

MITSCHRIFT ZUR VORLESUNG: ASTROPHYSIK HOCHENERGETISCHER TEILCHEN

Dr. Engel

Vorlesung Sommersemester 2010

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 23. Mai 2010

Mitschrieb der Vorlesung ASTROPHYSIK HOCHENERGETISCHER TEILCHEN
von Herrn Dr. ENGEL im Sommersemester 2010
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Verifikation durch Multimessenger-Daten	5
1.2	Fluss und Teilchendichte	6
1.3	Wirkungsquerschnitt und Reaktionsrate	6
1.4	Durchlaufene Materiesäule und optische Dicke	7
1.5	Relativistischer Impuls	7
1.5.1	Relativistisch-invariante Größen	8
1.6	Astrophysikalische Schockfronten	8
1.6.1	Nicht-relativistischer Grenzfall	9
1.6.2	Energiespektrum der beschleunigten Teilchen	9
1.6.3	Betrachtungen zur maximalen Energie	10
1.7	Energieverlust durch Ionisation	10
1.8	Entstehung und Eigenschaften der Bremsstrahlung	10
1.9	Anwendung: erwartetes Photonspektrum	11
1.10	Inverse Compton-Streuung	12
1.11	Synchrotronstrahlung	12
1.12	Hadronische Erzeugung von Gamma-Strahlen	13
1.13	Nachweis von Photonen	14

Kapitel 1

Einführung

Im Folgenden wird $c = 1$ gesetzt. Infolge der Wechselwirkung der kosmischen Strahlung in der Materie und durch das Magnetfeld der Erde:

$$\frac{E}{qZ} \geq 5 \text{ GV} = \frac{5 \text{ GeV}}{1 e}. \quad (1.1)$$

Es ist geschickt, die magnetische Steifigkeit (Rigidität) einzuführen:

$$R = \frac{p}{Zq} \simeq \frac{E}{Zq}, \quad (1.2)$$

für ultra-relativistische Teilchen. Diese Größe ist charakteristisch für die Ablenkung eines Teilchens in einem Magnetfeld. Wenn das Teilchen auf eine Spiralbahn gezwungen wird, deren Radius größer als der Radius der Erde ist, wird das Teilchen die Erde nicht erreichen.

Es gibt also kein Proton mit der Energie $E < 5 \text{ GeV}$, das die Erde erreicht. Dies ist nur an den Polen möglich, wo Teilchen parallel zu den Feldlinien in die Atmosphäre eintreten können. Zur Beschreibung des Flusses der kosmischen Strahlung soll sowohl die Atmosphäre als auch das Erdmagnetfeld nicht berücksichtigt werden; man spricht dann vom lokalen interstellaren Fluss. Dieser genügt einem relativ glatten Potenzgesetz:

$$\frac{dN}{dE d\Omega dA dt} \sim E^{-\gamma}, \quad \gamma \approx \begin{cases} 2,7 & \text{für } 10^{11} \text{ eV} < E < 10^{15,5} \text{ eV} \\ 3,1 & \text{für } 10^{15,5} \text{ eV} < E < 10^{18,5} \text{ eV} \end{cases}. \quad (1.3)$$

1.1 Verifikation durch Multimessenger-Daten

Ein Proton p kann mit einem Photon γ_{CMB} des Mikrowellenhintergrunds wechselwirken, wobei etwa 400 solcher Photonen pro Kubikzentimeter existieren. Die Reaktion, welche ab einer Protonenergie $E_p \geq 7 \cdot 10^{19} \text{ eV}$ auftritt, ist:

$$p + \gamma_{\text{CMB}} \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n\pi^+ / p\pi^0. \quad (1.4)$$

Dies führt zu etwa 20% Energieverlust. Anschließende Zerfälle $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (also in sehr hochenergetische Gamma-Strahlung) bzw. $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$. Damit ist das Verhältnis zwischen Myon- und Elektronen-Neutrinos durch den letzten Zerfall 2 : 1. Man bezeichnet dies als GZK-Effekt nach Greisen, Zatsepin und Kuzmin. Bei der Verallgemeinerung dieses Prozesses ersetzt man γ_{CMB} durch ein Photon γ_{local} eines lokalen Strahlungsfelds (Sternenlicht, Synchrotronstrahlung von beschleunigten Elektronen etc.). Dann stellt sich heraus, dass Wechselwirkungen schon für Protonen einer Energie $E_p \approx 10^{15} \text{ eV}$ stattfinden können. Eine zweite Möglichkeit der Verallgemeinerung ist die Annahme von Prozessen der Form $p + p \rightarrow \pi^0, \pi^\pm$ usw.

Die Luminosität ist die totale abgestrahlte Energie pro Zeit. L sei die instrinsische Luminosität des Lichtquelle, also die tatsächlich abgestrahlte Energie, und F die beobachtete Luminosität. Dann definiert man die Luminositätsentfernung unter der Annahme isotroper Abstrahlung über:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}. \quad (1.5)$$

Hierbei wurde prinzipiell euklidische Geometrie angenommen. Aufgrund der Rotverschiebung ändert sich die Energie eines Photons um einen inversen Faktor $1 + z$. Δt ist der Zeitabstand, mit dem die Photonen an der Quelle emittiert werden; dieser wird um einen Faktor $1 + z$ gestreckt:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + z}, \quad \Delta t' = (1 + z)\Delta t, \quad (1.6)$$

also definiert man die Eigenentfernung

$$F = \frac{L}{(1+z)^2 \cdot 4\pi D^2}. \quad (1.7)$$

Rotverschiebung	Entfernung [Mpc]
0,004	16
0,01	40
0,05	200
0,1	415
1	4750
4	22000

Wir werden im Folgenden in natürlichen Einheiten rechnen: $c = \hbar = 1$. Weiterhin werden die Energie in eV bzw. erg, die Entfernung in eV^{-1} bzw. Zentimeter und Magnetfelder in G (Gauß) angegeben.

