Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.6

Aufgabe 1: Virialsatz

Bemerkung: In der Quantenmechanik bezieht sich Begriff „stationärer Zustand“ nicht notwendigerweise auf einen zeitunabhängigen Zustand. Wichtig ist dahingegen, dass der Zustand die *stationäre Schrödingergleichung* $\widehat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ löst. Für einen Zustand

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right) , \tag{1}$$

folgt aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung sofort $\widehat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle$, also löst $|\phi\rangle$ die stationäre Schrödingergleichung. Jedoch ist auch $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung dieser Gleichung, da die Zeitabhängigkeit ja nichts anderes als ein Phasenfaktor ist:

$$\widehat{H}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle \,. \tag{2}$$

Wir setzen im Folgenden $|\psi(t)\rangle \equiv |\psi\rangle$ und wenden also an, dass $|\psi\rangle$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\widehat{H}|\psi\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \,, \tag{3}$$

und außerdem ein Eigenzustand des Hamiltonoperators

$$\widehat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \,, \tag{4}$$

ist. Nutzen wir außerdem die Hermitizität $H = H^\dagger$ des Hamiltonoperators aus, so gilt für die adjungierte Schrödingergleichung:

$$\langle\psi|\widehat{H} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi| \,. \tag{5}$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_X|\psi\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right)|\widehat{X}\widehat{P}_x|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_x\left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right) = \\ &= -\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{H}\widehat{X}\widehat{P}_x|\psi\rangle + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_x\widehat{H}|\psi\rangle = -\frac{E}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_x|\psi\rangle + \frac{E}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_x|\psi\rangle = \boxed{0\,.}\end{aligned} \tag{6}$$

Der Erwartungswert der partiellen Ableitung von $\widehat{X}\widehat{P}_x$ verschwindet, weil der Operator nicht explizit von der Zeit abhängt. Eine andere Möglichkeit ist, direkt Gl. (1) zu verwenden:

$$\langle\psi(t)|\widehat{X}\widehat{P}|\psi(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et\right)\langle\psi(0)|\widehat{X}\widehat{P}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\widehat{X}\widehat{P}|\psi(0)\rangle \,. \tag{7}$$

Damit ist offensichtlich der Erwartungswert komplett zeitunabhängig und die zeitliche Ableitung verschwindet also.

Ab jetzt ist der Zustand $|\psi\rangle$ nicht mehr notwendigerweise stationär. Wir benötigen nun die totale zeitliche Ableitung des Erwartungswerts eines Operators $\widehat{A}$, deren Ergebnis komplizierter ist als für einen stationären Zustand:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial\langle\psi|}{\partial t}\right)\widehat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{A}\left(\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}\right) + \left\langle\psi\left|\frac{\partial\widehat{A}}{\partial t}\right|\psi\right\rangle = \\ &= -\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{H}\widehat{A}|\psi\rangle + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|\widehat{A}\widehat{H}|\psi\rangle + \left\langle\psi\left|\frac{\partial\widehat{A}}{\partial t}\right|\psi\right\rangle = \\ &= \boxed{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|[\widehat{H},\widehat{A}]|\psi\rangle + \left\langle\psi\left|\frac{\partial\widehat{A}}{\partial t}\right|\psi\right\rangle\,.}\end{aligned} \tag{8}$$

Dies benutzen wir im Folgenden. Für den Kommutator von $\widehat{H}$ mit $\widehat{X}\widehat{P}_x$ gilt:

$$
\begin{aligned}
[\widehat{H},\widehat{X}\widehat{P}_x] &= \widehat{X}[\widehat{H},\widehat{P}_x]+[\widehat{H},\widehat{X}]\widehat{P}_x = \widehat{X}\left[\frac{\widehat{P}_x^2}{2m}+V(\widehat{X}),\widehat{P}_x\right]+\left[\frac{\widehat{P}_x^2}{2m}+V(\widehat{X}),\widehat{X}\right]\widehat{P}_x = \\
&= \widehat{X}[V(\widehat{X}),\widehat{P}_x]+\left[\frac{\widehat{P}_x^2}{2m},\widehat{X}\right]\widehat{P}_x = -\widehat{X}[\widehat{P}_x,V(\widehat{X})]+\frac{1}{2m}\left\{\widehat{P}_x[\widehat{P}_x,\widehat{X}]\widehat{P}_x+[\widehat{P}_x,\widehat{X}]\widehat{P}_x^2\right\} = \\
&= -\widehat{X}[\widehat{P}_x,V(\widehat{X})]+\frac{\hbar}{\mathrm{i}m}\widehat{P}_x^2\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Für die totale Zeitableitung gilt somit:

