

MITSCHRIFT ZUR VORLESUNG:
TOPOLOGISCHE ORDNUNG
VON QUANTEN-HALL-ZUSTÄNDEN
ZU MAGNETISCHEN SYSTEMEN

Dr. Greiter

Vorlesung Wintersemester 2009/2010

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 14. Februar 2010

Mitschrieb der Vorlesung TOPOLOGISCHE ORDNUNG: VON QUANTEN-HALL-ZUSTÄNDEN ZU MAGNETISCHEN SYSTEMEN
von Herrn Dr. GREITER im Wintersemester 2009/2010
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

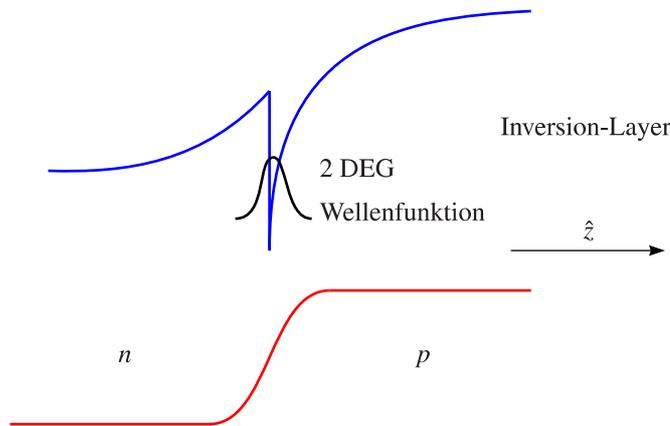
Inhaltsverzeichnis

1	Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt	5
2	Laughlins Eichargument	6
3	Landau-Niveaus	7
4	Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt	9
5	Fraktionale Ladung	9
6	Fraktionale Statistik	10
7	Pfaffian-Zustände	12
	7.1 Vorbemerkungen	12
8	Nicht-abelsche Statistik	15
	8.1 Majorana-Moden in Vortizes in p-Wellen-Superfluid	15
9	Majorana-Fermionen	17
10	Periodische Randbedingungen und topologische Entartungen	20
	10.1 Periodische Randbedingungen	20
	10.2 Einteilchenzustände im niedrigsten Landauniveau	21
	10.3 Der Laughlin- $1/m$ -Zustand	23
11	Topologische Ordnung	24
	11.1 Beispiele für solche Zustände	25
12	Hierarchie der Quanten-Hall-Zustände	25
	12.1 Iteration der Quasiteilchen-Kondensation	26
	12.2 Die Ladung der Quasiteilchen	26
	12.3 Quasiteilchen-Statistik	27
13	Effektive Feldtheorie	27
	13.1 Wiederholung: Chern-Simons-Term	28
	13.2 Effektive Theorie des Laughlin-Fluids	28
	13.3 Hierarchie der Quanten-Hall-Zustände als effektive Feldtheorie	29
	13.4 Statistik der Quasiteilchen	30
	13.5 Allgemeine Formulierung der Hierarchie	30

Quanten-Hall-Effekte

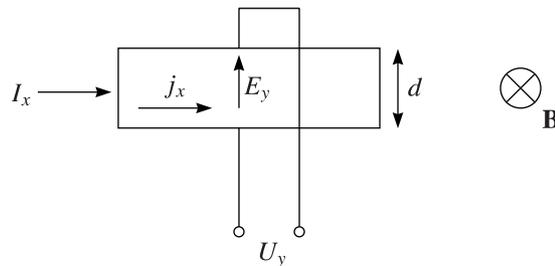
1 Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt

Dieser wurde von Klaus von Klitzing 1980 in Würzburg entdeckt. Wir betrachten ein zweidimensionales Elektronengas in einem Silizium-MOSFET. (Die späteren Experimente wurden an GaAs-Heterostrukturen durchgeführt.)



$$\psi_{3D}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(z_i) \cdot \psi_{2D}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

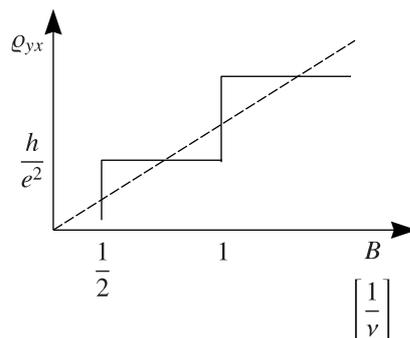
Zur Vereinfachung verwenden wir komplexe Koordinaten $z \equiv x + iy$.



Mit $I_x = d \cdot j_x$ und $E_y = d \cdot E_y$ ergibt sich der Hall-Widerstand

$$\rho_{yx} = \frac{E_y}{j_x} = \frac{U_y}{I_x} \stackrel{\text{klassisch}}{=} R_H B, \quad R_H = \frac{1}{enc}. \quad (2)$$

Beobachtet hat er dabei Plateaus im Hall-Widerstand.