1.2 Fluss und Teilchendichte

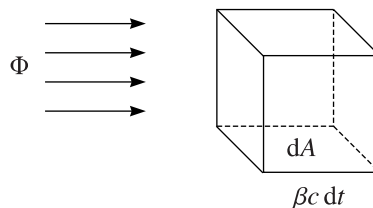
Wir definieren den Fluss in der Astrophysik als

$$\phi = \frac{dN}{dA dt dE d\Omega}, \quad (1.8)$$

bzw. in der Hochenergiephysik durch

$$\Phi = \frac{dN}{dA dt}, \quad (1.9)$$

weil hier die Energie fest ist und es keine Winkeldivergenz gibt.



Mit $dV = \beta c dt dA$, wobei $\beta = v/c$, ergibt sich für eine Richtung:

$$\frac{dN}{dV} = \frac{dN}{\beta c dt dA} = \frac{1}{\beta c} \frac{dN}{dt dA} = \boxed{\frac{1}{\beta c} \Phi}. \quad (1.10)$$

Für einen isotropen Fluss können wir über den Raumwinkel integrieren

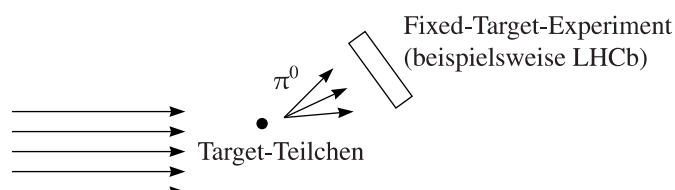
$$\int d\Omega = 4\pi, \quad (1.11)$$

und erhalten für die totale Zahl der Teilchen:

$$\boxed{\frac{dN}{dE dV} = \frac{4\pi}{\beta c} \phi}, \quad (1.12)$$

wobei ϕ der Fluss pro Raumwinkelelement ist.

1.3 Wirkungsquerschnitt und Reaktionsrate



Man definiert den Produktionswirkungsquerschnitt als

$$\sigma_{\text{prod}} = \frac{1}{\Phi} \frac{dN_{\text{prod}}}{dt}, \quad (1.13)$$

wobei die gebräuchliche Einheit 1 barn = 10^{-28} m^2 ist. Der Wirkungsquerschnitt ist somit so etwas wie eine Fläche. Interessiert man sich für die Anzahl der Teilchen, die bei einem Streuprozess produziert werden, so verwendet man

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{prod}}}{dt dV} &= \sigma_{\text{prod}} \cdot \Phi \cdot n_{\text{targ}} = \sigma_{\text{prod}} \cdot \Phi \cdot \frac{\rho}{\langle m \rangle} = \sigma_{\text{prod}} \cdot \beta c \frac{dN}{dV} \cdot \frac{\rho}{\langle m \rangle} = \\ &= \sigma_{\text{prod}} \cdot \beta c n_{\text{proj}} \cdot n_{\text{targ}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

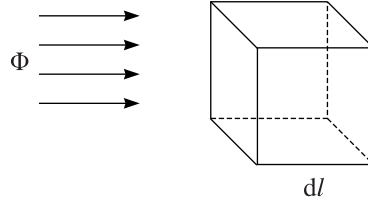
mit der mittleren Targetmasse $\langle m \rangle$ und der Teilchendichten n_{targ} . In einem beliebigen Lorentzsystem gilt mit der Relativgeschwindigkeit zwischen Projektil und Target β_{rel} gilt

$$\boxed{\frac{dN_{\text{prod}}}{dt dV} = \sigma_{\text{prod}} \cdot \beta_{\text{rel}} c \cdot n_{\text{proj}} \cdot n_{\text{targ}}.} \quad (1.15)$$

1.4 Durchlaufene Materiesäule und optische Dicke

Der Absorptionswirkungsquerschnitt ergibt sich aus

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{1}{\Phi} \frac{dN_{\text{int}}}{dt}. \quad (1.16)$$



Durch Absorption ändert sich der Fluss in Abhängigkeit von l :

$$\frac{d\Phi}{dl} = -\sigma_{\text{abs}} \cdot \Phi \cdot \frac{\rho}{\langle m \rangle}, \quad \frac{d\Phi}{dl} = -\frac{\Phi}{l_{\text{int}}}, \quad l_{\text{int}} = \frac{\langle m \rangle}{\sigma_{\text{abs}} \cdot \rho}. \quad (1.17)$$

Da die Dichte eines Sterns oder der Atmosphäre nicht konstant ist, definiert man die durchlaufene Materiesäule (depth) $dX = \rho dl$. Dann kann man nämlich die Dichte eliminieren:

$$\frac{d\Phi}{dX} = -\frac{\Phi}{\lambda_{\text{int}}}, \quad \lambda_{\text{int}} = \frac{\langle m \rangle}{\sigma_{\text{abs}}}. \quad (1.18)$$

Die Säulendichte besitzt die Einheit g/cm^2 und in der Atmosphäre gilt

$$X_v = \int_0^{\infty} \rho(h) dh = 1032 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}. \quad (1.19)$$

Weiterhin definiert man die dimensionslose optische Dicke

$$\boxed{D = \int_{\text{Sichtlinie}} \sigma_{\text{abs}} \Phi dh,} \quad (1.20)$$

welche die Anzahl der Wechselwirkungen entlang der Sichtlinie angibt.