$$
0=\frac{\mathrm{d}\langle\psi|\widehat{X}\widehat{P}_x|\psi\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|[\widehat{H},\widehat{X}\widehat{P}_x]|\psi\rangle+\underbrace{\left\langle\psi\left|\frac{\partial(\widehat{X}\widehat{P}_x)}{\partial t}\right|\psi\right\rangle}_{=0}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|\widehat{X}[\widehat{P}_x,V(\widehat{X})]|\psi\rangle+\left\langle\psi\left|\frac{\widehat{P}_x^2}{m}\right|\psi\right\rangle\,. \tag{10}
$$

$$
\boxed{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|\widehat{X}[\widehat{P}_x,V(\widehat{X})]\psi\rangle=2\left\langle\psi\left|\frac{\widehat{P}_x^2}{2m}\right|\psi\right\rangle\,.} \tag{11}
$$

Für $V(\widehat{X})=\lambda\widehat{X}^n$ gilt

$$
[\widehat{P}_x,V(\widehat{X})]=\lambda[\widehat{P}_x,\widehat{X}^n]=\lambda\left[\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x},x^n\right]=\lambda\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}(x^n)+x^n\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}-x^n\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)=\lambda\frac{\hbar}{\mathrm{i}}nx^{n-1}\,, \tag{12}
$$

und speziell für $n=2$ folgt damit:

$$
\boxed{\lambda\langle\psi|\widehat{X}^2|\psi\rangle=\left\langle\psi\left|\frac{\widehat{P}_x^2}{2m}\right|\psi\right\rangle\,.} \tag{13}
$$

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator I

Bemerkung: Die Aufgabe dient dazu, das Rechnen mit der abstrakten Notation für die Eigenzustände des harmonischen Oszillators zu üben. Sie soll zeigen, dass man ohne die Hermite-Polynome auskommt!

a.)

Wir drücken die Operatoren $\widehat{X}$ und $\widehat{P}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren

$$
\widehat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\widehat{X}-\mathrm{i}\widehat{P})\,,\quad \widehat{a}=\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\widehat{X}+\mathrm{i}\widehat{P})\,, \tag{14}
$$

aus:

$$
\widehat{X}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger)\,,\quad \widehat{P}=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger)\,. \tag{15}
$$

Damit können wir die Matrixelemente unter Ausnutzung von

$$
\widehat{a}|\Phi_n\rangle=\sqrt{n}|\Phi_{n-1}\rangle\,,\quad \widehat{a}^\dagger|\Phi_n\rangle=\sqrt{n+1}|\Phi_{n+1}\rangle\,, \tag{16}
$$

berechnen:

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi_m|\widehat{X}|\Phi_n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\Phi_m|\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger|\Phi_n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n}\langle\Phi_m|\Phi_{n-1}\rangle+\sqrt{n+1}\langle\Phi_m|\Phi_{n+1}\rangle\right\} = \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n}\delta_{m,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right\}\,,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi_m|\widehat{P}|\Phi_n\rangle &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle\Phi_m|\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger|\Phi_n\rangle=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left\{\sqrt{n}\langle\Phi_m|\Phi_{n-1}\rangle-\sqrt{n+1}\langle\Phi_m|\Phi_{n+1}\rangle\right\} = \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left\{\sqrt{n}\delta_{m,n-1}-\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right\}\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

b.)

Wir berechnen zunächst die Matrixelemente der Operatoren $\widehat{X}^2$ und $\widehat{P}^2$. Hierbei wird $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$ und der Anzahloperator $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ mit $\widehat{N}|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$ verwendet.

$$\begin{aligned}\langle \Phi_m|\widehat{X}|\Phi_n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle \Phi_m|(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger)^2|\Phi_n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle \Phi_m|\widehat{a}^2 + (\widehat{a}^\dagger)^2 + \widehat{a}\widehat{a}^\dagger + \widehat{a}^\dagger\widehat{a}|\Phi_n\rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + (2n+1)\delta_{m,n}\right\} \,, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_m|\widehat{P}^2|\Phi_n\rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle \Phi_m|(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger)^2|\Phi_n\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle \Phi_m|\widehat{a}^2 + (\widehat{a}^\dagger)^2 - \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}^\dagger\widehat{a}|\Phi_n\rangle = \\ &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left\{\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - (2n+1)\delta_{m,n}\right\} \,. \end{aligned} \tag{20}$$

