $D_\mu = \partial_\mu - ig G_\mu^a \lambda^a / 2$. Wegen

$$\text{Sp}(\bar{\psi} \psi (\lambda^a)^\top) = \sum_{j,k,l} \bar{\psi}_{jk} \psi_{kl} \lambda_{jl}^a = \sum_{j,k,l} \bar{\psi}_{kj} \lambda_{jl}^a \psi_{lk} = \text{Sp}(\bar{\psi} \lambda^a \psi),$$

ist also

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = \bar{\psi} i \not{D} \psi + \text{Sp}(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi) + 2g \text{Sp} \left(\bar{\psi} \mathcal{G}^a \frac{\lambda^a}{2} \psi \right). \quad (347)$$

Mit (306) finden wir die Koppkungen der X- und Y-Bosonen in (347). (Felder sind schwache Eigenzustände.)

$$\bar{\psi} i \not{D} \psi \supset \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \sum_{f=r,g,b} \bar{d}_j^{c\bar{f}} (X_\mu^f \gamma^\mu e_{Lj} - Y_\mu^f \gamma^\mu \nu_{eLj}). \quad (348)$$

$$2g \text{Sp} \left(\bar{\chi} \mathcal{G}^a \frac{\lambda^a}{2} \chi \right) \supset -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \left\{ \sum_{f=r,g,b} \bar{Q}_{Lj}^f \begin{pmatrix} Y_\mu^f \\ -X_\mu^f \end{pmatrix} \gamma^\mu u_j^c - \sum_{f,k,l=r,g,b} \varepsilon_{fkl} \overline{(u^c)^f}_j (X_\mu^k, Y_\mu^k) \gamma^\mu Q_j^l \right\}. \quad (349)$$

$\mathcal{L}_{\text{eich}}$ in (347) ist invariant unter

$$\chi_j \mapsto S_{jj'}^X \chi_{j'}, \quad \psi_j \mapsto S_{jj'}^\psi \psi_{j'}, \quad (350)$$

mit unitären 3×3 -Matrizen S^X und S^ψ , analog zu (46). y_{jk}^{10} in (341) transformiert sich dann wie $y_{jk}^{10} \mapsto S_{jj'}^{X*} S_{kk'}^\psi y_{j'k'}^{10}$, bzw. $y^{10} \mapsto S^{X*} y^{10} S^{X\dagger}$ (351) und wegen $y^{10} = (y^{10})^\top$ können wir durch geeignete Wahl von S^X nun y^{10} diagonalisieren. Durch geeignete Wahl von S^ψ kann wegen (siehe (334))

$$y^5 \mapsto S^{\psi\dagger} y^5 S^X, \quad (352)$$

die Gestalt

$$y^5 = \begin{pmatrix} y_d & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} V^\top, \quad (353)$$

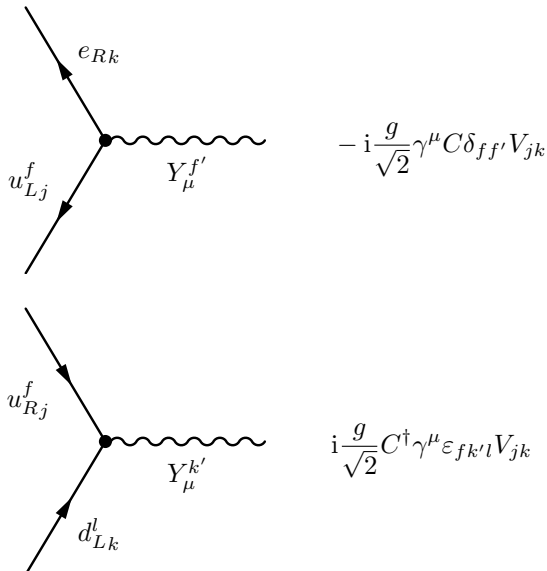
erzielt werden, analog zu (48). Wegen $y^5 = y^{d\top}$ (siehe (357)) ist V in (353) die CKM-Matrix. Unser **minimales** SU(5) hat also die Eigenschaft, dass beim Wechsel von den schwachen Eigenzuständen zu den Masseneigenzuständen nur die CKM-Matrix V relevant ist („Kinship-Eigenschaft“). Um in (336) die Massenmatrix zu diagonalisieren, müssen wir wie im Standardmodell $d_L \mapsto V d_L$ transformieren. Neu in SU(5) ist, dass wir auch

$$e_{Rj} \mapsto V_{jj'}^* e_{Rj'}, \quad \text{also } e_j^c \mapsto V_{jj'} e_{j'}^c, \quad (354)$$

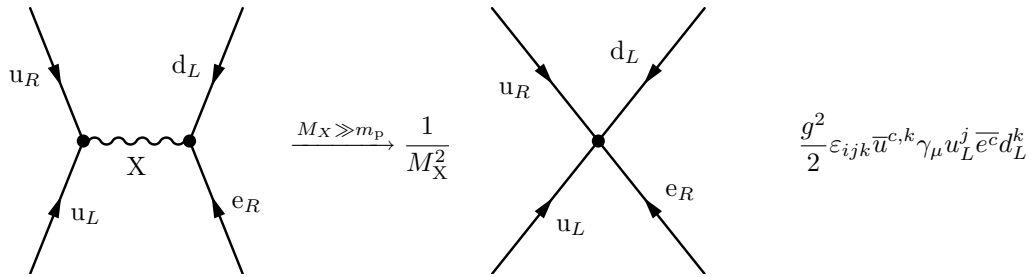
transformieren müssen, um in (336)

$$-(\bar{e}_L, \bar{\mu}_L, \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} y_d & 0 & 0 \\ 0 & y_s & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} V^\top \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix},$$

zu diagonalisieren. (51) und (354) betreffen nur Kopplungen des χ (und nicht von ψ). Lediglich in den Feynmanregeln der Kopplung des Y_μ -Feldes in (349) taucht die CKM-Matrix V auf.



Wir hatten bemerkt, dass der $SU(5)$ -Eichsektor eine globale $U(1)_{B-L}$ -Symmetrie besitzt. \mathcal{L}_Y^5 und \mathcal{L}_Y^{10} sind ebenfalls $B-L$ -invariant. Dies ist wie im Standardmodell ein „Zufall“ (eine Folge des gewählten Teilcheninhalts) und gilt nicht mehr für einen erweiterten Higgs-Sektor (beispielsweise, wenn man ein **15**-Higgs hinzufügt). Der Protonzerfall erfolgt über Dimension-6-Operatoren, nämlich beispielsweise



Weinberg und Wilczek/Zee haben herausgefunden, dass in $SU(5)$ **alle** Dimension-6-Operatoren (unabhängig von den Higgs-Darstellungen), welche die Baryonzahl verletzen und $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -invariant sind, $B - L$ erhalten! $p \rightarrow e^+ \pi^0$ erhält $B - L$, während beispielsweise $n \mapsto e^- \pi^+$ $B - L$ verletzt, im minimalen $SU(5)$ -Modell also verboten ist und im nichtminimalen Modellen nur über Operatoren mit Dimension 6 erfolgen kann.

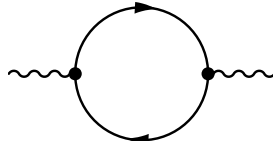
Kapitel 1

Supersymmetrie

1.1 Motivation

1.1.1 Strahlungskorrekturen im Standardmodell

Wir betrachten die Photon-Selbstenergie:



Im Falle eines verschwindenden äußeren Impulses ist diese gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}(0) &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{k} - m_f} (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k} - m_f} \right\} = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} \right\} = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_f^2)^2} [k^\mu k^\nu + k^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 - m_f^2)] . \end{aligned}$$

In dimensionaler Regularisierung mit $D = 4 - 2\varepsilon$ gilt:

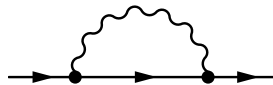
$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^2} &= - \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{D}{2}} , \\ \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - \Delta} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{D}{2}} , \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann:

$$\Pi_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}(0) = -4e^2 \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left[2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{D}{2}} - g^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{D}{2}} \right] = 0. \quad (356)$$

Der Grund dafür ist die ungebrochene $U(1)_{\text{em}}$ -Symmetrie. Eine Konsequenz dieser Eichsymmetrie ist, dass das Photon masselos ist und bleibt.

Kommen wir zur Selbstenergie des Elektrons:



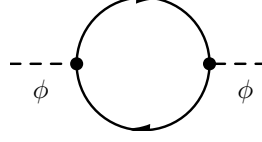
$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ee}}(0) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{k} - m_e} (-ie\gamma^\nu) \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{k} + m_e}{k^2 - m_e^2} \gamma^\mu \frac{1}{k^2} = \\ &= -4e^2 m_e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k^2 - m_e^2)}. \end{aligned} \quad (357)$$

Die Korrektur

$$\delta m_e^2 \propto \alpha_{\text{em}} m_e \log \left(\frac{\Lambda}{m_e} \right),$$

ist proportional zur eigenen Masse. (Beispielsweise liefert $\Lambda = 10^{19}$ GeV einen Wert von $\delta m_e \simeq 0,24 m_e$.) Dies ist eine Konsequenz der chiralen Symmetrie.

Schauen wir uns nun die Selbstenergie des Higgs-Bosons an:



$$\begin{aligned} \Pi_{\phi\phi}^f(0) &= -N(f) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ i \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \frac{i}{\not{k} - m_f} i \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \frac{i}{\not{k} - m_f} \right\} = \\ &= -2N(f) \lambda_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} = \\ &= -2N(f) \lambda_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{k^2 - m_f^2} + \frac{2m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (358)$$

Das erste der beiden Integrale ist quadratisch divergent und das zweite logarithmisch. Die quadratische Divergenz bereitet Probleme, da dadurch die Masse des Higgsbosons nicht geschützt ist und große Korrekturen möglich sind. („Der maximale Wert ist natürlich“, vergleiche (101)) Sofern man irgendwelche Parameter nicht fein aufeinander abstimmt, wird die Masse des Higgsbosons nahe der Cut-Off-Skala sein. Die Korrektur der Higgsmasse über Beiträge von Teilchen des Standardmodells ist gegeben durch:

$$\delta m_h^2 = -\frac{3\Lambda^2}{8\pi^2 v^2} (4m_t^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 - m_u^2) + \dots \quad (359)$$

Die Parameter kann man zwar im Prinzip so wählen, dass die Korrektur verschwindet (Veltman-Bedingung), jedoch tritt das Problem dann weiterhin bei der nächsten Ordnung auf! Nun kann $\delta m_h^2 \sim m_h^2 \sim \mathcal{O}(M_{\text{ew}})$ mittels Renormierung eingestellt werden (Feinabstimmung $\mathcal{O}(\Lambda^2/M_{\text{ew}}^2)$ (fine-tuning)). Dies ist kein Problem, solange wir keine neue Physik an einer höheren Skala erwarten. Wir „kennen“ jedoch Skalen neuer Physik.

- $M_N \sim 10^{14}$ GeV: Seesaw-Mechanismus (100/101)
- $M_{\text{GUT}} \sim 10^{14-16}$ GeV: Vereinigung der Kopplungskonstanten
- $M_{\text{Pl}} \sim 10^{18-19}$ GeV: Quantengravitation!

Wir erwarten neue Physik an der **TeV-Skala!**

Wir benötigen eine Symmetrie ähnlich der chiralen Symmetrie, die dafür sorgt, dass die Masse des Higgsbosons im TeV-Bereich bleibt. In (359) erkennen wir, dass Fermionen- und Bosonenbeiträge entgegengesetztes Vorzeichen haben. In der Supersymmetrie hat jedes Fermion ein bosonisches Partnerteilchen und umgekehrt. Damit treten zusätzliche Strahlungskorrekturen

$$\tilde{\Pi}_{\phi\phi}^{\tilde{f}}(0) = -N(\tilde{f}) \tilde{\lambda}(\tilde{f}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2},$$

auf. Die quadratischen Divergenzen heben sich dann auf, wenn $N(f) = N(\tilde{f})$ und $\tilde{\lambda}(\tilde{f}) = -\lambda_f^2$ gilt (360). Haben Teilchen und Partnerteilchen dieselbe Masse, so verschwinden alle Korrekturen. Ansonsten verbleiben logarithmische Divergenzen, proportional zu deren Massendifferenzen.

1.1.2 Erweiterung der Poincaré-Algebra

Das Coleman-Mandula-Theorem besagt: Die einzigen erhaltenen Ladungen, die als Tensoren der Lorentzgruppe transformieren, sind P_μ und $M_{\mu\nu}$.

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho),$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}),$$

und

$$[T^a, T^b] = ic^{abc}T^c,$$

als innere Symmetrie. Dann gilt:

$$[T^a, P_\mu] = 0 = [T^a, M_{\mu\nu}].$$

Veranschaulichung (nach Witten): Betrachte zwei masselose skalare Teilchen.

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2.$$

Die erhaltenen Ströme sind dann gegeben durch

$$J_\mu = \phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1,$$

$$J_\mu{}^\rho = \partial^\rho\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\partial^\rho\phi_1,$$

$$J_\mu{}^{\rho\sigma} = \partial^\rho\partial^\sigma\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\partial^\rho\partial^\sigma\phi_1.$$

Erhaltene Ladungen sind gegeben durch

$$Q^\rho = \int d^3x J_0{}^\rho,$$

und

$$Q^{\rho\sigma} = \int d^3x J_0{}^{\rho\sigma}.$$

Können diese Ladungen bei Wechselwirkungen erhalten bleiben? Schauen wir uns dazu einen Streuprozess $1 + 2 \mapsto 3 + 4$ an. Hierbei gilt Viererimpulserhaltung

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu,$$

$$p_1^\rho p_1^\sigma + p_2^\rho p_2^\sigma = p_3^\rho p_3^\sigma + p_4^\rho p_4^\sigma.$$

Hieraus folgt $1 - \cos^2\theta = 0$. Der Winkel θ ist unbestimmt nach Erhaltung von P_μ und $M_{\mu\nu}$. Die zusätzlich erhaltene Tensorladung legt den Freiheitsgrad des Streuwinkels auf Vorwärts- bzw. Rückwärtsstreuung fest – entgegen der Beobachtung!