1.5 Relativistischer Impuls

Allgemein gilt folgender Zusammenhang zwischen den Größen zwischen zueinander geboosteten Koordinatensystemen:

$$E' = \gamma E + \gamma \beta p_{\parallel}, \quad p' = \gamma p + \gamma \beta E, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.21)$$

Im Ruhesystem gilt $E = \gamma m$ und $p = \gamma m \beta$. Weiterhin kann man mit Vierervektoren rechnen:

$$p_1 \cdot p_2 = p_{1,\mu} p_2^\mu = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (1.22)$$

Erinnerung:

$$\Delta l' = \frac{\Delta l}{\gamma}, \quad \Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (1.23)$$

1.5.1 Relativistisch-invariante Größen

In der Hochenergiephysik verwendet man oft die Mandelstam-Variablen

$$s = (p_A + p_B)^2, \quad t = (p_A - p_C)^2, \quad u = (p_A - p_D)^2, \quad (1.24)$$

wobei \sqrt{s} die Schwerpunktsenergie angibt. Darüber hinaus definiert man die Phasenraumdichte über die lorentzinvariante Größe

$$\frac{dN_1}{dp_x dp_y dp_z dx dy dz}. \quad (1.25)$$

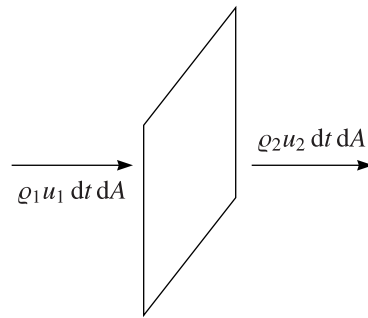
Ebenso ist die Reaktionsrate lorentzinvariant:

$$\frac{dN_{\text{prod}}}{dV dt}. \quad (1.26)$$

Wie weit kann ein Neutron der Energie $E = 10^{19}$ eV fliegen? Für den γ -Faktor gilt dann $\gamma = E/m_n$, wobei $m_n = 0,83$ GeV die Ruhemasse des Neutrons ist. Mittels der Zeitdilatation $\Delta t' = \gamma \Delta t$ und der zurückgelegten Weglänge in der Halbwertszeit im Ruhesystem des Neutrons $\Delta l = c \Delta t_{1/2} \cdot \gamma \approx 3 \cdot 10^{33}$ cm aufgrund des γ -Faktors $\gamma = 10^{10}$ GeV/1 GeV.

1.6 Astrophysikalische Schockfronten

Für diese muss Massen-, Energie und Impulserhaltung gelten.



Damit gilt $\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$. Wir betrachten das Ganze nun in verschiedenen Referenzsystemen:

- A) Der Beobachter befinde sich im Bezugssystem, in dem die Schockfront ruht: $v_s = 0$. Aus der idealen Gastheorie folgt $\varrho_2 = 4\varrho_1$ für monoatomare Gase wie beispielsweise Wasserstoff. Aus $\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$ ergibt sich dann $u_1/u_2 = \varrho_2/\varrho_1 = 4$.
- B) Wir befinden uns in einem System, in dem sich die Schockfront mit der Geschwindigkeit $\bar{v}_s = -u_1$ bewegt. Dann gilt für die Geschwindigkeit der beiden Gase $\bar{u}_1 = 0$ und $\bar{u}_2 = u_2 - u_1 = u_1/4 - u_1 = -3/4 u_1$. Die Schockfront bewegt sich also schneller als das Gas, das man aufammelt.
- C) In einem dritten System, in dem sich die Schockfront mit $\tilde{v}_s = -u_2$ bewegt, gilt $\tilde{u}_2 = 0$ und $\tilde{u}_1 = u_1 - u_2 = u_1 - u_1/4 = 3/4 u_1$. Damit bewegt sich hier die Schockfront auf das aufgesammelte Gas zu.

In System (B) erkennt man am Besten, dass die kinetische Energie eines Gasteilchens zunimmt, sofern dieses in die Schockfront läuft und diese wieder verlässt. Jedes mal, wenn das Teilchen die Schockfront kreuzt, gewinnt es an Energie. Dies ist der Prozess der Schockbeschleunigung.