Mit

$$\langle \Phi_n|\widehat{X}|\Phi_n\rangle = 0\,, \quad \langle \Phi_n|\widehat{P}|\Phi_n\rangle = 0\,, \quad \langle \Phi_n|\widehat{X}^2|\Phi_n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)\,, \quad \langle \Phi_n|\widehat{P}^2|\Phi_n\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)\,, \tag{21}$$

können wir die Schwankungsquadrate berechnen:

$$(\Delta x)^2 = \langle \Phi_n|\widehat{X}^2|\Phi_n\rangle - (\langle \Phi_n|\widehat{X}|\Phi_n\rangle)^2 = \boxed{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)\,,} \tag{22}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \Phi_n|\widehat{P}^2|\Phi_n\rangle - (\langle \Phi_n|\widehat{P}|\Phi_n\rangle)^2 = \boxed{\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)\,.} \tag{23}$$

Es gilt außerdem

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\,, \tag{24}$$

im Einklang mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

c.)

$$\langle \Phi_n|V(\widehat{X})|\Phi_n\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\langle \Phi_n|\widehat{X}^2|\Phi_n\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)\,, \tag{25}$$

$$\left\langle \Phi_n \left| \frac{\widehat{P}^2}{2m} \right| \Phi_n \right\rangle = \frac{1}{2m}\langle \Phi_n|\widehat{P}^2|\Phi_n\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1) = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)\,. \tag{26}$$

Dies ist im Einklang mit dem Viralsatz für ein Potential der Form $V(\widehat{X}) = \lambda\widehat{X}^2$ mit $\lambda = m\omega^2/2$, also Gl. (13).

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator II

i.)

Die Wellenfunktion $|\Psi(t=0)\rangle$ lässt sich als Superposition von stationären Eigenzuständen der Energie $|\Phi_n\rangle$ schreiben:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|\Phi_n\rangle\,, \tag{27}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten c_n im Allgemeinen komplex sind. Die Zeitentwicklung dieses Zustandes ist gegeben durch

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right)|\Phi_n\rangle \equiv \sum_n c_n(t)|\Phi_n\rangle\,. \tag{28}$$

Die Zeitabhängigkeit steckt also in den Entwicklungskoeffizienten. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Eigenzustand $|\Phi_m\rangle$ (mit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) befindet, ist:

$$\boxed{P_m = |c_m|^2 = |\langle \Phi_m | \Psi(t) \rangle|^2 \,.} \tag{29}$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt den Wert Eins. Dies folgt aus der Normierung des Zustands $|\Psi(t)\rangle$:

$$1 = \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^*(t) c_n(t) \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \Phi_n | \Psi(t) \rangle|^2 = 1 \,. \tag{30}$$

Im Falle des harmonischen Oszillators sind die Energien

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \,. \tag{31}$$

Damit kann man die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand mit $E > 2\hbar\omega$ befindet, wie folgt berechnen:

$$P_{E>2\hbar\omega} = 1 - P_{E<2\hbar\omega} \,. \tag{32}$$

Für $E < 2\hbar\omega$ kann sich der harmonische Oszillator nur in den Zuständen $|\Phi_0\rangle$ mit $E_0 = \hbar\omega/2$ oder $|\Phi_1\rangle$ mit $E_1 = 3\hbar\omega/2$ befinden. Damit gilt:

$$P_{E>2\hbar\omega} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - |\langle \Psi_0 | \Psi(t) \rangle|^2 - |\langle \Psi_1 | \Psi(t) \rangle|^2 = \boxed{1 - |c_0|^2 - |c_1|^2 \,.} \tag{33}$$

Die Bedingung $P_{E>2\hbar\omega} = 0$ führt auf die Gleichung

$$\boxed{|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \,.} \tag{34}$$

ii.)

Verschwinden alle Entwicklungskoeffienten c_n für $n \geq 2$, so gilt:

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \,, \tag{35}$$

und für den Erwartungswert des Hamiltonoperators

$$\begin{aligned} \langle \widehat{H} \rangle = \langle \Psi(t) | \widehat{H} | \Psi(t) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^*(t) c_n(t) \langle \Phi_m | \widehat{H} | \Phi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |c_n|^2 = E_0 |c_0|^2 + E_1 |c_1|^2 = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} |c_0|^2 + \frac{3\hbar\omega}{2} |c_1|^2 \overset{!}{=} \hbar\omega \,. \end{aligned} \tag{36}$$

Somit kommen wir auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c_0|^2 \\ |c_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,, \tag{37}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} |c_0|^2 \\ |c_1|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

bzw.

$$\boxed{|c_0|^2 = \frac{1}{2} \,, \quad |c_1|^2 = \frac{1}{2} \,.} \tag{39}$$

c.)