Damit müssen die SUSY-Generatoren **fermionisch** sein.

1.2 Graduierte Lie-Algebren

Betrachten wir ein System mit bosonischen und fermionischen Operatoren B_i und F_α :

$$[B_i, B_j] = c_{ij}{}^k B_k, \quad c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k,$$

$$[F_\alpha, B_j] = s_{\alpha j}{}^\beta F_\beta,$$

$$\{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}{}^i B_i, \quad \gamma_{\alpha\beta}{}^i = \gamma_{\beta\alpha}{}^i.$$

Betrachte fermionischen Generator Q_α : linkshändiger Weyl-Spinor. Dieser transformiert sich als $(1/2, 0)$ unter der Lorentzgruppe. Dann muss $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}$ (wobei $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ der adjungierte Operator ist) als $(1/2, 1/2)$ transformieren. Dann gilt $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^\mu P_\mu$ (361), wobei der Faktor 2 Konvention ist. Es ist $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ und $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$ mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^\mu = \varepsilon_{\delta\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}\bar{\sigma}^{\mu,\dot{\delta}\gamma}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\dot{\beta}} = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\sigma}^{\mu,\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon^{\gamma\dot{\alpha}}\varepsilon^{\beta\delta}\sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^\mu, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^\mu \bar{\sigma}^{\dot{\gamma}\delta}{}_\mu = 2\delta_\alpha{}^\delta \delta_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}, \quad \text{Sp}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}. \quad (362)$$

Für beliebig viele Generatoren Q_α^A und \bar{Q}_β^B können wir

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_\beta^B\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_A^B,$$

wählen.

$$\sum_{\alpha,\dot{\beta}} \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\text{Sp}(\sigma^\mu P_\mu) = 4P_0 \geq 0. \quad (363)$$

Was ist $[Q_\alpha^A, P_\mu]$? (1, 1/2)-Generatoren stehen uns nicht zur Verfügung. Damit machen wir den Ansatz

$$[Q_\alpha^A, P_\mu] = Z_B^A \sigma_{\mu\nu\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}B},$$

wobei Z_B^A ein komplexer Lorentz-Skalar ist.

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}A}, P_\mu] = (Z_B^A)^* Q_\beta^B \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta}.$$

Damit gilt:

$$[[Q_\alpha^A, P_\mu], P_\nu] = (ZZ^*)_B^A (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu)_\alpha{}^\beta Q_\beta^B.$$

Aus der Jacobi-Identität folgt $ZZ^* = 0$, also

$$[Q_\alpha^A, P_\mu] = 0 = [\bar{Q}^{\dot{\beta}B}, P_\mu]. \quad (364)$$

Das heisst, dass alle SUSY-Generatoren mit dem Translationsoperator kommutieren. P^2 bleibt somit Casimir-Operator und Zustände in einem SUSY-Multiplett haben dieselbe Masse. SUSY-Generatoren kommutieren nicht mit Lorentz-Boosts:

$$[Q_\alpha^A, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta^A,$$

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}A}, M_{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}A}, \quad (365)$$

wobei

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{i}{4} [\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu,\dot{\gamma}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu,\dot{\gamma}\beta}]$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{i}{4} [\bar{\sigma}^{\mu,\dot{\alpha}\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\beta}}^\nu - \bar{\sigma}^{\mu,\dot{\alpha}\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\beta}}^\mu] \quad (366)$$

Nachtrag: Der zu Q_α adjungierte Operator ist

$$(Q_\alpha)^\dagger = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \quad (367)$$

Somit können wir über α summieren:

$$\sum_\alpha \{Q_\alpha, (Q_\alpha)^\dagger\} = 2\text{Sp}(\sigma^\mu P_\mu) = 4P_0.$$

Alternativ können wir mit (361) starten und mit $\bar{\sigma}^\nu$ kontrahieren:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} = 4g^{\mu\nu} P_\mu = 4P^\nu.$$

Bedeutung: Das Spektrum von $H = P^0$ ist positiv semidefinit: $H \geq 0$ (denn $Q_\alpha(Q_\alpha)^\dagger$, $(Q_\alpha)^\dagger Q_\alpha$ sind positiv semidefinit). Damit ist die Vakuumenergie wohldefiniert!

Betrachte den supersymmetrischen Vakuumzustand $|0\rangle$. Dann gilt

$$Q_\alpha|0\rangle = 0.$$

Wenn eine Symmetrie ungebrochen ist, dann wird das Vakuum annihilert von dem Symmetriegenerator. Daraus folgt, dass das Vakuum invariant unter $\exp(i\lambda^\alpha Q_\alpha)$ ist und

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle \stackrel{(361)}{=} \frac{1}{4} \sum_\alpha \langle 0|\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}|0\rangle = 0, \quad (368)$$

gilt. Existiert ein supersymmetrischer Vakuumzustand, dann ist er auch globales Minimum des Potentials. Daraus folgt wiederum, dass Supersymmetrie genau dann spontan gebrochen ist, wenn

$$\langle 0|H|0\rangle \neq 0,$$

ist.

- Für eine supersymmetrische Eichtheorie kann man folgendermaßen klassifizieren:

- i.) $\langle \phi \rangle = 0, V(\langle \phi \rangle) = 0$
- ii.) $\langle \phi \rangle = 0, V(\langle \phi \rangle) \neq 0$: Supersymmetrie ist spontan gebrochen
- iii.) $\langle \phi \rangle \neq 0, V(\langle \phi \rangle) = 0$: Eichsymmetrie, aber nicht die Supersymmetrie ist spontan gebrochen
- iv.) $\langle \phi \rangle \neq 0, V(\langle \phi \rangle) \neq 0$: Sowohl Supersymmetrie als auch Eichsymmetrie sind spontan gebrochen

Dabei ist ϕ ein geladenes Feld bezüglich der Eichsymmetrie, $V(\phi)$ dessen Potential, $\langle \phi \rangle$ der Vakuumerwartungswert von ϕ am Minimum von $V(\phi)$ und $V(\langle \phi \rangle) = E_0$ die Vakuumenergie.

- Im Fall von spontan gebrochener Supersymmetrie gilt

$$Q_\alpha |0\rangle = |\psi_\alpha\rangle \neq 0. \quad (369)$$

Dann gilt

$$\langle \psi_{\dot{\beta}} | (J_\mu)_\alpha |0\rangle = f(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\beta}\alpha} \quad (370)$$

wobei $(J_\mu)_\alpha$ der Superstrom ist und f eine Zahl. Der Superstrom hängt mit der erhaltenen Ladung zusammen über

$$Q_\alpha = \int d^3x (J_\mu)_\alpha.$$

Der Superstrom erzeugt ein Fermion aus dem Vakuum mit Kopplungsstärke f ; man bezeichnet dieses masselose Teilchen als **Goldstino**. (Das Goldstino kann zum longitudinalen Freiheitsgrad des Gravitinos (Spin 3/2) werden, womit dieses eine Masse erhält (Supergravitation).)

- Aus dem Transformationsverhalten unter $SL(2, \mathbb{C})$ folgt

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{AB},$$

plus ein weiterer symmetrischer Term in A, B , der dank der Jacobi-Identität verschwindet. Die antisymmetrischen X^{AB} bezeichnet man als **zentrale Ladungen**.

- Definition: Man kann die zentralen Ladungen entwickeln in der Form

$$X^{AB} = a^{AB} B_l,$$

wobei die B_l die Lie-Algebra erfüllen. Es gilt dann (vergleiche zu Beginn des Kapitels über **graduierte Lie-Algebren**):

$$[Q_\alpha^A, B_l] = S_{lB}^A Q_\alpha^B,$$

bzw.

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, B_l] = -S_l^{A*} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B},$$

und

$$S_{lC}^A a^{kBC} = -a^{kAC} S_{lC}^{B*}.$$

- Für $N = 1$ gibt es keine zentralen Ladungen und die S_l sind reell, was aus der Jacobi-Identität folgt.

$$[Q_\alpha, B_l] = S_l Q_\alpha,$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, B_l] = -S_l \bar{Q}_{\dot{\alpha}}.$$

Genau eine unabhängige Linearkombination R der B_l besitzt einen nichtverschwindenden Kommutator

$$[Q_\alpha, R] = Q_\alpha, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, R] = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \quad (370a)$$

und heißt **R-Symmetrie**.

$$\left(\left[Q_\alpha, \frac{B_1}{S_1} - \frac{B_2}{S_2} \right] = Q_\alpha - Q_\alpha = 0. \right)$$

Daraus folgt, dass die $N = 1$ -SUSY-Algebra eine innere globale $U(1)$ -Symmetrie besitzt, die nicht mit der Supersymmetrie vertauscht. Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ haben R -Ladungen $+1$ und -1 .

1.3 Casimir-Operatoren

- Poincaré-Gruppe:

$$P^2 = P_\mu P^\mu, \quad W^2 = W_\mu W^\mu. \quad (371)$$

Der Pauli-Lubanski-Vektor ist:

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}.$$

- Im Ruhesystem eines massiven Teilchen gilt

$$P_\mu = (m, 0, 0, 0), \quad W^2 = -m^2 \mathbf{L}^2,$$

mit dem Drehimpuls $\mathbf{L} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$. Ohne Supersymmetrie kommutieren die Casimir-Operatoren mit den inneren Symmetriengeneratoren:

$$[T^a, P^2] = 0, \quad [T^a, W^2] = 0.$$

Hieraus folgt, dass alle Teilchen eines Multipletts dieselbe Masse und denselben Spin besitzen (O’Raifeartaigh-Theorem). Mit Supersymmetrie ist P^2 weiterhin Casimir-Operator. Wir betrachten zwei Zustände $|b\rangle$ und $|f\rangle$ mit Massen m_b und m_f und $Q_\alpha |b\rangle = |f\rangle$. Dann ist

$$m_f^2 |f\rangle = P^\mu P_\mu |f\rangle = P^\mu P_\mu Q_\alpha |b\rangle = Q_\alpha P^\mu P_\mu |b\rangle = Q_\alpha m_b^2 |b\rangle = m_b^2 |f\rangle,$$

und somit $m_f = m_b$.

- Dagegen gilt

$$[W_\mu, Q_\alpha] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [P^\nu M^{\rho\sigma}, Q_\alpha] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\sigma^{\rho\sigma})_\alpha^\beta Q_\beta P^\nu \stackrel{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} = 2i\sigma_{\mu\nu}}{=} -i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta P^\nu, \quad (372)$$

und somit besitzt Zustände in einem Supermultiplett **unterschiedlichen** Spin! Definiere

$$B_\mu := W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta. \quad (373)$$

Dann ist $C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}$ mit

$$C_{\mu\nu} = B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu,$$

der zweite Casimir-Operator.

- Betrachte $\sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} P^\mu | i \rangle$ (*) mit dem Spins s , wobei $(-\mathbf{1})^{2s}$ Eigenwert $+1$ für ein Boson ($s \in \mathbb{N}_0$) und -1 für ein Fermion ($s + 1/2 \in \mathbb{N}$). Die Summe läuft über alle Teilchen in einem Symmetriemultiplett, welche alle denselben Viererimpuls haben.

$$\begin{aligned} \sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} P^\mu | i \rangle &\propto \sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} \{Q, \bar{Q}\} | i \rangle = \sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} Q \bar{Q} | i \rangle + \sum_{i,j} \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} \bar{Q} | j \rangle \langle j | Q | i \rangle = \\ &= \sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} Q \bar{Q} | i \rangle + \sum_j \langle j | Q (-\mathbf{1})^{2s} \bar{Q} | j \rangle = \\ &= \sum_i \langle i | (-\mathbf{1})^{2s} Q \bar{Q} | i \rangle - \sum_j \langle j | (-\mathbf{1})^{2s} Q \bar{Q} | j \rangle, \end{aligned}$$

denn $(-\mathbf{1})^{2s}$ antikommutiert mit Q . Das heißt, es gilt

$$P^\mu \text{Sp}[(-\mathbf{1})^{2s}] = 0. \quad (374)$$

Für $P^\mu \neq 0$ ist also $n_b = n_f$. Nur im Grundzustand kann der sogenannte Witten-Index $n_b - n_f$ von Null verschieden sein. Für spontane Brechung der Supersymmetrie muss der Witten-Index verschwinden.