1.6.1 Nicht-relativistischer Grenzfall

Wir betrachten ein Teilchen, das senkrecht mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 auf eine Wand zufliegt, die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{u}_2 auf die Wand zu bewegt. Die Geschwindigkeit des reflektierten Teilchens sei \mathbf{v}'_1 . Es sei $|v_1| \gg |\bar{u}_2|$, wobei $u_2 < 0$. Der Prozess läuft elastisch ab und es folgt mittels Energie- und Impulserhaltung:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - M)v_1 - 2M\bar{u}_2}{m_1 + M}, \quad \bar{u}'_2 = \frac{(M - m)\bar{u}_2 + 2m_1v_1}{m_1 + M}. \quad (1.27)$$

Das Teilchen besitzt so wenig Energie, dass es die Magnetfeldlinien der Schockfront nicht beeinflusst; man betrachtet das Problem also in der Testteilchen-Näherung. Damit ist die Näherung $M \gg m_1$ sinnvoll und es gilt

$$v'_1 = v_1 - 2\bar{u}_2, \quad |v'_1| = |v_1| + 2|\bar{u}_2|, \quad (1.28)$$

damit gewinnt das Teilchen Geschwindigkeit. Die gewonnene Energie wird dem Gas hinter der Schockfront entzogen. Der Energiegewinn pro Reflexion ist dann:

$$\frac{E'_1 - E_2}{E_1} = \frac{1}{E_1} \left[\frac{m}{2} (v_1 + 2|\bar{u}_2|)^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 \right], \quad (1.29)$$

wobei $v_1 \simeq c$ und $\bar{u}_2 \ll c$. Weiter folgt dann

$$\frac{E'_1 - E_2}{E_1} = \frac{1}{v_1^2} [v_1^2 + 4v_1|\bar{u}_2| + 4|\bar{u}_2|^2 - v_1^2] \simeq \frac{4|\bar{u}_2|}{v_1} \simeq \frac{4|\bar{u}_2|}{c} \equiv \xi. \quad (1.30)$$

Damit ist der Energiegewinn für eine gegebene Schockfront eine Konstante, die wir als ξ bezeichnen wollen. Außerdem gilt dann zusätzlich $\xi = 3\bar{v}_s/c$, wobei \bar{v}_s die Geschwindigkeit der Schockfront ist. Die Mittelung über alle Winkel zur Schockfront führt zu einem insgesamt kleineren Energiegewinn:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{4\bar{v}_s}{3c}}. \quad (1.31)$$

1.6.2 Energiespektrum der beschleunigten Teilchen

Wir wollen nun das Energiespektrum der beschleunigten Teilchen bestimmen. Dazu sei E_0 die anfängliche Energie eines Teilchens. Nach einer Reflexion ist dessen Energie $E_1 = E_0(1 + \xi)$, nach zwei Reflexionen $E_2 = E_1(1 + \xi)$ usw. Der Index der Energie gibt also jetzt die Anzahl der Reflexionen an. Allgemein gilt nach n Reflexionen $E_n = E_0(1 + \xi)^n$. Die Zahl der Teilchen nach dem n -ten Beschleunigungszyklus ist $N_n = N_0(1 - P_{\text{esc}})^n$, wobei P_{esc} die Entweichwahrscheinlichkeit pro Zyklus ist. (Die Annahme, dass P_{esc} eine Konstante ist, hat damit zu tun, dass sich das Teilchen diffusiv bewegt.) Damit gilt

$$\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = n \ln(1 + \xi), \quad \ln\left(\frac{N_n}{N_0}\right) = n \ln(1 - P_{\text{esc}}), \quad (1.32)$$

also

$$\frac{\ln(N_1/N_0)}{\ln(E_n/E_0)} = \frac{\ln(1 - P_{\text{esc}})}{\ln(1 + \xi)}, \quad \boxed{N_n = N_0 \left(\frac{E_n}{E_0}\right)^{\frac{\ln(1 - P_{\text{esc}})}{\ln(1 + \xi)}}}. \quad (1.33)$$

Dies sagt uns, dass die Teilchenzahl nach der n -ten Beschleunigung einem Potenzgesetz genügt. Wie viele Teilchen gibt es mit $E > E_n$?

$$N(E > E_n) = \sum_{m=n}^{\infty} N_m = N_0 \sum_{m=n}^{\infty} (1 - P_{\text{esc}})^m = N_0(1 - P_{\text{esc}})^n \sum_{m=0}^{\infty} (1 - P_{\text{esc}})^m. \quad (1.34)$$

Wegen $P_{\text{esc}} \leq 1$ kann der Grenzwert der geometrischen Reihe

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad x < 1, \quad (1.35)$$

angewendet werden, woraus sich

$$N(E > E_n) = N_0 \frac{(1 - P_{\text{esc}})^n}{P_{\text{esc}}} = \frac{N_n}{P_{\text{esc}}}, \quad (1.36)$$

ergibt. Wegen $\phi(E) = dN/(dA dt d\Omega dE)$ muss der integrierte Fluss wie folgt mit der Teilchenzahl zusammenhängen:

$$\int_{E_n}^{\infty} \phi(E) dE \simeq N(E > E_n). \quad (1.37)$$

Differentiation nach E_n führt auf

$$-\phi(E_n) = \frac{d}{dE_n} N(E > E_n) = \frac{d}{dE_n} (KE_n^{-\Gamma}), \quad \Gamma = \frac{\ln(1 - P_{sc})}{\ln(1 + \xi)}, \quad (1.38)$$

also $-\phi(E_n) = -\Gamma KE_n^{-(\Gamma+1)}$ und mit $\gamma \equiv \Gamma + 1$ das Potenzgesetz

$$\boxed{\phi(E) \simeq \phi_0 E^{-\gamma}}. \quad (1.39)$$

Aus der idealen Gastheorie folgt $\Gamma \simeq 1,1 \dots 1,4$ bzw. $\gamma = 2,1 \dots 2,4$ für monoatomare Gase. Im Grenzfall idealer Bedingungen (perfekt ausgeprägte Schockfront und Diffusion) gilt $\gamma = 2$. γ ist nahezu unabhängig von den Details der Schockfront.