Wir berechnen den Erwartungswert des Ortsoperators:

$$\begin{aligned}\langle\Psi(0)|\widehat{x}|\Psi(0)\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{m,n}c_m^*c_n\langle\Phi_m|\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}|\Phi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{m,n}c_m^*c_n\left\{\langle\Phi_m|\widehat{a}^\dagger|\Phi_n\rangle+\langle\Phi_m|\widehat{a}|\Phi_n\rangle\right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{m,n}c_m^*c_n\left\{\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{n}\left\{c_{n+1}^*c_n\sqrt{n+1}+c_{n-1}^*c_n\sqrt{n}\right\}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Da alle c_n für $n \geq 2$ verschwinden, gilt:

$$\langle\Psi(0)|\widehat{x}|\Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(c_1^*c_0+c_0^*c_1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,, \tag{41}$$

woraus

$$c_1^*c_0+c_0^*c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \tag{42}$$

folgt. Laut Aufgabenstellung gilt $c_0 > 0$; also ist c_0 reell und damit $c_0 = c_0^*$. Damit muss $c_1^* + c_1 = 1$ bzw. $2\mathrm{Re}(c_1) = 1$ sein, woraus $\mathrm{Re}(c_1) = 1/2$ folgt. Aus der Darstellung

$$c_1 = |c_1|\exp(\mathrm{i}\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\,, \tag{43}$$

folgt dann zusätzlich:

$$\mathrm{Re}(c_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta_1 \overset{!}{=} \frac{1}{2}\,, \tag{44}$$

bzw.

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \boxed{\theta_1 = \pm\frac{\pi}{4}\,.} \tag{45}$$

d.)

Die Zeitentwicklung des Zustands $|\Psi(0)\rangle$ ist gegeben durch:

$$|\Psi(t)\rangle = c_0(t)|\Phi_0\rangle + c_1(t)|\Phi_1\rangle = c_0\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_0t\right)|\Phi_0\rangle + c_1\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_1t\right)|\Phi_1\rangle\,. \tag{46}$$

Die Eigenzustände $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ selbst bleiben also zeitunabhängig. Die Zeitabhängigkeit fließt über die zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten $c_i(t)$ ein. Es gilt somit

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-2\mathrm{i}\omega t)|\Phi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{3}{2}\omega t\right)|\Phi_1\rangle\,, \tag{47}$$

und wir können den zeitabhängigen Winkel ablesen:

$$\boxed{\theta_1(t) = \pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{3}{2}\omega t\,.} \tag{48}$$

Für die Zeitentwicklung des Ortserwartungswertes gilt:

$$\begin{aligned}\langle\Psi(t)|\widehat{x}|\Psi(t)\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{2}\left\{\langle\Phi_0|\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}|\Phi_0\rangle + \exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\omega t\right)\langle\Phi_0|\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}|\Phi_1\rangle\right. \\ &\qquad \left.+\exp\left(\mp\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\omega t\right)\langle\Phi_1|\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}|\Phi_0\rangle+\langle\Phi_1|\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}|\Phi_1\rangle\right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{2}\left\{\exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\omega t\right)\underbrace{\langle\Phi_0|\widehat{a}|\Phi_1\rangle}_{=1}+\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\omega t\right)\underbrace{\langle\Phi_1|\widehat{a}^\dagger|\Phi_0\rangle}_{=1}\right\} = \\ &= \boxed{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}-\omega t\right)\,.}\end{aligned} \tag{49}$$

Für den Erwartungswert des Impulses gilt entsprechend (nicht verlangt):

$$\langle\Psi(t)|\widehat{p}|\Psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\langle\Phi_0|\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}|\Phi_0\rangle + \exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\omega t\right)\langle\Phi_0|\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}|\Phi_1\rangle \right.$$

$$\left. + \exp\left(\mp\mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\omega t\right)\langle\Phi_1|\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}|\Phi_0\rangle + \langle\Phi_1|\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}|\Phi_1\rangle\right\} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin\left(\pm\frac{\pi}{4} - \omega t\right)\,.} \tag{50}$$