1.4 Teilchen-Supermultiplets für $N = 1$ -Supersymmetrie

1.4.1 Massive Teilchen

Wähle Eigensystem $P^\mu = (m, \mathbf{0})$, so dass $\sigma^\mu P_\mu = m\mathbb{1}$ ist. Dann ist (siehe (373))

$$C^2 = 2m^4 J_i J^i, \quad J_i := S_i - \frac{1}{4m} \bar{Q} \bar{\sigma}_i Q,$$

mit $i = 1, 2, 3$. S_i und σ_i erfüllen die $SU(2)$ -Algebra, also

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k,$$

und J^2 besitzt die Eigenwerte $j(j+1)$, wobei j ganz- oder halbzahlig ist. Betrachte einen Zustand $|m, j\rangle$. Dann können wir einen neuen Zustand

$$|\Omega\rangle := Q_1 Q_2 |m, j\rangle, \quad (375)$$

definieren, für den gilt:

$$Q_1 |\Omega\rangle = Q_2 |\Omega\rangle = 0. \quad (376)$$

Damit ist $|\Omega\rangle$ Eigenzustand von Q_1 und Q_2 mit $(2j+1)$ -facher Entartung (für ein festes j). Weiterhin gilt $J_i |\Omega\rangle = S_i |\Omega\rangle$, also ist $|\Omega\rangle$ auch Spin-Eigenzustand. Damit sind die Zustände des Supermultiplets durch **Masse** und **Spin** charakterisiert:

$$|\Omega\rangle = |m, S, S_3\rangle.$$

Definiere normierte Erzeuger und Vernichter:

$$a_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{1,2}, \quad a_{1,2}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}} \bar{Q}_{1,2}.$$

Für ein gegebenes $|\Omega\rangle$ besteht das massive SUSY-Multiplett aus den Zuständen

$$|\Omega\rangle, \quad a_1^\dagger |\Omega\rangle, \quad a_2^\dagger |\Omega\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} a_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_2^\dagger a_1^\dagger |\Omega\rangle.$$

womit es $4(2j+1)$ solcher Zustände gibt. Für $j = 0$ gibt es zwei Skalare (eines reell, ein Pseudoskalar) und ein massives Weyl-Fermion.

1.4.2 Masseloses Teilchen

Wähle $P_\mu = E(1, 0, 0, 1)$, so dass $\sigma^\mu P_\mu = E(1 - \sigma^3)$ ist. Dann gilt

$$\{Q_1, \bar{Q}_1\} = \{Q_1, \bar{Q}_2\} = \{Q_2, \bar{Q}_1\} = 0, \quad \{Q_2, \bar{Q}_2\} = 4E.$$

Daraus folgt $Q_1 = \bar{Q}_1 = 0$ und es gibt somit nur ein Paar Erzeuger/Vernichter:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_2, \quad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{E}} \bar{Q}_2.$$

a^\dagger bzw. a verändert sich Helizität um $1/2$ bzw. $-1/2$:

$$a^\dagger |\lambda\rangle = \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle, \quad a^\dagger \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle = 0, \quad a |\lambda\rangle = 0, \quad a \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle = |\lambda\rangle. \quad (378)$$

- $\lambda = 0$: chirales Supermultiplett (Weyl-Fermion und komplexer Skalar)
- $\lambda = 1/2$: Vektor-Supermultiplett (Spin-1-Bosons und Majorana-Fermion)
- $\lambda = 3/2$: Supergravitationsmultiplett (Spin-2-Boson (Graviton) und Spin-3/2-Fermion (Gravitino))

1.5 Superfelder

Zur Einführung einer **supersymmetrischen Feldtheorie** in $(3+1)$ Dimensionen definieren wir den **Superraum**. Die Felder im Superraum heißen **Superfelder** und beschreiben die allgemeinen **Supermultipletts**. Für SUSY-Transformationen benötigen wir **Grassmann-Zahlen**; damit können wir die SUSY-Algebra als Lie-Algebra schreiben. Wir definieren also Grassmann-Zahlen θ^α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ mit $\alpha = 1, 2$ und $\dot{\alpha} = 1, 2$, wobei gilt:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (379)$$

Dann gilt für $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu$ (361):

$$\begin{aligned} 2(\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}})P_\mu &= \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(Q_\alpha\bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}Q_\alpha) = -\theta^\alpha Q_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha Q_\alpha = \\ &= \theta^\alpha Q_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\theta^\alpha Q_\alpha = [(\theta Q), (\bar{\theta} Q)]. \end{aligned}$$

Damit können wir die SUSY-Algebra mit Hilfe von **Kommutatoren** schreiben:

$$[\theta Q, \bar{\theta} Q] = 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu, \quad [\theta Q, \theta Q] = 0 = [\bar{\theta} Q, \bar{\theta} Q]. \quad (380)$$

Der **Superraum** wird beschrieben durch die Raumzeit-Variable x^μ und die Grassmann-Variablen $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Eine **Supertranslation** eines Superfeldes $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ ist gegeben durch

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \mapsto S(y^\mu, \xi, \bar{\xi})\Phi(x, \theta, \bar{\theta})S^{-1}(y^\mu, \xi, \bar{\xi}),$$

mit

$$S(y^\mu, \xi, \bar{\xi}) = \exp\{i(-y^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\}. \quad (381)$$

Das Minuszeichen vor $y^\mu P_\mu$ ist Konvention. Für die Hintereinanderausführung zweier Translationen gilt:

$$S(y^\mu, \xi, \bar{\xi})S(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp\{i(-y^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\} \exp\{i(-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})\},$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen, benötigen wir die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right), \quad \text{mit } [A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]].$$

Damit gilt:

$$[-y^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, -x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}] = [\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}] + [\bar{\xi}\bar{Q}, \theta Q] = 2(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})P_\mu,$$

womit sich dann ergibt:

$$\begin{aligned} \exp\{i(-x^\mu + y^\mu + \xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})P_\mu + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q}\} = \\ = S(x_\mu + y_\mu + \xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (382)$$

1.5.1 Das Rechnen mit Grassmann-Zahlen

Wegen $\theta^2 = 0$ lassen sich Funktionen $f(\theta)$ einfach entwickeln:

$$f(\theta) = f_0 + \theta f_1, \quad \frac{d}{d\theta}f(\theta) = f_1, \quad \theta f(\theta) = f_0\theta. \quad (383)$$

Für die Integration gilt (Berezin-Integral):

$$\int d\theta \theta = 1, \quad \int d\theta = 0, \quad \int d\theta f(\theta) = f_1. \quad (384)$$

Damit kann man folgendes berechnen:

$$\partial_\alpha\theta^\beta := \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \partial_\alpha\theta_\beta = -\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \quad \partial_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = 0.$$

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = \{\partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \partial_\alpha(\theta\theta) = 2\theta_\alpha, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}(\bar{\theta}\bar{\theta}) = -2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}. \quad (385)$$

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}, \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\theta_{\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\beta}, \quad d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta}. \quad (386)$$

Hieraus folgt weiter:

$$\int d^2\theta \theta^\alpha \theta_\alpha = 1, \quad \int d^2\theta \theta^\alpha \theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Eine infinitesimale SUSY-Transformation ist gegeben durch

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \mapsto (x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}),$$

und die Darstellung als Superraum-Differentialoperatoren lautet:

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad Q_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu. \quad (387)$$

Daraus folgt dann beispielsweise $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu$.

1.6 $N = 1$ -Superfelder

Nun entwickeln wir $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ in θ und $\bar{\theta}$:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta \varrho(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta} v_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x),$$

mit komplexen skalaren Feldern f, m, n, d und Superfeldern ϱ_α , den Spinorfeldern $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \psi_\alpha$ und dem komplexen Vektorfeld v_μ .

$$f(x) = \int d^4\theta \delta^{(2)}(\theta)\delta^{(2)}(\bar{\theta})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad d(x) = \int d^4\theta \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Infinitesimale Variation unter SUSY-Transformation:

$$\begin{aligned} \delta_S \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu f(x) + (\xi - i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta})\theta\partial_\mu + i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})\bar{\theta}\partial_\mu)\varrho(x) \\ &\quad + (\bar{\xi} - i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta})\bar{\theta}\partial_\mu + i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})\theta\partial_\mu)\bar{\chi}(x) \\ &\quad + (\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\xi\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\xi})\partial_\nu)v_\mu(x) \\ &\quad + (2\xi\theta - i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\theta))m(x) + (2\bar{\xi}\bar{\theta} + i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})(\bar{\theta}\bar{\theta}))n(x) \\ &\quad + (2(\xi\theta)\bar{\theta} - i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\theta)\bar{\theta}\partial_\mu + (\theta\theta)\bar{\xi})\bar{\lambda}(x) \\ &\quad + (2(\bar{\xi}\bar{\theta})\theta + i(\theta\sigma^\mu\bar{\xi})(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\partial_\mu + (\bar{\theta}\bar{\theta})\xi)\psi(x) + (2(\xi\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) + 2(\theta\theta)(\bar{\xi}\bar{\theta}))d(x), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_S f &= \xi\varrho + \bar{\xi}\bar{\chi}, \quad \delta_S \varrho_\alpha = 2\xi_\alpha m + \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\xi}^{\dot{\beta}} (i\partial_\mu f + v_\mu), \\ \delta_S \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= 2\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} n + \xi^\beta \sigma_{\beta\dot{\gamma}}^\mu \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} (i\partial_\mu f - v_\mu), \quad \delta_S m = \bar{\xi}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu \varrho \sigma^\mu \bar{\xi}, \\ \delta_S n &= \xi\psi + \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}, \quad \delta_S v_\mu = \xi\sigma_\mu\bar{\lambda} + \psi\sigma^\mu\bar{\xi} + \frac{i}{2}\xi\partial_\mu\varrho - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\chi}\bar{\xi}, \\ \delta_S \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= 2\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} d + \frac{i}{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial^\mu v_\mu - i\xi^\beta \sigma_{\beta\dot{\gamma}}^\mu \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} \partial_\mu m, \quad \delta_S \psi_\alpha = 2\xi_\alpha d - \frac{i}{2}\xi_\alpha\partial^\mu v_\mu + i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu n, \end{aligned}$$

und

$$\delta_S d = \frac{i}{2}\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\xi} + \xi\sigma^\mu\bar{\lambda}). \quad (389)$$

Unter Verwendung der Fiertz-Identitäten (390) folgt:

- d transformiert als totale Ableitung.
- $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ bildet eine Basis für eine lineare Darstellung der $N = 1$ -SUSY.
- Die Darstellung ist reduzibel. (damit Beschränkung auf Felder, um zu irreduziblen Darstellungen zu gelangen)

$$[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \xi Q] = [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \xi^{\beta} \partial_{\beta} - i \xi^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\mu}] = i \xi^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu}.$$

Definiere die **kovariante Ableitung** (Spinorableitungen, die mit SUSY-Transformation antikommutieren).

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_{\mu}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i \theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu},$$

$$D^{\alpha} = -\partial_{\alpha} - i \theta_{\dot{\beta}} (\sigma^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} \partial_{\mu}, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i (\bar{\sigma})^{\dot{\alpha}\beta} \theta_{\beta} \partial_{\mu}. \quad (391)$$

Daraus folgt:

$$\{D_{\alpha}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = \{i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_{\mu}, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\} - \{\partial_{\alpha}, i \theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu}\} = -2i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu},$$

$$\{D_{\alpha}, D_{\beta}\} = i \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0,$$

$$\{D_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_{\mu}, -\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\} + \{\partial_{\alpha}, i \theta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \partial_{\mu}\} = 0,$$

$$\{D_{\alpha}, Q_{\beta}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = i \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_{\beta}\} = 0. \quad (392)$$

Mit Φ sind auch $\partial_{\mu}\Phi$, $D_{\alpha}\Phi$ und $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi$ Superfelder.

1.6.1 Chirales Superfeld

- Definition (Beschreibung siehe oben): $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$
- verwende nun bosonische Koordinaten

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta}. \quad (393)$$

- $\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^{\mu} = (-\partial_{\dot{\alpha}} - i Q^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu})(x^{\mu} + i \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta}) = i \theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} - i \theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} = 0$, $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta^{\alpha} = 0$.

Jede Funktion $\Phi(y, \theta)$ erfüllt $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$. Damit können wir das allgemeine **chirale Superfeld** schreiben als:

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2} \theta \psi(y) + \theta \theta F(y) = \quad (1.1)$$

$$= \varphi(x) + i \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \partial_{\mu} \varphi(x) - \frac{1}{4} (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) \varphi(x) + \sqrt{2} \theta \psi(x) + \frac{i}{2} (\theta \theta) \partial_{\mu} \psi(x) \sigma^{\mu} \bar{\theta} + \theta \theta F(x). \quad (394)$$

F transformiert sich als totale Ableitung, wobei $\varphi(y)$ ein skalares Feld, $\psi(y)$ ein Weyl-Spinor und $F(y)$ ein skalares Feld (Hilfsfeld) ist. Es gibt $4 + 4 = 8$ reelle Komponenten.

- Infinitesimale SUSY-Transformationen:

$$\delta \varphi = \sqrt{2} \xi \psi, \quad \delta \psi = \sqrt{2} \xi F + \sqrt{2} i \sigma^{\mu} \bar{\xi} \partial_{\mu} \varphi, \quad \delta F = -\sqrt{2} i \partial_{\mu} \psi \sigma^{\mu} \bar{\xi}. \quad (395)$$

Analog können wir das **antichirale Superfeld** einführen:

$$D_{\alpha} \Phi^{\dagger} = 0, \quad \Phi^{\dagger}(y^{\dagger}, \bar{\theta}) \text{ mit } y^{\dagger} = x^{\mu} - i \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta}.$$

Diese Superfelder werden in einem supersymmetrischen Standardmodell für die Fermionen wichtig sein.

1.6.2 Vektor-Superfelder

- Wir benötigen nun noch Vektorsuperfelder: $V(x, \theta, \bar{\theta}) = V'(x, \theta, \bar{\theta})$. Mit (388) folgt dann:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta \varrho(x) + \bar{\theta} \bar{\varrho}(x) + \theta \theta m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} m^*(x) + \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} v_{\mu}(x) + (\theta \theta) \bar{\theta} \bar{\psi} + (\bar{\theta} \bar{\theta}) \theta \psi + (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x).$$

Es gilt hierbei $f = f^*$, $v_{\mu} = v_{\mu}^*$ und $d = d^*$. Wir haben also vier reelle Skalare, zwei Majoranaspinoren und einen reellen Vektor, also 16 Freiheitsgrade.