1.6.3 Betrachtungen zur maximalen Energie

Die maximale Energie bei einem Beschleunigungsprozess kann man durch folgende Betrachtung abschätzen. Dazu nehmen wir an, dass ein Teilchen durch Magnetfelder in einem Gebiet eingeschlossen ist, in dem die Beschleunigung stattfindet. Das Teilchen soll sich senkrecht zum Magnetfeld auf einer Kreisbahn mit dem Gyro-/Larmorradius $R = E/(BZ)$ bewegen. Die maximal erreichbare Energie lässt sich dann über $E_{\max} = ZBL$ abschätzen, wobei L die Größe des Gebiets angibt. Berücksichtigt man zusätzlich noch die Bewegung der Schockfront, gilt $E_{\max} = ZBL \cdot (v_s/c)$, wobei v_s/c in der Größenordnung von $1/100$ liegt. Nehmen wir $E_{\max} = 10^{20}$ eV und $Z = 1$ (Protonen) an, so resultiert

$$B = \frac{E_{\max}}{ZL \cdot \frac{v_s}{c}}. \quad (1.40)$$

Die Auftragung von B über L ist eine Potenzfunktion und führt logarithmisch zu einer Geraden.

1.7 Energieverlust durch Ionisation

Aus der Bethe-Bloch-Formel ergibt sich folgendes qualitatives Verhalten für den Energieverlust eines Elektrons/Positrons durch Ionisation eines Atoms:

$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{Z}{\beta^2} \ln\left(\frac{E}{m}\right) \sim \frac{Z}{\beta^2} \ln(\gamma) \begin{cases} 1/\beta^2 & \text{für } v \ll c \\ \ln \gamma & \text{für } v \simeq c \end{cases}. \quad (1.41)$$

Zuzüglich der Bremsstrahlung ergibt sich der totale Energieverlust eines Elektrons zu

$$\frac{dE_e}{dx} = -\alpha(E_e) - \frac{E_e}{X_0}. \quad (1.42)$$

1.8 Entstehung und Eigenschaften der Bremsstrahlung

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bremsstrahlung ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma_{br}}{dE_\gamma} = \frac{\langle m \rangle}{X_0} \frac{1}{E_\gamma}, \quad (1.43)$$

wobei $\langle m \rangle$ die mittlere Masse der Targetteilchen ist. Der Wirkungsquerschnitt also singular für $E_\gamma \mapsto 0$ (Infrarot-Katastrophe). Prinzipiell werden unendlich viele Photonen unterhalb der Nachweisschwelle abgestrahlt. Die insgesamt abgestrahlte Energie ist jedoch endlich!

$$\frac{dE_e}{dX} = -\frac{1}{\langle m \rangle} \int_0^{E_e} \frac{d\sigma_{br}}{dE_\gamma} E_\gamma dE_\gamma = -\frac{E_e}{X_0}. \quad (1.44)$$

X_0 ist die **Strahlungslänge**, die quantentheoretisch berechnet werden kann:

$$X_0 = \frac{\langle m \rangle}{\sigma_{\text{br}}}, \quad \sigma_{\text{br}} = 4\alpha_{\text{em}} r_e^2 Z(Z+1) \frac{\ln(183Z^{-\frac{1}{3}})}{1 + 0,12(Z/82)^2}. \quad (1.45)$$

σ_{br} ist ein „großer“ Wirkungsquerschnitt. Die **kritische Energie** ist durch Gleichheit von Ionisationsverlusten und Strahlungsverlusten definiert, also

$$d(E_{\text{cr}}) = \frac{E_{\text{cr}}}{X_0}, \quad (1.46)$$

was eine nichtlineare Gleichung ist. Typische Zahlenwerte, die man numerisch erhält, sind:

	E_{cr} [MeV]	X_0 [g/cm ²]
Luft	85	37
Wasserstoff	360	60

Eine elektromagnetische Kaskade bildet sich für $E > E_{\text{cr}}$, weil in dem Bereich die Teilchenmultiplikation effektiv verläuft.

1.9 Anwendung: erwartetes Photonspektrum

Wir betrachten eine Molekülwolke, durch die sich relativistische Elektronen bewegen. Der Produktionswirkungsquerschnitt ist definiert über

$$\sigma_{\text{br}} = \frac{1}{\Phi} \frac{dN_\gamma}{dt}, \quad \Phi = \frac{dN_e}{dt dA}, \quad (1.47)$$

für ein Targetteilchen. Für eine Molekülwolke ergibt sich nun:

$$\frac{dN_\gamma}{dt dV} = \Phi_e \sigma_{\text{br}} n_{\text{targ}}, \quad (1.48)$$

mit der Teilchenzahldichte $n_{\text{targ}} = dN_{\text{targ}}/dV$. Differentiell bezüglich des Intervalls $[E_\gamma, E_\gamma + dE_\gamma]$ ergibt sich

$$\frac{dN_\gamma}{dt dV dE_\gamma} = \Phi_e \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma} n_{\text{targ}}. \quad (1.49)$$

Strahlenergie und Divergenz:

$$\Phi = \frac{dN_e}{dt dA} \Rightarrow \phi_e(E_e) = \frac{dN_e}{dE_e dt dA d\Omega}. \quad (1.50)$$

Die Näherung $\mathbf{p}_e \parallel \mathbf{p}_\gamma$ führt auf

$$\frac{dN_\gamma}{dt dV d\Omega dE_\gamma dE_e} = \phi_e(E_e) \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma} n_{\text{targ}}. \quad (1.51)$$

Die Integration über den Raumwinkel und die Elektronenergie führt auf

$$\boxed{\frac{dN_\gamma}{dt dV dE_\gamma} = 4\pi \int_{E_\gamma}^{\infty} \phi_e(E_e) \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma} dE_e n_{\text{targ}}.} \quad (1.52)$$

Mit dem Fluss der Elektronen zu $\phi_e(E_e) = \phi_0 E_e^{-p}$ und

$$\frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma} = \frac{\langle m \rangle}{X_0} \frac{1}{E_\gamma}, \quad (1.53)$$

ergibt sich:

$$\frac{dN_\gamma}{dt dN E_\gamma} = 4\pi \phi_0 \frac{\langle m \rangle}{X_0} \frac{n_{\text{targ}}}{E_\gamma} \int_{E_\gamma}^{\infty} E_e^{-p} dE_e = \frac{K}{E_\gamma} [E_e^{-p+1}]_{E_\gamma}^{\infty} = \boxed{K E_\gamma^{-p}}, \quad (1.54)$$

mit einer Konstanten K . Damit genügt das Energiespektrum der Photonen gerade dem der Elektronen.

1.10 Inverse Compton-Streuung

Hierbei ergibt sich

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{\lambda_C}{hc}(1 - \cos\theta), \quad (1.55)$$

wobei θ der Streuwinkel des Photons im Laborsystem ist. Thomson-Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \approx 665 \text{ mb} = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2. \quad (1.56)$$

Dieser Prozess ist nur relevant für Photonen in einem Plasma und weniger für die Photonerzeugung. Beim inversen Compton-Prozess wird Energie von einem Elektron auf ein niederenergetisches Photon mit $E_\gamma \ll E_e$ übertragen. Hierbei gilt

$$\varepsilon_{\gamma,\max} = 4\varepsilon_0 \frac{\kappa_0}{1 + 4\kappa_0}, \quad \kappa_0 = \varepsilon_0 \omega_0 = \frac{E_e}{m_e c^2} \cdot \frac{E_\gamma}{m_e c^2}. \quad (1.57)$$

Unter der Annahme $\phi_e \sim E^{-p}$ folgt

$$\boxed{\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \sim E_\gamma^{-\left(\frac{p+1}{2}\right)},} \quad (1.58)$$

für den ultra-relativistischen Grenzfall $\kappa_0 \gg 1$.

Die typische Energie, die ein Photon bei der inversen Comptonstreuung erhält, entspricht auch der maximalen Photonenergie, die kinematisch erlaubt ist:

$$E_{\gamma,\max} \simeq \frac{m_e c^2}{4\gamma}, \quad \gamma\gamma = \frac{E_e}{m_e c^2}. \quad (1.59)$$

Das ist auch der Grund, warum die inverse Comptonstreuung ein solcher wichtiger Prozess ist, um hochenergetische Photonen zu erklären.

1.11 Synchrotronstrahlung

Der Prozess ist verwandt mit der Compton-Streuung, nur mit dem Unterschied, dass das einlaufende Elektron sehr niederenergetisch ist. Das abgestrahlte Photon ist polarisiert, wobei die Richtung der Polarisation durch $\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$ gegeben ist.

$$\chi_0 = \frac{B}{B_{\text{cr}}} \varepsilon_0, \quad B_{\text{cr}} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ G}. \quad (1.60)$$

Die Näherungen sind nur gültig für

$$\frac{E_0}{m_e c^2} \cdot \frac{B}{B_{\text{cr}}} \ll 1, \quad (1.61)$$

also $E_e B < 10^7 \text{ TeV} \cdot 1 \text{ G}$. Diese Bedingung ist bei vielen Quellen erfüllt, jedoch nicht bei Neutronensternen! Die spektrale Leistung $E_\gamma dN_\gamma / (dt dE_\gamma)$ weist bei $\nu = 0,29\nu_c$ ein Maximum auf, wobei ν_c die sogenannte kritische Frequenz ist:

$$\nu_c = \frac{3}{4\pi} \gamma^2 \frac{eB_\perp}{m_e c^2}, \quad \gamma = \frac{E_e}{m_e c^2}, \quad (1.62)$$

wobei B_\perp die Komponente des Magnetfeldes senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons ist. Hochenergetische Elektronen sind favorisiert und die Rate $E_\gamma dN_\gamma / dt$ steigt mit der Stärke des Magnetfelds an. Für monoenergetische Elektronen können wir sowohl E_e als auch B bestimmen. Wie unterscheidet sich das Synchrotron-Spektrum für Protonen von dem der Elektronen? Bei Protonen ist die kritische Frequenz gegeben durch

$$\nu_c = \frac{3}{\pi} \gamma^2 \frac{eB_\perp}{m_e c^2} \sim \frac{1}{m_e^3}, \quad \frac{\nu_c^p}{\nu_c^e} = \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^3 \sim (6 \cdot 10^9)^{-1}. \quad (1.63)$$

Somit müssen Protonen eine Energie haben, die um einen Faktor 10^9 größer ist als die für Elektronen, um das gleiche ν_c in der Quelle zu bekommen.