- Ist $\Phi(y, \theta)$ ein chirales Superfeld, so ist $\Phi + \Phi^{\dagger}$ ein Vektorsuperfeld. Damit können wir das Vektorsuperfeld analog zu einer infinitesimalen abelschen Eichtransformation definieren:

$$V \mapsto V + \Phi + \Phi^{\dagger}, \quad v_{\mu} \mapsto v_{\mu} + \partial_{\mu} \Lambda, \quad \Lambda = i(\varphi - \varphi^*). \quad (396)$$

- Dank dieser Freiheit können wir einige Komponenten in V zu Null setzen. **Wess-Zumino-Eichung**: $\varphi = m = \varrho = 0$. In dieser Eichung hat das Vektorsuperfeld folgende einfache Form:

$$V_{\text{WZ}} = \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} v_{\mu}(x) + (\theta \theta) \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta} \bar{\theta}) \theta \lambda(x) + (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x). \quad (397)$$

- nicht konsistent mit SUSY-Transformation
- abelsche Eichfreiheit bleibt

1.7 SUSY-Feldstärke

- Wir definieren ein Superfeld, das **nur** die Wess-Zumino-Komponenten v_μ , λ und d enthält, nämlich das **Spinor-Superfeld**:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}(\overline{DD})D_\alpha V(x, \theta, \bar{\theta}), \\ \overline{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}(DD)\overline{D}_{\dot{\alpha}} V(x, \theta, \bar{\theta}) = (W_\alpha)^\dagger. \end{aligned} \quad (398)$$

- W_α ist chiral, denn es gilt $\overline{D}^{\dot{\beta}} W_\alpha = 0$.
- W_α ist **kein** allgemeines chirales Superfeld, denn es gilt:

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{W}^{\dot{\alpha}} = D^\alpha W_\alpha = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{W}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{D}_{\dot{\alpha}} (DD) \overline{D}_{\dot{\beta}} V = -\frac{1}{4} (\overline{DD}) (DD) V = -\frac{1}{4} D^\alpha (\overline{DD}) D V.$$

- W^α ist **eichinvariant**. Mit $D_\alpha \Phi^\dagger = 0$, $\overline{D}_{\dot{\beta}} \Phi = 0$ und Formel (392) folgt:

$$W_\alpha \mapsto -\frac{1}{4}(\overline{DD})D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) = W_\alpha - \frac{1}{4}(\overline{DD})D_\alpha \Phi = \quad (1.2)$$

$$= W_\alpha - \frac{1}{4} \overline{D}^{\dot{\beta}} \{ \overline{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha \} \Phi = W_\alpha + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \overline{D}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \Phi = W_\alpha + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \overline{D}^{\dot{\beta}} \Phi = W_\alpha. \quad (399)$$

- Zerlege in Wess-Zumino-Felder mit $V_{\text{WZ}}(y - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})$ und $F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$:

$$W_\alpha = \lambda_\alpha(y) + Q_\alpha d(y) - \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu}(x) + i(\theta\theta) \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(y).$$

- äquivalente Definition für nicht-abelschen Fall:

$$W_\alpha = -\frac{1}{8}(\overline{DD}) \exp(-2V) D_\alpha \exp(2V), \quad \overline{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{8}(DD) \exp(2V) \overline{D}_{\dot{\alpha}} \exp(-2V). \quad (400)$$

- Schreibe Transformation im nicht-abelschen Fall als

$$\exp(V) \mapsto \exp(-i\Lambda^\dagger) \exp(V) \exp(i\Lambda), \quad \Phi \mapsto i\Lambda, \quad \Phi^\dagger \mapsto -i\Lambda^\dagger.$$

Im nicht-abelschen Fall können wir ersetzen:

$$V \mapsto T_{ij}^a V_a, \quad [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \Lambda \mapsto T_{ij}^a \Lambda_a.$$

Infinitesimal:

$$\delta V = i(\Lambda - \Lambda^\dagger) - \frac{i}{2} [\Lambda + \Lambda^\dagger, V],$$

$$\exp(-2V) D_\alpha \exp(2V) \mapsto \exp(-2i\Lambda) \exp(-2V) (D_\alpha \exp(2V)) \exp(2i\Lambda) + \exp(-2i\Lambda) D_\alpha \exp(2i\Lambda).$$

Dies gilt wegen $D_\alpha \Lambda^\dagger = 0$ und somit:

$$W_\alpha \mapsto \underbrace{\exp(-2i\Lambda) W_\alpha \exp(2i\Lambda)}_{(401)} - \frac{1}{8} \underbrace{\exp(-2i\Lambda) (\overline{DD}) D_\alpha \exp(2i\Lambda)}_{\text{verschwindet mit (398)}}. \quad (401)$$

Ebenso gilt

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}} \mapsto \exp(-2i\Lambda^\dagger) \overline{W}_{\dot{\alpha}} \exp(2i\Lambda^\dagger).$$

In der Wess-Zumino-Eichung gilt:

$$W_\alpha = \lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha d(y) - (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \theta_\beta F_{\mu\nu}(y) + (\theta\theta) \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \nabla_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(y),$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + i[v_\mu, v_\nu], \quad \nabla_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} = \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} + i[v_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}].$$

1.8 SUSY-Wirkungen

Die F -Komponenten des chiralen und die d -Komponenten des Vektorsuperfeldes transformieren als totale Ableitung unter den SUSY-Transformationen.

$$\int d^4x \left\{ \int d^2\theta \Phi(y, \theta) + \int d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}) \right\}.$$

und

$$\int d^4x \int d^4\theta V(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (402)$$

sind reelle, invariante Wirkungen für (anti-)chirale bzw. Vektorsuperfelder.

1.8.1 Wess-Zumino-Modell

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi - \int d^4x \left\{ \int d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3} g \Phi^3 \right) + \text{h.c.} \right\}. \quad (403)$$

Bosonische Komponenten (mit 394):

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} &= -\frac{1}{4} \square \varphi^* \varphi - \frac{1}{4} \varphi^* \square \varphi + F^* F + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi, \\ \frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3} g \Phi^3 \Big|_{\theta^2} &= m \varphi F + g \varphi^2 F. \end{aligned}$$

Damit ist F ein nicht-propagierendes Hilfsfeld, das mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden kann.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F} = F^* - m \varphi - g \varphi^2 = 0. \quad (404)$$

Dann können wir den bosonischen Teil von (403) schreiben als

$$\int d^4x [\partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^*)],$$

mit dem skalaren Potential

$$V(\varphi, \varphi^*) = |F|^2 = (m \varphi^* + g \varphi^{*2})(m \varphi + g \varphi^2). \quad (405)$$

Allgemein führt man das **Superpotential** ein, eine holomorphe Funktion, abhängig von Φ (nicht Φ^\dagger).

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi - \int d^4x \left[\int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} \right]. \quad (406)$$

Dann ist das skalare Potential gegeben durch

$$V_F(\varphi, \varphi^*) = |F|^2 = \left| \frac{\delta W}{\delta \Phi} \Big|_{\Phi=\varphi} \right|^2.$$

Ein kubisches Superpotential führt zu einem quartischen skalaren Potential. Dies bedeutet, dass das Wess-Zumino-Modell die **allgemeinste renormierbare** 4D-SUSY-Wirkung für ein einzelnes chirales Superfeld ist. Wir können noch weiter verallgemeinern:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi^i, (\Phi^j)^\dagger) - \left[\int d^2\theta W(\Phi^i) + \text{h.c.} \right], \quad (407)$$

wobei $K(\Phi^i, (\Phi^j)^\dagger)$ das Kähler-Potential ist.

1.8.2 SUSY-Yang-Mills-Theorie

Ein Kandidat für eine eichinvariante Wirkung ist

$$\frac{1}{2} \int d^4x \int d^2\theta \operatorname{Sp}(W^\alpha W_\alpha), \quad W_\alpha \mapsto \exp(-2i\Lambda)W_\alpha \exp(2i\Lambda), \quad W_\alpha = -\frac{1}{8}(\overline{D}\overline{D}) \exp(-2V)D_\alpha \exp(2V).$$

Letztendlich führt dies auf folgendes:

$$\int d^4x \operatorname{Sp} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - i\lambda \sigma^\mu \nabla_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right), \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (408)$$

Die ersten beiden Terme kommen im Wesentlichen von

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \theta_\beta F^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \sigma^\mu \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^\mu,$$

und

$$\operatorname{Sp}(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Unter Eichtransformationen transformieren chirale Superfelder in der adjungierten Darstellung

$$\Phi \mapsto \exp(-2i\Lambda)\Phi, \quad \Phi^\dagger \mapsto \Phi^\dagger \exp(2i\Lambda^\dagger).$$

Dies bedeutet, dass $\operatorname{Sp}(\Phi^\dagger \Phi)$ nicht eichinvariant ist, jedoch $\operatorname{Sp}(\Phi^\dagger \exp(2V)\Phi)$. Dann gilt nämlich

$$\operatorname{Sp}(\Phi^\dagger \exp(2V)\Phi) \mapsto \Phi^\dagger \exp(2i\Lambda^\dagger) [\exp(-2i\Lambda^\dagger) \exp(2V) \exp(2i\Lambda)] \exp(-2i\Lambda)\Phi.$$

Ersetze (403):

$$S = \operatorname{Sp} \left\{ \int d^4x \int d^2\theta (\Phi^i)^\dagger \exp(2V)\Phi^i \right\} + \operatorname{Sp} \left\{ \int d^4x \left[\int d^2\theta \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi^i \Phi^j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi^i \Phi^j \Phi^k + \text{h.c.} \right)}_{W(\Phi^i)} \right] \right\}. \quad (409)$$

$\operatorname{Sp}(\Phi^\dagger \exp(2V)\Phi)$ enthält einen D -Term $\varphi^* D\varphi$. Das Hilfsfeld D kann (wie F) mittels der Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Mittels (408) mit $1/(2g^2)D^2$ folgt

$$D_a = -g^2 \varphi_b \varphi_c^* \operatorname{Sp}(T^a T^b T^c) = -\frac{i}{2} g^2 f^{abc} \varphi_b \varphi_c^*,$$

und damit gilt

$$D = T^a D_a = \frac{1}{2} g^2 [\varphi, \varphi^*].$$

Somit ergibt sich ein neuer Beitrag zum skalaren Potential, nämlich

$$V_D = \frac{1}{2g^2} D^2 = \frac{g^2}{8} ([\varphi^i, \varphi^{i*}])^2, \quad (410)$$

und somit folgt:

$$V(\varphi^i, \varphi^{i*}) = V_F + V_D = |F|^2 + \frac{1}{2g^2} D^2. \quad (411)$$

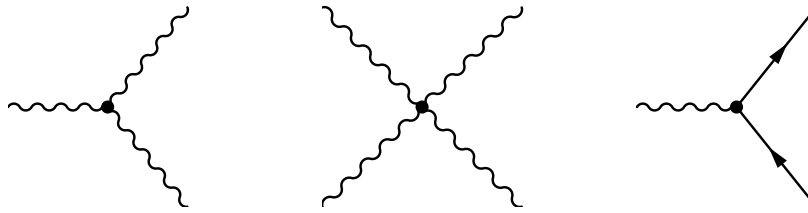
Wir können ferner (408) verallgemeinern:

$$\frac{1}{2} \int d^4x \int d^2\theta \operatorname{Sp}[f(\Phi^i)W^\alpha W_\alpha],$$

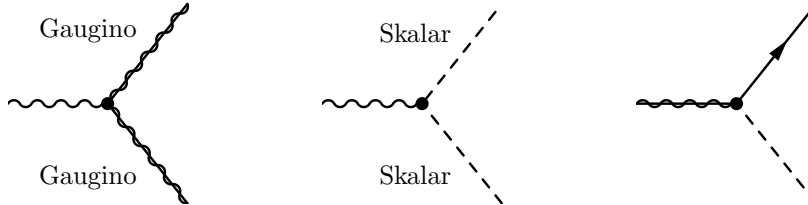
wobei man $f(\Phi^i)$ als **eichkinetische Funktion** bezeichnet. Aus dieser folgen Gaugino-Massenterme. **Jeder Term** in $f(\Phi^i)$ muss als in $(\operatorname{Ad}_j \times \operatorname{Ad}_j)$ -enthaltene Darstellung transformieren.

1.8.3 SUSY-Feynman-Diagramme

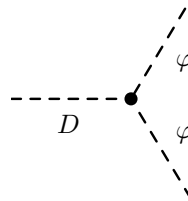
Standard:



Mit SUSY-Partnern:



Zu (413):



Ausintegration führt zu

$$\text{Diagram} \Rightarrow \text{Diagram} \sim T^a T^a \quad (413)$$

$$\text{Diagram} \Rightarrow \text{Diagram} \sim g^{ijn} g_{kln}^* \quad (414)$$

Massenterme

$$\text{Diagram} \Rightarrow \text{Diagram} \sim -im_{in}^* g^{ikn}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \varphi \end{array} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ F \end{array} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \varphi \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \varphi \end{array} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \varphi \end{array} \sim -im_{ik}^* m^{kj} \quad (415)$$

1.9 Das supersymmetrische Standardmodell

1.9.1 Standardmodell

- i.) Fermionen: $Q(3, 2, 1/6)$, $u^c(\bar{3}, 1, -2/3)$, $d^c(\bar{3}, 1, 1/3)$, $L(1, 2, -1/2)$, $e^c(1, 1, 1)$
 - ii.) Eichbosonen: $G_\mu^\alpha(8, 1, 0)$, $W_\mu^i(1, 3, 0)$, $B_\mu(1, 1, 0)$
 - iii.) Higgs-Boson: $\Phi(1, 2, 1/2)$
- (nur LH Fermionen im Gegensatz zu (2))

1.9.2 Supersymmetrisierung

- i.) Links- und rechtshändige Fermionen transformieren unterschiedlich. Dies legt nahe, **chirale Superfelder** zu wählen.

$$Q = (q, \tilde{q}), \quad q = (u, d), \quad u \equiv (u, c, t), \quad d \equiv (d, s, b), \quad U^c = (u^c, \tilde{u}^c).$$

Zu jedem Fermion gibt es somit einen skalaren Partner, sofern Supersymmetrie in der Natur realisiert ist. Die entsprechenden Partner zu den Quarks (\tilde{q} , \tilde{u}^c) bezeichnet man als Squarks.

- ii.) Eichbosonen werden mittels Vektorsuperfelder realisiert.

$$(G_\mu^a, \tilde{G}^a),$$

wobei \tilde{G}^a als Gluinos bezeichnet werden.

- iii.) Das Higgs-Boson entspricht einem chiralen Superfeld, das ein **zusätzliches Fermion** enthält.
Probleme:

- a.) $U(1)_Y$ -Anomalie ((152) ff.)

Es ist problematisch, ein zusätzliches Fermion mit nicht-verschwindenden Quantenzahlen (nichtverschwindender Hyperladung) einzuführen.

- b.) Ungerade Anzahl an fermionischen $SU(2)$ -Dubletts führt zu einer sogenannten **Witten-Anomalie**.

- c.) **elektroschwache Symmetriebrechung**

Ein massives Vektorsupermultiplett besteht auch einem reellen Skalar, einem massiven Vektor und zwei Majorana-Spinoren.

- * Higgs-Mechanismus: masseloses Vektorsupermultiplett (1 Vektor, 1 Majorana-Spinor) und masseloses chirales Supermultiplett
- * ein Skalar stellt einen longitudinalen Freiheitsgrad für einen massiven Vektor
- * Z^0 , W^\pm benötigen drei longitudinale Freiheitsgrade plus drei reelle Skalare H^0 und H^\pm .

Infolgedessen muss man zwei Higgs-Felder $H_u(1, 2, 1/2)$ und $H_d(1, 2, -1/2)$ einführen. Damit haben wir den Teilcheninhalt des **minimalen supersymmetrischen Standardmodells** (MSSM).

1.9.3 Kopplungen

- i.) Kopplung zwischen den Higgsfeldern

$$W_H = \mu H_u \cdot H_d = \mu \varepsilon_{ij} H_u^i H_d^j = -\mu H_d \cdot H_u, \quad (416)$$

wobei μ der einzige **dimensionsbehaftete Parameter** im MSSM ist. Wegen der elektroschwachen Symmetriebrechung muss $\mu = \mathcal{O}(M_{ew})$ sein (und nicht $\mathcal{O}(M_{GUT})$ oder $\mathcal{O}(M_{Pl})$). Man bezeichnet dies als μ -Problem.

ii.) Kopplungen zwischen Higgs und Materie

$$W_Y = \lambda_a Q H_u U^c + \lambda_d Q H_d D^c + \lambda_e L H_d E^c. \quad (417)$$

Aus der Holomorphie des Superpotentials folgt, dass H_u and Up-Quarks und H_d an Down-Quarks koppelt.

$$M_u = \lambda_u \langle H_u^0 \rangle, \quad M_d = -\lambda_d \langle H_d^0 \rangle, \quad M_c = -\lambda_c \langle H_d^0 \rangle.$$

iii.) Higgs-Massenterme

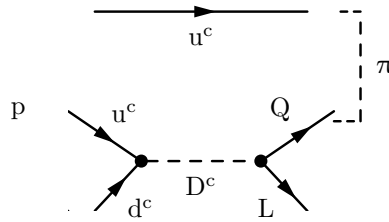
$$\mathcal{L}_\mu = -\mu(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_d^- + \tilde{H}_u^0 \tilde{H}_d^0) + \text{h.c.} - |\mu|^2(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 + |H_d^0|^2 + |H_d^-|^2). \quad (418)$$

Von D -Termen kommen Beiträge mit positiver Krümmung. Ein stabiles Minimum liegt daher für $\langle H_u \rangle = \langle H_d \rangle = 0$ vor und die Supersymmetrie muss gebrochen sein.

Sind das alle möglichen Kopplungen (wie im Standardmodell)? Nein!

$$W_R = \alpha^{ijk} Q_i L_j D_k^c + \beta^{ijk} L_i L_j E_k^c + \gamma^{ijk} U_i^c D_j^c D_k^c + \delta^i L^i H_u. \quad (419)$$

Diese Kopplungen verletzen Leptonen- oder Baryonenzahl. Damit lassen sich Prozesse finden, die beispielsweise zum Protonzerfall führen:



$\tau^{\text{exp}} > 10^{33}$ Jahre erzwingt $|\alpha\gamma| \lesssim 10^{-25}$. Starke Einschränkungen an die Kopplungen können auch von Flavourphysik herrühren. Lösung: Postuliere zusätzliche **diskrete Symmetrie** nämlich die **R-Parität** (Fayet (1976)). Diese ist definiert durch

$$R_p = (-1)^{3B+L+2S}.$$

Manchmal findet man auch die Definition

$$R_p = (-1)^{3(B-L)+2S}.$$

Das ist gerade so gewählt, dass die Teilchen des Standardmodells positive und deren SUSY-Partner negative R-Parität besitzen. Die Erhaltung der R-Parität verbietet die Kopplungen (419). Die R-Parität kann aus der Brechung einer R-Symmetrie erfolgen. Betrachten wir dazu Gleichung (370a):

$$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha.$$

Wegen der Darstellung $\Phi = \phi + \theta\psi + \theta^2 F$ gilt für ein chirales Superfeld $R_\psi = R_\Phi - 1$. Damit besitzen die Komponenten des Superfelds **unterschiedliche R-Ladungen**.

$$R\Phi(y, \theta) = \exp(ir\alpha)\Phi(y, \exp(-i\alpha)\theta),$$

also

$$R\Phi = \exp(ir\alpha)\Phi, \quad R\psi = \exp(i(r-1)\alpha)\psi.$$

Der kinetische Term

$$\int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi,$$

ist R-invariant. Für das Superpotential gilt

$$RW(\Phi(y, \theta)) = \exp(2i\alpha)W(\Phi(y, \exp(-i\alpha))).$$

Da W eine Summe von unterschiedlichen Termen ist, ist das Superpotential in der Regel nicht R-invariant. Im MSSM induziert die SUSY-Brechung Gaugino-Massenterme. Dadurch wird die R-Symmetrie gebrochen zur R-Parität.

Eine äquivalente Beschreibung kann durch Einführung der Materie-Parität

$$R_m = (-1)^{3(B-L)},$$

erfolgen. Mit dieser Definition besitzen Materieteilchen negative Parität und Higgs-/Vektorfelder positive. Die Konsequenzen dieser R-Parität sind die folgenden:

- i.) SUSY-Partner werden nur paarweise erzeugt.
- ii.) Das leichteste supersymmetrische Teilchen ist stabil (LSP).
- iii.) Alle SUSY-Teilchen zerfallen letztendlich in eine ungerade Anzahl von LSP.

Das LSP ist ein Kandidat für dunkle Materie. Bei $T > 1 \text{ eV}$ ist

$$\Omega_x \sim \frac{1}{(100 \text{ TeV})^2} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_{\text{dm}v} \rangle} \sim 10^{-13} \text{ barn} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_{\text{dm}v} \rangle} \stackrel{!}{=} \mathcal{O}(1).$$

Hieraus folgt $\langle \sigma_{\text{dm}v} \rangle \sim 10^{-13} \text{ barn}$, also Piko- bis Femtobarn-Bereich. Dies ist genau die Größenordnung elektroschwacher Prozesse.

1.10 Gebrochene Supersymmetrie

- P^2 ist ein Casimir-Operator: Damit müssten Standardmodell-Teilchen und deren SUSY-Partner dieselbe Masse besitzen (371). Experimentell gibt es jedoch keinerlei Hinweise auf die SUSY-Partner, womit die Supersymmetrie gebrochen sein muss.
- Derzeit ist unklar, wie Supersymmetrie gebrochen ist. (Spontane Symmetriebrechung schlägt fehl.) Wichtig ist, dass quadratische Divergenzen vermieden werden sollen. Es müssen somit die Relationen zwischen den Kopplungen erhalten bleiben (siehe (360)). Dies läuft unter dem Stichwort **sanfte Brechung**.

Führe sanfte Brechungsterme per Hand ein (Dimopoulos, Raby (1981)) („Parametrisierung unserer Unwissenheit“). Systematisch wurde dies untersucht von Girardello, Grisaru (1981).

– skalare Massenterme:

$$(m^2)^i_j \phi^{*j} \phi_i + \left[\frac{1}{2} b^{ij} \phi_i \phi_j + \text{h.c.} \right].$$

– Gaugino-Massenterme:

$$\frac{1}{2} M_\lambda \lambda^a \lambda^a + \text{h.c.}$$

– A-Terme:

$$\frac{1}{6} A^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{h.c.} \quad (420)$$

Damit folgt:

$$\mathcal{L}_{\text{soft}}^{MSSM} = -\frac{1}{2} (M_3 \tilde{G}\tilde{G} + M_2 \tilde{W}\tilde{W} + M_1 \tilde{B}\tilde{B}) + \text{h.c.} \quad (1.3)$$

$$- (A_u \tilde{u}^c \tilde{q} H_u + A_d \tilde{d}^c \tilde{q} H_d + A_e \tilde{e}^c \tilde{l} H_d) + \text{h.c.} \quad (1.4)$$

$$- (m_Q^2 \tilde{q}^* \tilde{q} + m_u^2 (\tilde{u}^c)^* \tilde{u}^c + m_d^2 (\tilde{d}^c)^* \tilde{d}^c + m_L^2 \tilde{l}^2 \tilde{l} + \quad (1.5)$$

$$m_e^2 (\tilde{e}^c)^* \tilde{e}^c + m_{H_u} H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d) - (B\mu H_u H_d + \text{h.c.}). \quad (421)$$

- Skalare Massenterme müssen positiv sein, um $\text{SU}(3)_c$, $\text{U}(1)_{\text{em}}$, $\text{U}(1)_B$ und $\text{U}(1)_L$ nicht zu brechen.
- Mit $\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}}$ besitzt das MSSM mehr als 100 freie Parameter. Es ist damit wichtig, die Brechung von Supersymmetrie zu verstehen.

1.11 Brechung der elektroschwachen Symmetrie in der Supersymmetrie

- Betrachte skalares Potential und minimiere es. Da Squarks und Sleptonen keinen Vakuumerwartungswert besitzen dürfen, können wir uns auf den Higgssektor konzentrieren.

$$V_{\text{Higgs}} = |\mu|^2 (H_u^\dagger H_u + H_d^\dagger H_d) + \frac{1}{2} g^2 \left(H_u^\dagger \frac{\tau}{2} H_u + H_d^\dagger \frac{\tau}{2} H_d \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{2} \right)^2 (H_u^\dagger H_u + H_d^\dagger H_d)^2. \quad (422)$$

Addiere SUSY-brechende Terme:

$$V' = m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u + m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d + (B\mu H_u H_d + \text{h.c.}). \quad (423)$$

Wähle $\langle H_u^+ \rangle = 0$ ($SU(2)_L$ -Transformation).

$$\left. \frac{\partial V}{\partial H_u^\dagger} \right|_{\langle H_u^\dagger \rangle = 0} = B\mu H_d^- + \frac{g^2}{2} (H_d^0)^* H_d^- (H_u^0)^* \stackrel{!}{=} 0.$$

Hieraus folgt dann $\langle H_d^- \rangle = 0$.

- Betrachte die neutralen Komponenten:

$$V(H_u^0, H_d^0) = m_u^2 |H_u^0|^2 + m_d^2 |H_d^0|^2 - B\mu (H_u^0 H_d^0 + H_u^{0*} H_d^{0*}) + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2, \quad (424)$$

mit

$$m_u = |\mu|^2 + m_{H_u}^2, \quad m_d = |\mu|^2 + m_{H_d}^2.$$

- Stabilitätsbedingung:

$$m_u^2 + m_d^2 = 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 > 2|B\mu| \quad (425)$$

- kein Minimum im Ursprung:

$$m_u^2 m_d^2 < |B\mu|^2 \quad (426)$$

Es gibt also eine Relation zwischen SUSY-erhaltenen (μ) und SUSY-brechenden Parameters (μ -Problem). Es muss außerdem

$$m_{H_u}^2 \neq m_{H_d}^2, \quad (427)$$

sein. Aus $\langle H_u^0 \rangle = 1/\sqrt{2} v_u$ und $\langle H_d^0 \rangle = 1/\sqrt{2} v_d$ folgt:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2, \quad v^2 = v_u^2 + v_d^2 \approx (246 \text{ GeV})^2.$$

Definiere

$$\boxed{\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}}. \quad (428)$$

Nach der Symmetriebrechung verbleiben fünf Skalare h , H , A und H^\pm .

$$\begin{aligned} m_A^2 &= m_u^2 + m_d^2 = \frac{B\mu}{\sin(\beta) \cos(\beta)}, \\ m_{H^\pm}^2 &= m_A^2 + M_W^2, \\ m_{h,H}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ m_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(m_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 m_A^2 \cos^2 \beta} \right\}. \end{aligned} \quad (429)$$

Definiere den Mischungswinkel α über

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)} = -\frac{m_A^2 + M_Z^2}{m_H^2 - m_h^2}. \quad (430)$$

Kommen wir zur Beziehung, in der das μ -Problem standardmäßig formuliert wird:

$$\begin{aligned} B\mu &= \frac{1}{2} \{ (m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2) \tan(2\beta) - M_Z^2 \sin(2\beta) \}, \\ \mu^2 &= \frac{1}{\cos(2\beta)} \{ m_{H_u}^2 \sin^2 \beta - m_{H_d}^2 \cos^2 \beta \} - \frac{1}{2} M_Z^2. \end{aligned} \quad (431)$$

Wir betrachten die Grenzfälle

- $B \mapsto \infty$: $m_A^2 \mapsto \infty$, $m_{H^\pm} \mapsto \infty$, $m_H \mapsto \infty$

$$m_h < M_Z |\cos(2\beta)| < M_Z. \quad (432)$$

Dies ist experimentell ausgeschlossen, womit große Korrekturen nötig sind! Ein-Schleifen-Korrektur:

$$\delta m_h^2 \sim \frac{3\lambda_t^4}{8\pi^4} v^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}}^2}{m_t^2} \right),$$

und somit $m_h \lesssim 130 \text{ GeV}$ für $m_{\tilde{t}} \lesssim 1 \text{ TeV}$.