In den Übungen berechnen wir das Spektrum mit der Methode des steilsten Abstiegs:

$$\phi_\gamma \sim E_\gamma^{-\frac{p+1}{2}} \quad E_\gamma \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \sim E_\gamma^{-\frac{p-1}{2}}. \quad (1.64)$$

Wir interessieren uns nun für ein Szenario mit konstantem ν_c , wobei Photonen sowohl von Elektronen als auch Protonen abgestrahlt werden sollen. Dies liefert

$$\frac{\gamma_e^2}{m_e} = \frac{\gamma_p^2}{m_p} \Rightarrow E_p = E_e \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.65)$$

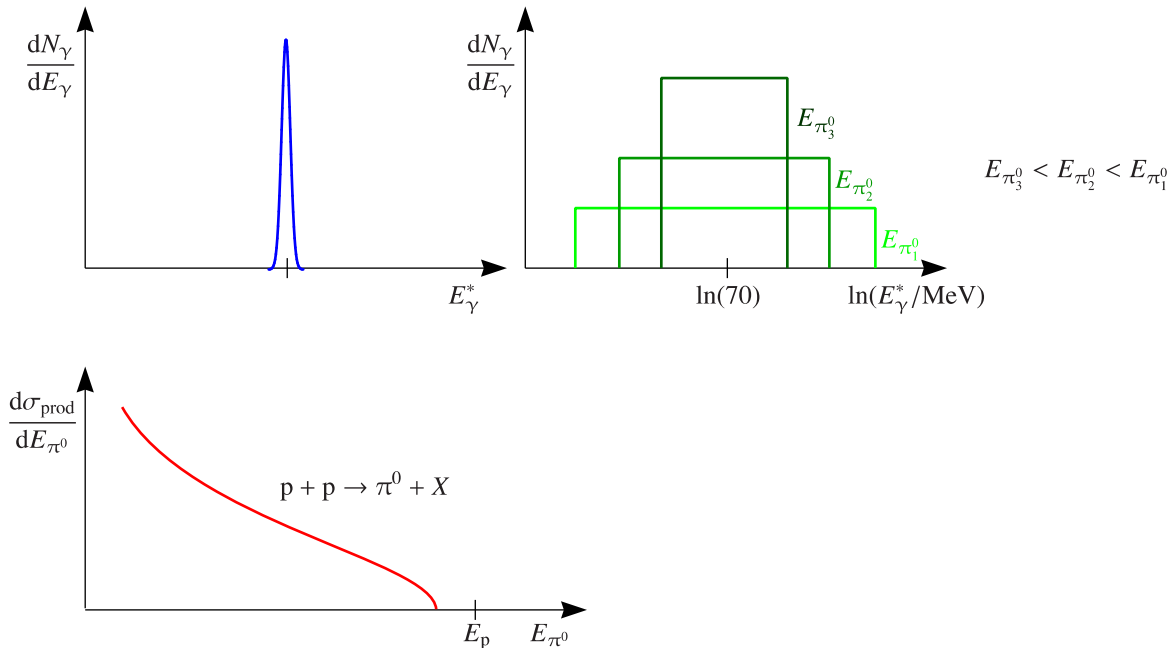
Protonen müssen also sehr viel mehr Energie haben ($\approx 8 \cdot 10^4$), um ein Synchrotronspektrum zu erzeugen, das nicht unterscheidbar von dem der Elektronen ist.

1.12 Hadronische Erzeugung von Gamma-Strahlen

Wichtig sind hier die Prozesse $p + p \mapsto \pi^0 + X$ (wobei X für alle anderen Teilchen steht) und $\pi^0 \mapsto 2\gamma$. Bei diesen Prozessen spielt die starke Wechselwirkung (QCD) eine Rolle.

$$\frac{dN_{\pi^0}}{dt dV dE_{\pi^0}} = 4\pi \int_{E_{\pi^0}}^{\infty} \phi_p(E_p) \frac{d\sigma_{\text{had}}}{dE_{\pi^0}} dE_p n_{\text{targ}}, \quad (1.66)$$

mit dem Erzeugungswirkungsquerschnitt $d\sigma_{\text{prod}}/dE_{\pi^0}$.



dN_γ/dE_γ ergibt sich durch Faltung und ist eine Schar von symmetrischen Glockenkurven. Das Maximum befindet sich immer bei 70 MeV völlig unabhängig vom Protonenspektrum. Betrachten wir den Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ im Schwerpunktsystem des π^0 mit $m_{\pi^0} = 135$ MeV. Dann gilt $E_{\gamma_1}^* = E_{\gamma_2}^* = m_{\pi^0}c^2/2$. Über eine Lorentztransformation kann man in das Laborsystem boosten, indem sich das π^0 bewegt und zwei Photonen unterschiedlicher Energie abgestrahlt werden. Hierbei gilt