- $m_h \mapsto 0$: $\cos^2(2\beta) \mapsto 0 \Rightarrow m_A \mapsto 0$
Hier ist $m_H \mapsto M_Z$, $m_{H^\pm} \mapsto M_W$ und $\alpha \mapsto -\beta$.

1.12 Spartikel-Spektrum

- Skalare Top-Quarks:

$$\mathcal{L}_{\tilde{t}} = -(\tilde{t}_L^*, \tilde{t}_R^*) \mathcal{M}_{\tilde{t}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix},$$

$$M_{\tilde{t}}^2 = \begin{pmatrix} m_t^2 + m_{\tilde{t}_L}^2 + \delta_u & v((A_u)_{33} \sin \beta - \mu y_t \cos \beta) \\ v((A_u)_{33} \sin \beta - \mu y_t \cos \beta) & m_t^2 + m_{\tilde{t}_R}^2 + \delta_{\bar{u}} \end{pmatrix}. \quad (433)$$

$$\delta_f = (T_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_w) \cos(2\beta) M_Z^2, \quad (434)$$

$$\Rightarrow \delta_u = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) \cos(2\beta) M_Z^2, \quad \delta_{\bar{u}} = \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \cos(2\beta) M_Z^2.$$

(siehe (413) bis (415))

- Skalares Bottom-Quark:

$$M_{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} m_b^2 + m_{\tilde{b}_L}^2 + \delta_d & v((A_d)_{33} \cos \beta - \mu y_b \sin \beta) \\ v((A_d)_{33} \cos \beta - \mu y_b \sin \beta) & m_b^2 + m_{\tilde{b}_R}^2 + \delta_{\bar{d}} \end{pmatrix}. \quad (435)$$

Große Yukawa-Kopplungen und große A -Terme ermöglichen große Mischungen.

- Gluinos:

Diese bilden ein Farb-Oktett, mischen nicht miteinander und besitzen die Masse $|M_3|$.

- $\widetilde{W}^\pm, \widetilde{H}^\pm$: Charginos

$$M_C = \begin{pmatrix} M_Z & \sqrt{2} M_W \sin \beta \\ \sqrt{2} M_W \cos \beta & \mu \end{pmatrix}. \quad (436)$$

Masseneigenzustände sind:

$$\frac{1}{2} \left\{ (|M_Z|^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2) \pm \sqrt{(|M_Z|^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2)^2 - 4|\mu M_Z - M_W^2 \sin(2\beta)|^2} \right\}. \quad (437)$$

$||\mu| + M_Z| \gg M_W$: Wino, Higgsino

- Neutralinos: $\widetilde{B}, \widetilde{W}^3, \widetilde{H}_d^0, \widetilde{H}_u^0$

$$M_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z \sin \theta_w \sin \beta & M_Z \sin \theta_w \sin \beta \\ 0 & M_2 & M_Z \cos \theta_w \cos \beta & M_Z \cos \theta_w \sin \beta \\ -M_Z \sin \theta_w \cos \beta & -M_Z \sin \theta_w \cos \beta & 0 & -\mu \\ M_Z \sin \theta_w \sin \beta & M_Z \sin \theta_w \sin \beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (438)$$

Für $M_Z \ll |\mu \pm M_1|, |\mu \pm M_2|$ sind die Eigenzustände näherungsweise $\widetilde{B}, \widetilde{W}^0, 1/\sqrt{2}(H_u^0 \pm H_d^0)$ mit den Massen $|M_1|, |M_2|, |\mu|$ und $|\mu|$. Für $M_Z \ll |M_1| < |M_2| < |\mu|$ ist das leichteste Neutralino, das Bino, gleichzeitig das leichteste supersymmetrische Teilchen.

1.13 Nicht-minimale Modelle

- Grundidee: Der μ -Term wird bei der SUSY-Brechung erzeugt.
- Beispiel: NMSSM
Ersetze den μ -Term durch

$$\frac{1}{6}KS^3 + \lambda_3SH_uH_d, \tag{439}$$

wobei S ein SM-Singulett ist und alle anderen Terme durch eine **zusätzliche Symmetrie** verboten sind. Wenn S einen Vakuumerwartungswert erhält, wird der μ -Term generiert: $\mu = \lambda_s \langle S \rangle$. Damit ist μ automatisch $\mathcal{O}(M_{\text{SUSY}})$.

- Verschiedene Varianten von MSSM-Erweiterungen werden diskutiert; diese sind phänomenologisch interessant.
- Singulettts treten natürlicherweise im Rahmen von GUTs und Stringmodellen auf.

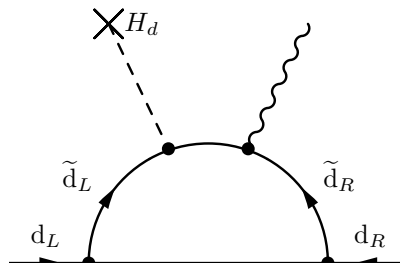
1.14 SUSY-Flavour und CP-Problem

- Lepton-Sektor: $\mu \rightarrow e\gamma$

$$\frac{\Gamma^{\mu \rightarrow e\gamma}}{\Gamma^{\mu \rightarrow e\nu_\mu \bar{\nu}_e}} \sim 3 \cdot 10^{-4} \left(\frac{500 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right)^4 \left(\frac{\Delta m_L^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \right)^2 \stackrel{!}{\lesssim} 5 \cdot 10^{-11}.$$

Damit muss M_{SUSY} groß ($\mathcal{O}(100 \text{ TeV})$) oder Δm_L^2 (Skalarmassenmischung) klein sein.

- Quark-Sektor: K^0 - \bar{K}^0 -Mischung
- Elektrisches Dipolmoment



$$M_{\text{EDM}} \sim \frac{\alpha_3}{4\pi} e(v \cos \beta) \frac{(A_d)_{11} \delta}{M_{\text{SUSY}}^2} \Rightarrow \delta < 10^{-2} \left(\frac{M_{\text{SUSY}}}{500 \text{ GeV}} \right)^4.$$

Lösungsansätze

1.) Universalität der Brechungsterme

- * Squark- und Sleptonmassenmatrizen sind proportional zur Einheitsmatrix in der Basis, in der Yukawakopplungen diagonal sind.
- * Die A -Terme sind proportional zu den Yukawakopplungen.
- * Es treten keine neuen nichttrivialen Phasen jenseits des Standardmodells auf.

2.) Entkopplungsszenarien

- * Die starken Flavoureinschränkungen betreffen die erste und zweite Generation. Die entsprechenden Teilchen dieser Generationen sollten daher schwer sein (20 bis 100 TeV).
- * Higgs-Korrekturen: Die dritte Generation sollte leicht sein ($< 1 \text{ TeV}$).

Kapitel 2

Brechung der Supersymmetrie

2.1 Spontane Symmetriebrechung

Wir haben bereits gesehen, dass Supersymmetrie genau dann spontan gebrochen ist, wenn $\langle 0|H|0\rangle > 0$ gilt.

$$V = \frac{1}{2}(F^i)^* F_i + \frac{1}{2}g^2 D^a D^a. \quad (440)$$

Damit dürfen die F und/oder die D -Terme nicht verschwinden.

- F -Term-Brechung (O’Raifeartaigh-Modelle):

Betrachte

$$W_F = -k^2 \Phi_1 + m \Phi_2 \Phi_3 + \frac{1}{2} y \Phi_1 \Phi_3^2.$$

Das skalare Potential lautet dann

$$V = \left| k^2 - \frac{1}{2} y \varphi_3^* \right|^2 + |m \varphi_3^*|^2 + |m \varphi_2^* + y \varphi_1 \varphi_3^*|^2. \quad (441)$$

$|F_1| = 0$ und $|F_2| = 0$ ist dank des linearen Terms nicht möglich. Für große m gilt im Minimum $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ und damit $V = |F_1|^2 = k^4$. Das Massenspektrum ist dann

- * Skalare: $(0, 0, m^2, m^2, m^2 - yk^2, m^2 + yk^2)$
- * Fermionen: $(0, m, m)$

Man erkennt folgende Summenregel:

$$\text{Sp}(M_S^2) = 2\text{Sp}(M_F^* M_F).$$

Allgemein lässt sich eine weitere Summenregel ableiten:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(M^2) &= \sum_j (-1)^j (2j+1) \text{Sp}(M_j^2) = \text{Sp}(M_S^2) - 2\text{Sp}(M_F^\dagger M_F) + 3\text{Sp}(M_V^2) = \\ &= 2g_a \text{Sp}(T^a) T^a = 0, \end{aligned} \quad (442)$$

für eine anomaliefreie U(1)-Symmetrie. Die Masse von φ_1 erhält Korrekturen

$$m_1^2 = \frac{y^4}{48\pi^2} \frac{|F_1|^2}{m^2}.$$

Das Fermion ψ_1 bleibt masselos und ist das **Goldstino!**

- D -Term-Brechung (Fayet-Iliopoulos-Mechanismus):

Es wird die Tatsache verwendet, dass es eine zusätzliche U(1)-Eichgruppe gibt mit $\mathcal{L}_{FI} = \kappa^2 D$ (443). Damit lautet das skalare Potential:

$$V = \frac{1}{2} D^2 - \kappa^2 D + g D \sum_i q_i (\varphi^i)^* \varphi_i.$$

Haben die Skalare φ_i nicht-verschwindende Massen m_i (vom Superpotential, also Paare von Skalaren mit entgegengesetzten Vorzeichen), dann ist die SUSY gebrochen. Für $|m_i|^2 > gq_i\kappa^2$ gilt $\langle\varphi\rangle = 0$ und $D = \kappa^2$. Die Massen sind gegeben durch

$$m_{\text{skalar}}^2 = |m_i|^2 - gq_i\kappa^2, m_{\text{fermion}} = |m_i|^2,$$

wobei die Gauginos masselos bleiben.

2.2 Goldstino

Schauen wir uns die Fermionmassenmatrix (mit Gauginos λ^a , Weyl-Spinoren ψ) an:

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g_a(\langle\varphi^*\rangle T^a)^i \\ \sqrt{2}g_a(\langle\varphi^*\rangle T^a)^j & \langle W^{ji} \rangle \end{pmatrix}, \quad W^{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}W. \quad (444)$$

Diese besitzt einen masselosen Eigenvektor

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\langle D^a \rangle \\ \langle F^a \rangle \end{pmatrix}, \quad (445)$$

das zugehörige Feld ist das **Goldstino**.

$$\Pi = \frac{1}{F_\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle D^a \rangle\lambda^a + \langle F^i \rangle\psi_i \right), \quad F_\pi = \sum_a \frac{1}{2}\langle D^a \rangle^2 + \sum_i \langle F^i \rangle^2, \quad (446)$$

Das Goldstino bleibt masselos (Nambu-Goldstone-Fermion). Es kann allerdings die longitudinale Komponente eines Spin-3/2-Teilchens werden (Super-Higgs-Mechanismus). Ein Spin-3/2-Teilchen tritt automatisch auf, wenn wir **lokale Supersymmetrie-Transformationen** betrachten.

2.3 Supergravitation

Unter **lokalen Supersymmetrie-Transformationen** wird ξ^a eine Funktion der Raumzeit:

$$[\xi(x)Q, \bar{\xi}(x)\bar{Q}] = 2\xi(x)\sigma^\mu\bar{\xi}(x)P_\mu. \quad (447)$$

Der Kommutator zweier lokaler SUSY-Transformationen ist eine von der Raumzeit abhängigen Translation, also eine **allgemeine Koordinatentransformation**. Damit führt lokale SUSY zu einer Gravitationstheorie, der **Supergravitation**. Die **Theorie** ist **keine** allgemeine Quantengravitationstheorie; sie ist nicht-renormierbar und die Kopplungskonstante ist $\kappa \sim \sqrt{G_N} \sim 1/M_{\text{pl}}$. Das Gravitationsmultiplett enthält das Graviton und das Gravitino ($S = 3/2$).

$$\delta\tilde{\psi}_\mu^\alpha = -\partial_\mu\xi^\alpha + \dots, \quad (\text{vergleiche } \delta A_\mu^a = -\partial_\mu\Lambda^a + \dots)$$

Damit ist das Gravitino das „Eichteilchen“ von lokalen SUSY-Transformationen. Wenn die SUSY spontan gebrochen wird, wird das Goldstino longitudinale Komponente und das Gravitino wird massiv.

$$m_{3/2} \sim \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}}. \quad (448)$$

Für $\langle F_X \rangle \mapsto 0$ gilt $m_{3/2} \mapsto 0$ und für $M_{\text{pl}} \mapsto \infty$ gilt ebenso $m_{3/2} \mapsto 0$. Das Graviton selbst bleibt masselos.

2.4 Brechungsszenarien

- Sowohl Fayet-Iliopoulos als auch O’Raifeartaigh-Modelle **wählen** den SUSY-Brechungsansatz. Ziel: Mechanismus, der Massenskala M_{pl} natürlich erzeugt. Dies führt zu einer dynamischen Brechung, siehe QCD:

$$\Lambda \sim \exp\left(-\frac{8\pi}{bg_0^2}\right)M_{\text{pl}}.$$

g_0 ist die Kopplung einer asymptotisch freien nicht-abelschen Symmetrie.

- Da es keine Skalar-Gaugino-Gaugino-Kopplung gibt, reichen renormierbare Baumgraph-Kopplungen nicht aus, um die SUSY-Brechung zum MSSM zu übersetzen.

$$\text{Hidden Sector (SUSY-Brechung)} \xrightarrow[\text{Wechselwirkung}]{\text{flavour-blind?}} \text{Visible Sektor (MSSM (GUT?))}$$

2.4.1 „Gauge-mediated“

Botenfelder = chirale Supermultipletts mit Masse M_{mess}

- koppeln an SUSY-brechenden Vakuumerwartungswert
- besitzen MSSM-Wechselwirkungen

Massen werden durch Schleifeneffekte erzeugt, also

$$m_{\text{soft}} \sim \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\langle F \rangle}{M_{\text{mess}}} . \quad (449)$$

Weder $\langle F \rangle$ noch M_{mess} sind festgelegt. Das Gravitino kann das LSP sein.

2.4.2 „Gravity-mediated“

Hidden-Sektor X hat eine nicht-verschwindende F -Komponente, so dass

$$m_{\text{soft}} \sim \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} \Rightarrow \sqrt{\langle F_X \rangle} \sim 10^{10-11} \text{ GeV} . \quad (450)$$

Alternativ: Gaugino-Kondensat

$$\langle 0 | \lambda^a \lambda^b | 0 \rangle = \delta^{ab} \Lambda^2 \neq 0 \Rightarrow m_{\text{soft}} \sim \frac{\Lambda^3}{M_{\text{pl}}^2} ,$$

das heißt $\Lambda \sim 10^{13} \text{ GeV}$. Unterhalb der Planck-Skala:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & - \int d^4\theta \frac{X^*}{M_{\text{pl}}} \widehat{b}^{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{X \cdot X^*}{M_{\text{pl}}^2} (\widehat{m}^i_j \Phi_j \bar{\Phi}^j + \widehat{b}^{ij} \Phi_i \Phi_j) + \text{h.c.} \\ & - \int d^2\theta \frac{X}{2M_{\text{pl}}} (\widehat{M}_3 G^\alpha G_\alpha + \widehat{M}_2 W^\alpha W_\alpha + \widehat{M}_1 B^\alpha B_\alpha) + \text{h.c.} \\ & - \int d^2\theta \frac{X}{M_{\text{pl}}} \widehat{\alpha}^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (451)$$

G_α , W_α und B_α sind Spinor-Superfelder (398, 400). Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} (\widehat{M}_3 \widetilde{G} \widetilde{G} + M_2 \widetilde{W} \widetilde{W} + M_1 \widetilde{B} \widetilde{B}) + \text{h.c.} - \frac{\langle F_X \rangle \langle F_X^* \rangle}{M_{\text{pl}}^2} (\widehat{m}^i_j \varphi_i \varphi_j^* + \widehat{b}^{ij} \varphi_i \varphi_j) + \text{h.c.} - \\ & - \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} \widehat{\alpha}^{ijk} \varphi_i \varphi_j \varphi_k - \frac{\langle F_X^* \rangle}{M_{\text{pl}}} \int d^2\theta \widehat{b}^{ij} \Phi_i \Phi_j + \text{h.c.} \end{aligned}$$

Vergleiche (421):

- Gaugino-Massen: \widehat{M}_i
 - skalare Massen \widehat{m}^i_j
 - μ -Term: $\mu = \widehat{b}' \delta_{H_u}^i \delta_{H_d}^j \frac{\langle F_X^* \rangle}{M_{\text{pl}}}$
 - A -Terme: $\widehat{\alpha}^{ijk}$
 - B -Term: $\widehat{b}^{ij} = \widehat{b} \delta_{H_u}^i \delta_{H_d}^j$
- (452)

Annahme: Universalität der Brechungsterme bei M_{GUT} (mSUGRA) oder M_{pl} :

$$\begin{aligned} m_{1/2} = M_i &= \widehat{M} \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} , \\ m_0^2 = (M_\lambda^2) &= m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = \widehat{m} \frac{|\langle F_X \rangle|^2}{M_{\text{pl}}} , \\ b = B\mu &= \frac{\widehat{b}}{\widehat{b}'} \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} \mu , \\ A_f = a_0 Y_f &= \widehat{a} \frac{\langle F_X \rangle}{M_{\text{pl}}} Y_f . \end{aligned} \quad (453)$$

Bemerkungen zum Punkt „gauge-mediated“

- mSUGRA: Universalität bei M_{GUT}
 - Verwende MSSM-RGE bis M_{GUT} , darüber Theorie unklar
 - „Hoffnung“: Fehler unter Kontrolle, jedoch: Potentielle Flavour-Effekte, CMM-Modell
 - Universalitätsannahmen sind selbst bei GUT-Szenarien naiv.

- Gauginomassen:

$$\mathcal{L} \supset \int d^2\theta W_\alpha W_\beta \frac{X_{\alpha\beta}}{M_{\text{pl}}} + \text{h.c.} \sim \frac{\langle F_X \rangle_{\alpha\beta}}{M_{\text{pl}}} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \quad (454)$$

GUT: Eichfelder in der adjungierten Darstellung, das heißt X muss nur zu einer Darstellung in

$$(\text{ad}_{\text{GUT}} \times \text{ad}_{\text{GUT}})_{\text{symm}} = 1 + \text{ad}_{\text{GUT}} + \dots,$$

gehören. Nur zum GUT-Singulett gibt es universelle Gauginomassen!

- analog: skalare Massen

$$\mathcal{L} \supset \frac{\langle F_X F_X^* \rangle_{ij}}{M_{\text{pl}}^2} \varphi_i^* \varphi_j. \quad (455)$$

- Sind SUSY-Relationen stabil? \Rightarrow Renormierung

β -Funktion für Eichkopplung (Einschleifenniveau), siehe (67):

$$\beta_Y = \mu \frac{d\beta}{d\mu} = -\frac{g^2}{16\pi^2} b^{(i)}, \quad b^{(i)} = \frac{11}{3}T(\text{ad}) - \frac{2}{3}T(f) - \frac{1}{3}T(s), \quad T(\text{ad}) = N, \quad T(\square) = \frac{1}{2}.$$

Yukawa-Kopplung (Skalare Fermionen i, k):

$$(4\pi)^2 \beta_Y^i = \frac{1}{2} [Y_2^*(F) Y^j + Y^j Y_2(F)] + 2Y^k Y^{j*} Y^k + Y^k \text{Sp}(Y^{k*} Y^j) - 3g_i \{C_2^i(F), Y^j\}.$$

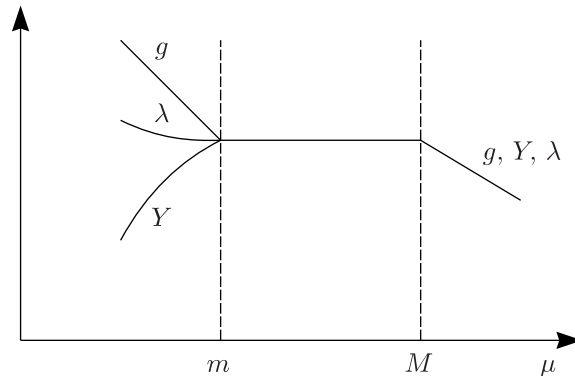
$C_2(F)$ ist der quadratische Casimir des Fermionfeldes unter der Farbgruppe i .

$$C_2(\square) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_2(\text{ad} = N), \quad Y_2(F) = Y^{j*} Y^j.$$

Nach langer Rechnung erhält man

$$(4\pi)^2 \beta_Y^i = (4\pi)^2 \beta_g,$$

das heißt, die Relation zwischen der Eichkopplung und der $q\bar{q}\tilde{g}$ -Kopplung, $Y = \sqrt{2}g$, bleibt unter der Renormierungsgruppe erhalten. Ebenso betrifft das die Relation zwischen der Eichkopplung g und der D -Term-Kopplung: $\lambda = g^2$. Allgemein kann man daraus folgern, dass für laufende Kopplungen in SUSY inklusive weicher Brechung gilt:



Die β -Funktion ändert sich unterhalb von M . Die Kopplungen bleiben gleich (immer noch SUSY, nur massives Multipllett ausintegriert).

2.4.3 Nichtrenormierungstheorem

- keine quadratisch divergenten Beiträge zur Higgsmasse
- allgemein: Grisaru, Siegel, Rocek (1979)
 - Die Parameter im Superpotential werden in keiner Ordnung in Störungstheorie renormiert (keine $\int d^2\theta$ -Terme).
 - Es verbleiben logarithmische Divergenzen aus

$$\int d^4\theta \bar{\phi}\phi, \quad \int d^4\theta \bar{\phi}V\phi, \quad \int d^4\theta V^2, \quad \int d^2\theta V^3$$

(inklusive zweier kovarianter Ableitungen)

\Rightarrow Wellenfunktions- und Eichkopplungsrenormierung (61, 60)

2.5 Laufen der Eichkopplungen im MSSM

Im Rahmen des Standardmodells hatten wir dies schon früher besprochen.

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(-\frac{41}{10}, \frac{19}{6}, 7 \right). \quad (69)$$

Im MSSM sind durch den unterschiedlichen Teilcheninhalt die Koeffizienten anders:

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(-\frac{23}{5}, -1, 3 \right).$$

SU(5)-Normierung:

$$g_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}g', \quad g_2 = g, \quad g_3 = g_s, \quad \alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}.$$

Auf Einschleifenniveau laufen α_i^{-1} linear mit μ .

$$\frac{d}{dt}\alpha_i^{-1} = -\frac{1}{2\pi}b_i, \quad t = \ln(\mu).$$

Die Kopplungen vereinigen bei $M_{\text{GUT}} \simeq 2 \cdot 10^{16}$ GeV (457) für $3 \text{ GeV} < M_{\text{SUSY}} < 100 \text{ TeV}$. Warum vereinigen die Eichkopplungen mit $M_{\text{SUSY}} \sim (100 - 1000) \text{ GeV}$?

- Squarks und Sleptonen: vollständige SU(5)-Multipletts, die das relative Laufen überhaupt nicht ändern.
- Gauginos: keine SU(5)-Multipletts, haben aber dieselbe Gruppenstruktur
Sie setzen die Vereinigungsskala M_{GUT} hoch.
- Higgs-Sektor: 1 Skalar \mapsto 2 Skalaren + 2 Fermionen
Vereinigung im Standardmodell kann auch erfolgen mit 6 bis 8 Higgs-Dubletts.

2.6 Radiative elektroschwache Symmetriebrechung

Betrachte das Laufen von $m_{\text{H}_u}^2$, $m_{\text{H}_d}^2$, $m_{\text{Q},33}^2$ und $m_{\text{u},33}^2$ für kleine Werte von $\tan\beta$. Vereinfachung:

- vernachlässige leichte Generationen
- Gaugino-Beiträge nur additiv: separate Betrachtung
- betrachte nur $|y_t|^2$ -Beiträge

$$16\pi^2 \frac{d}{dt}(m_{\text{H}_d}^2) = 0.$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{\text{H}_u}^2 \\ m_{\text{u},33}^2 \\ m_{\text{Q},33}^2 \end{pmatrix} = 2|y_t|^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{\text{H}_u}^2 \\ m_{\text{u},33}^2 \\ m_{\text{Q},33}^2 \end{pmatrix},$$

mit Eigenvektoren $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(3, 2, 1)$ und den Massen 0, 0 und 6. Renormierungsgruppen-Laufen: Bei beliebigen Startbedingungen erreicht man „Eigenwertebene“ (da m^2 Exponent von μ), in der Komponente zu Eigenvektor $(3, 2, 1)$ Null wird. Annahme: Wir starten mit universellen Parametern bei hoher Skala:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (453)$$

Im Infraroten laufen die Massen zu $m_0^2/2(-1, 0, 1)$, das heißt, $m_{\text{H}_u}^2$ wird negativ (Gut für Brechung der elektroschwachen Symmetrie), jedoch weer Bedingung noch ausreichend, vergleiche (431).