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} = \frac{2}{\sqrt{E_\pi^2 - (m_\pi c^2)^2}}, \quad (1.67)$$

was nicht von der Photonenergie abhängt. Führt man eine Lorentztransformation durch, so gewinnt das eine Photon Energie und das andere verliert welche. Dies geschieht auf symmetrische Weise, so dass der Peak auseinandergezogen wird. Es gilt außerdem (siehe Übungen):

$$E_{\gamma,\min} = \frac{1}{2}\gamma m_{\pi^0}(1 - \beta), \quad E_{\gamma,\max} = \frac{1}{2}\gamma m_{\pi^0}(1 + \beta), \quad \gamma = \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0}c^2}, \quad (1.68)$$

und

$$E_{\pi^0, \min} = E_\gamma + \frac{m_{\pi^0}^2 c^4}{4E_\gamma}. \quad (1.69)$$

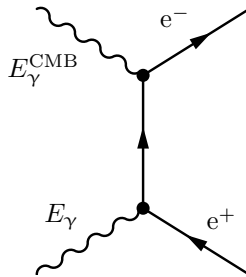
Beobachtet man Photonen sehr hoher Energie, so ergibt sich hieraus, dass diese von einem Pion mit mindestens derselben Energie hervorgegangen sind.

Wir betrachten nun außerdem das Beispiel $p + p \rightarrow \pi^0 + X$ mit $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

$$p + p \rightarrow \pi^\pm + X, \quad \mu^\pm + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^\pm + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu,$$

wobei e^\pm weitere Photonen durch Bremsstrahlung usw. erzeugen können. Der Prozess ist nicht so wichtig, weil die Neutrinos Energie wegtragen. Es handelt sich dann um einen Drei- (oder sogar Vier-)körperzerfall und die resultierenden Kurven sind nicht mehr symmetrisch.

Photonen können mit CMB-Photonen streuen und wieder Elektron-Positron-Paare erzeugen.



Dabei werden Photonen absorbiert und dies geschieht besonders häufig für Photonen im Energiebereich 10^{15} bis 10^{17} eV, weshalb Photonen dieser Energie eine sehr kurze mittlere freie Weglänge weniger kpc haben und deshalb nicht beobachtet werden können. Außerdem werden Photonen absorbiert und über inverse Compton-Streuung und Synchrotronstrahlung auch wieder erzeugt.

1.13 Nachweis von Photonen

Der Nachweis von Photonen auf der Erde ist auch problematisch, da γ -Strahlung in der Atmosphäre absorbiert wird. (Es gibt in der Atmosphäre nur ein kleines Fenster für sichtbares Licht und für Radiowellen.) Diese wird deshalb bevorzugt außerhalb der Atmosphäre durchgeführt (aktuell mit dem Fermi-Satellit (früher GLAST) in der Höhe 550 km). Bei Fermi werden Photonen in Metallschichten (Wolfram) in Elektron-Positron-Paare konvertiert, die sich dann in Silizium-Spurdetektoren nachweisen lassen. Mit diesem Verfahren ergibt sich jedoch keine gute Winkelauflösung für kleine Energien. Die maximale Energie wird bestimmt über die aktive Fläche (Ereignisrate) und über die Energiemessung im CsI-Kalorimeter. Das Energiefenster $30 \text{ MeV} < E_\gamma < 200 \text{ GeV}$ ist mit Fermi gut messbar. Aus der Vermessung solcher hochenergetischer Photonen lassen sich Schranken an die Photonmasse und die Verletzung der Lorentzinvarianz ableiten.

Auf der Erde erfolgt nach Nachweis von Photonen durch indirekte Messungen, beispielsweise über Cherenkov-Teleskope. Jedes Photon, das auf die Atmosphäre trifft, erzeugt eine elektromagnetische Kaskade der Ausdehnung 10 bis 20 km. Bei hochenergetischen Photonen werden sehr viele Elektron-Positron-Paare erzeugt. Diese lassen sich durch die Abstrahlung von Cherenkov-Licht mit dem Öffnungswinkel $\cos \theta_C = 1/(n(\lambda)\beta)$ des Cherenkov-Kegels nachweisen. (Speziell für Luft ist $n_{300 \text{ km}} = 1,00029$ und $n_{400 \text{ km}} = 1,00028$.) Mit kleinen Detektoren lassen sich dabei aufgrund der Ausdehnung des Cherenkov-Kegels schon größere Himmelsabschnitte abdecken. Mit einer Kamera wird das Cherenkov-Licht aufgenommen, was am Besten bei dunklen Nächten und mit empfindlichen Teleskopen funktioniert. Die Photomultiplier müssen mit sehr hoher Zeitauflösung ausgelesen werden, da die Dauer des Signals nur im Bereich von 10^{-9} s liegt. Aus der Bildintensität lassen sich Rückschlüsse auf die Energie des Photons ziehen, aus dem Schnittpunkt (beispielsweise über stereoskopische Aufnahmen durch mehrere Teleskope) die Richtung und aus der Bildform (über die Länge und Breite des aufgezeichneten Bildes, Hillas-Parameter) das Primärteilchen bestimmen. Das Gesichtsfeld, das von einer Kamera abgedeckt wird, ist hierbei 5° . Beispiele für Systeme aus Cherenkov-Teleskopen ist H.E.S.S (MPI Heidelberg), MAGIC (MPI München), Veritas und Cangaroo III.

Eine weitere indirekte Messung ist über Luftschauerfelder möglich, die man auf hohen Bergen errichtet. Die nachgewiesenen Photonen müssen hier jedoch höhere Energie haben. Es kann jedoch ein größerer Himmelsbereich abgedeckt werden.