Kapitel 3

SUSY-SU(5)

Fermionen sind in einer $\mathbf{5}$ -Darstellung eingebettet: $\psi_i(\mathbf{5})$ für $i = 1, 2, 3$ (304). Es gilt $\psi(D^c, L)$. Weiterhin gibt es die Felder $\chi_i(\mathbf{10})$ mit $\chi = (Q, U^c, E^c)$ (305), die Eichbosonen $V_\mu(\mathbf{24})$ (306) und das Higgs $\Sigma(\mathbf{24})$: $H(\mathbf{5}) = (H_c, H_u)$ (310). SUSY: 2 Higgs-Felder: $\bar{H}(\mathbf{5})$
Dann lautet das SU(5)-brechende Superpotential (317)

$$W(\Sigma) = \frac{1}{2} M \text{Sp}(\Sigma^2) + \frac{1}{3} \Lambda \text{Sp}(\Sigma^3), \quad (459)$$

aus dem das skalare Superpotential folgt:

$$V = \sum_{i,j} \left| \frac{\partial W}{\partial \Sigma_j^i} - \frac{1}{5} \delta_i^j \text{Sp} \left(\frac{\partial W}{\partial \Sigma} \right) \right|^2. \quad (460)$$

Das Minimum folgt aus der Gleichung

$$M \Sigma_j^i + \Lambda \left[(\Sigma^2)^i_j - \frac{1}{5} \delta_j^i \text{Sp}(\Sigma^2) \right] = 0.$$

Diese Gleichung besitzt drei Lösungen. Die erste ist

$$\Sigma_j^i = 0,$$

und bricht die SU(5) nicht. Die zweite ist gegeben durch

$$\Sigma_j^i \sim \frac{M}{\Lambda} \text{diag}(1, 1, 1, 1, -4) \mapsto \text{SU}(4) \times \text{U}(1),$$

und die dritte

$$\Sigma_j^i \sim \frac{M}{\Lambda} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \mapsto G_{\text{SM}}.$$

Die drei physikalisch invarianten Vakuen sind entartet bezüglich ihrer Energie. Damit ist SUSY ungebrochen. (368). Ein Studium der Renormierungsgruppe liefert, dass kein Fine-Tuning für G_{SM} notwendig ist, jedoch keine **Vorhersage**. Wenn die SU(5) gebrochen ist, erhalten die Komponenten von Σ die Massen

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{24}) &= (\Sigma_8, \Sigma_3, \Sigma_{(3,2)}, \Sigma_{(\bar{3},2)} \Sigma_{24}). \\ m(\Sigma_{24}) &= \frac{1}{2} M, \quad m(\Sigma_8) = m(\Sigma_3) = \frac{5}{2} M. \end{aligned} \quad (461)$$

$\Sigma_{(3,2)}$ und $\Sigma_{(\bar{3},2)}$ bilden massive Vektorbosonen mit X - und Y -Bosonen (vergleiche mit supersymmetrischem Standardmodell (415), (416)) mit den Massen

$$m_V = 5\sqrt{2}g_5\sigma, \quad \sigma \equiv \frac{M}{\Lambda}.$$

Elektroschwache Symmetriebrechung:

$$W_H(H, \bar{H}, \Sigma) = \lambda \bar{H}(\mathbf{5}) [\Sigma(\mathbf{24}) + 3\sigma] H(\mathbf{5}). \quad (462)$$

Dann ist die Masse des Farb-Tripletts H_c/\overline{H}_c gegeben durch

$$m_T = 5\lambda\sigma. \quad (463)$$

λ und σ sind freie Parameter. In diesem minimalen Modell können wir die Masse m_T einschränken. Die Renormierungsgruppengleichung auf Einschleifenniveau liefert:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1}(M_Z) &= \alpha_u^{-1}(\Lambda) + \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{2}{3}n - \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{M_S}{M_Z} \right) + \left(2n + \frac{3}{5} \right) \log \left(\frac{\Lambda}{M_Z} \right) \right. \\ &\quad \left. - 10 \log \left(\frac{\Lambda}{M_V} \right) + \frac{2}{5} \log \left(\frac{\Lambda}{m_T} \right) \right], \\ \alpha_2^{-1}(M_Z) &= \alpha_u^{-1}(\Lambda) + \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{2}{3}n - \frac{13}{2} \right) \log \left(\frac{M_S}{M_Z} \right) + (2n - 5) \log \left(\frac{\Lambda}{M_Z} \right) \right. \\ &\quad \left. - 6 \log \left(\frac{\Lambda}{M_V} \right) + 2 \log \left(\frac{\Lambda}{m_8} \right) \right], \\ \alpha_3^{-1}(M_Z) &= \alpha_u^{-1}(\Lambda) + \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{2}{3}n - 2 \right) \log \left(\frac{M_S}{M_Z} \right) + (2n - 9) \log \left(\frac{\Lambda}{M_Z} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \log \left(\frac{\Lambda}{M_V} \right) + 3 \log \left(\frac{\Lambda}{m_8} \right) + \log \left(\frac{\Lambda}{m_T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

M_S ist die Massenskala des SUSY-brechenden Terms. Linearkombination liefert:

$$\begin{aligned} (-\alpha_1^{-1} + 3\alpha_2^{-1} + 2\alpha_3^{-1})(M_Z) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -2 \log \left(\frac{M_S}{M_Z} \right) + \frac{12}{5} \log \left[\frac{m_T}{M_Z} \left(\frac{m_3}{m_8} \right)^{\frac{5}{2}} \right] \right\}, \\ (5\alpha_1^{-1} - 3\alpha_2^{-1} - 2\alpha_3^{-1})(M_Z) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 8 \log \left(\frac{M_S}{M_Z} \right) + 12 \log \left(\frac{M_V^2}{M_Z^3} \sqrt{m_3 m_8} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (465)$$

Mit $m_3 = m_8$ und $M_V^2 \sqrt{m_3 m_8} \equiv M_{\text{GUT}}^2$ erhalten wir die Schranken

$$\begin{aligned} 1,7 \cdot 10^{16} \text{ GeV} &\leq M_{\text{GUT}} \leq 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}, \\ 3,5 \cdot 10^{14} \text{ GeV} &\leq m_T \leq 3,6 \cdot 10^{15} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (466)$$

Bemerkungen: Korrekturen zu $W(\Sigma)$ in (459) der Form

$$W^{(\dim 5)}(\Sigma) = \frac{1}{M_{\text{pl}}} [b(\text{Sp}(\Sigma^2))^2 + c\text{Sp}(\Sigma^4)],$$

können diese Schranken abändern. Insbesondere erhält man für kleine λ die Beziehung $m_3 = 4m_8$. Das Problem der Dublett-Triplett-Aufspaltung bleibt bestehen, jedoch ist sie stabil bezüglich Korrekturen. Alternativ kann man zu größeren Darstellungen übergehen: $\mathbf{50}_H + \overline{\mathbf{50}}_H + \mathbf{75}_H$.

- $\mathbf{75}_H$ enthält das SM-Singulett und bricht die SU(5) zu G_{SM} .
- 50-dimensionale Darstellungen enthalten nur Farbtupletts, aber keine schwachen Dubletts (missing doublet mechanism).

Die Terme $\mathbf{50}_H \mathbf{75}_H \overline{H} + \mathbf{50}_H \mathbf{75}_H \mathbf{5}$ machen die Farbtupletts schwer, wobei die schwachen Dubletts masselos bleiben.

3.1 Protonzerfall

Aus (403)

$$S = \text{Sp} \int d^4x \int d^4\theta (\Phi^i)^\dagger \exp(2V) \Phi^i,$$

erhalten wir die Kopplungen (348), (349):

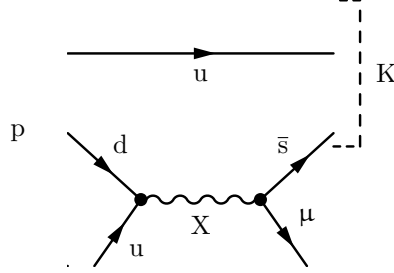
$$\mathcal{L} = -i \frac{g_5}{\sqrt{2}} V_{\alpha\mu} [\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \overline{Q}_{\beta,i} \gamma^\mu u_{\gamma,i}^c + \overline{E}^c_{\alpha,i} \gamma^\mu Q_{\alpha,i} - \overline{D}^c_{\alpha,k} \gamma^\mu L_k] + \text{h.c.}, \quad V = (X, Y).$$

Ausintegration der schweren Eichbosonen führt auf effektive Dimension-6-Operatoren

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\frac{g_5}{2M_V^2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{U}^c_{\alpha,i}\gamma^\mu Q_{\beta,i}\left[E^c_j\gamma_\mu Q_{\gamma,j}-\bar{D}^c_{j,k}\gamma_\mu L_k\right]+\text{h.c.} = \\ &= -\frac{g_5}{M_V^2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[E^c_j\bar{U}^c_{\alpha,i}Q_{\beta,i}Q_{\gamma,j}-\bar{D}^c_{\alpha,k}\bar{U}^c_{\beta,i}Q_{j,i}L_k\right]+\text{h.c.}\end{aligned}\quad (467)$$

Links-Rechts-Operatoren (LR)

Der dominante Zerfallskanal ist $p \rightarrow \pi^0 e^+$ ($\pi^+\bar{\nu}, K^0 \mu^+$) (wenn man keine „spezielle“ Flavormischung annimmt).



Die Lebenszeit ist gegeben durch

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim 10^{35} \left(\frac{M_V}{10^{16} \text{ GeV}}\right)^4 \text{ Jahre.}$$

3.2 Yukawa-Kopplungen

$$\begin{aligned}W_Y &= Y_1^{ij}\chi_i\chi_j H + Y_2^{ij}\chi_i\psi_j\bar{H} = \\ &= Y_u^{ij}Q_i U_j^c H_u + \frac{1}{2}Y_{qq}^{ij}Q_i Q_j H_c + Y_{ue}^{ij}U_i^c E_j^c H_c + Y_d^{ij}Q_i D_j^c H_d \\ &\quad + Y_e^{ji}E_i^c L_j H_d + Y_{ql}^{ij}Q_i L_j \bar{H}_c + Y_{ud}^{ij}U_i^c D_j^c \bar{H}_c,\end{aligned}\quad (468)$$

mit

$$Y_1 = Y_u = Y_{gg} = Y_{ue}, \quad Y_2 = Y_d = Y_e = Y_{ql} = Y_{ud},$$

bei M_{GUT} .

- a.) $m_b = m_\tau$ ist näherungsweise erfüllt (speziell für kleinen und großen $\tan\beta$). Für die leichten Generationen findet man jedoch

$$m_\mu \simeq 3m_s, \quad m_e = \frac{1}{3}m_d,$$

(Georgi und Jarlskog). Infolgedessen sind Korrekturen notwendig:

- i.) zusätzliches Higgsfeld $\Phi(45)$ mit $\Phi_{np}^m = -\Phi_{pn}^m$.

$$\langle \Phi_{n5}^m \rangle = u(\delta_n^m - 4\delta_4^m \delta_n^4),$$

woraus ein relativer Faktor (-3) zwischen den Beiträgen für down-Quarks und geladene Leptonen folgt.

$$W_Y^{(45)} = Y'_1 \chi^{ab} \chi^{cf} \Phi_f^{de} + Y'_2 \chi^{ab} \psi_c \Phi_{ab}^c. \quad (469)$$

- ii.) nicht renormierbare Operatoren

$$\begin{aligned}W_Y^{(\text{dim } 5)} &= \frac{1}{4}\varepsilon_{abcde}\left(f_i\chi^{ab}\chi^{cd}\frac{\Sigma_f^c}{M_{\text{pl}}}H^f + f_2\lambda^{ab}\chi^{cf}H^d\frac{\Sigma_f^e}{M_{\text{pl}}}\right) \\ &\quad + \sqrt{2}\left(h_1\bar{H}_a\frac{\Sigma_b^a}{M_{\text{pl}}}\lambda^{bc}\psi_c + h_2\bar{H}_a\chi^{ab}\frac{\Sigma_b^c}{M_{\text{pl}}}\psi_c\right).\end{aligned}\quad (470)$$

Ein Vergleich mit (468) und (469) zeigt, dass (ΣH) ein effektives **5**-Feld mit f_1 und ein effektives **45**-Feld mit f_2 ist (und analog für h_i).

$$Y_u = Y_1 + \frac{\sigma}{M_{\text{pl}}} \left(3f_1^s + \frac{3}{4}f_2^s + \frac{5}{4}f_2^A \right),$$

$$Y_d = Y_2 + \frac{\sigma}{M_{\text{pl}}} (-3h_1 + 2h_2), \quad Y_c^T = Y_2 + \frac{\sigma}{M_{\text{pl}}} (-3h_1 - 3h_2), \quad (471)$$

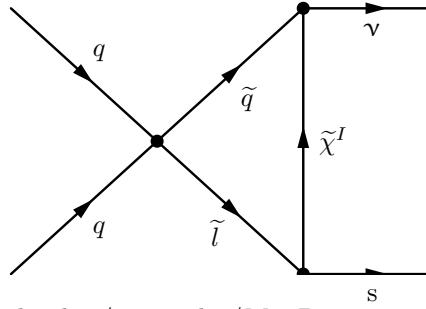
wo die Indizes S bzw. A für den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil stehen. Das bedeutet

$$Y_d = Y_e^T + 5 \frac{\sigma}{M_{\text{pl}}} h_2. \quad (472)$$

b.) Wir integrieren die Farbtripletts aus und erhalten die effektiven **Dimension-5-Operatoren**

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{m_T} \left[\frac{1}{2} Y_{qq}^{ij} Y_{ql}^{km} (Q_i Q_j) (Q_k L_m) + Y_{ue}^{ij} Y_{ud}^{km} U_i^c E_j^c U_k^c D_m^c \right]. \quad (473)$$

- Diese Operatoren treten auch in nicht-supersymmetrischen GUTs auf, wobei es sich aber dann um **Operatoren der Dimension 6** handelt (Weinberg, Wilczek, Zee (1979)).
- Der dominante Zerfallskanal ist (bosonischer Operator, aber Farb-Antisymmetrie, flavour-diagonale Operatoren sind dominant!) $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$.



Dieser Prozess ist unterdrückt durch $1/m_T$ und $1/M_S$. Dominante Beiträge kommen von Skalaren der dritten Generation in der Schleife. Die Lebenszeit lässt sich wie folgt naiv abschätzen:

$$\tau(p \rightarrow K^+ \bar{\nu}) \sim 10^{30} \text{ Jahre.}$$

Das Ergebnis ist unterhalb der experimentellen Schranke.