Zur Beschreibung führen wir den Landauniveau-Füllfaktor ein:

$$\nu = \frac{\text{Anzahl der Elektronen im zweidimensionalen Elektronengas}}{\text{Anzahl der Zustände pro Landau-Niveau}}. \quad (3)$$

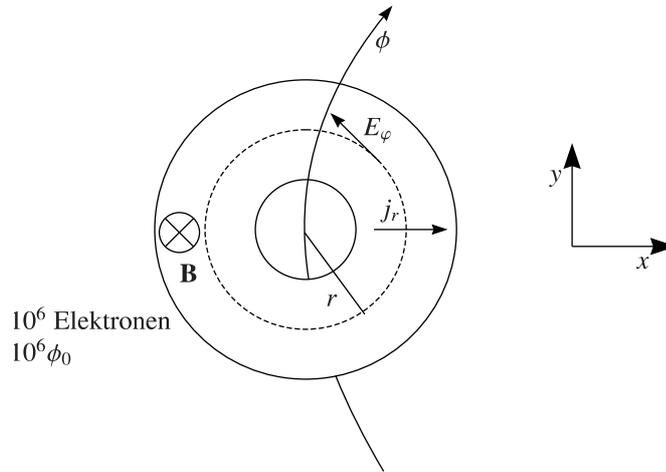
Die Anzahl der Zustände pro Landau-Niveau entspricht dem magnetischen Fluss durch die Probe in Dirac-Quanten

$$\phi_0 = \frac{hc}{e} = 2\pi \frac{\hbar c}{e}. \quad (4)$$

Dabei handelt es sich um den Fluss, der bei einem Elektron eine Phase von 2π erzeugt.

2 Laughlins Eichargument

Betrachte einen Ring mit Quanten-Hall-Fluid:



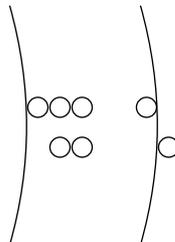
Drehe den magnetischen Fluss im Zentrum so langsam auf, dass keine Übergänge stattfinden (adiabatisch), bis man diesen um ein Dirac-Quantum erhöht hat: $\phi \mapsto \phi + \Delta\phi$. Der Fluss induziert ein elektrisches Feld:

$$\oint \mathbf{E} \, ds = E_y \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (5)$$

Die von innen nach außen transportierte Ladung ist:

$$\Delta Q = \int dt j_x \cdot 2\pi r = \int dt \sigma_{xy} E_y \cdot 2\pi r = -\sigma_{xy} \cdot \frac{\Delta\phi}{c}. \quad (6)$$

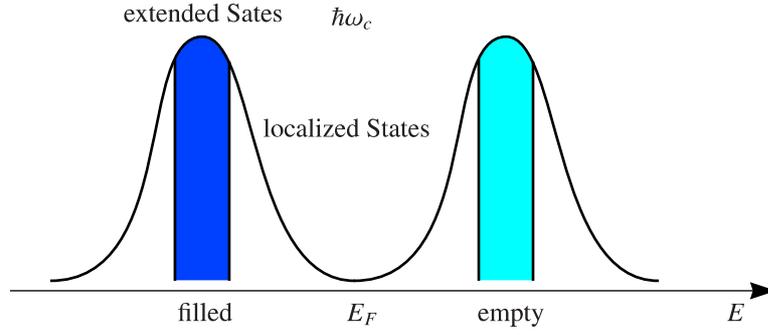
Für $\Delta\phi = \phi_0$ lässt sich das Dirac-Quantum im Zentrum des Ringes wegeichen. Der Hamiltonoperator H und Einteilchen-Eigenzustände $|\psi\rangle$ sind wie am Anfang, nur die Besetzungszahlen haben sich geändert (spektraler Fluss). Hieraus folgt wiederum die transportierte Ladung zu $\Delta Q = \text{ganze Zahl} \times e$.



Dann ergibt sich:

$$\sigma_{xy} = \text{ganze Zahl} \times \frac{ec}{\phi_0} = \text{integer} \times \frac{e^2}{h} \Rightarrow \varrho_{xy} = \frac{1}{\text{integer}} \times \frac{h}{e^2}. \quad (7)$$

Anmerkung: Es gilt $\varrho_{xy} = 1/\sigma_{yx}$, da $\varrho_{xx} = \sigma_{xx} = 0$. Dieses Argument sagt zunächst aus, dass der Hall-Widerstand quantisiert ist.



Woher die Plateaus kommen, kann auf diese Weise jedoch noch nicht erklärt werden. **Bemerkung:** Hier wurde vorausgesetzt, dass Vielteilchenzustände durch Besetzungszahlen von Einteilchenzuständen beschrieben werden können.

3 Landau-Niveaus

Zur Berechnung der Landau-Niveaus führen wir komplexe Koordinaten $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ ein. Entsprechend definieren wir die Ableitung im Komplexen durch

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Für den ersten hermitesch konjugierten Ableitungsoperator gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\dagger = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\dagger + i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\dagger \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right\} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (9)$$

Das folgt durch partielle Integration mit verschwindenden Randtermen oder auch aus der Tatsache, dass der Impulsoperator $p = -i\hbar\partial/\partial x$ hermitesch ist. Definieren wir nun die Impulsoperatoren in der komplexen Ebene durch

$$p := p_x + ip_y = \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) = -2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (10)$$

und

$$\bar{p} = p_x - ip_y = -2i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

Mit diesen Vorbetrachtungen ist es uns möglich, die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = -B\hat{z}$ (z -Richtung) zu untersuchen. Der Hamiltonoperator folgt durch minimale Kopplung und lautet

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right)^2, \quad (12)$$

wobei p_i ein Zweivektor ist. In der sogenannten symmetrischen Eichung können wir das Vektorpotential schreiben als $A_i = 1/2B\varepsilon_{ij}r_j$ oder als Vektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} By \\ -Bx \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Führen wir die magnetische Länge ein gemäß $l^2 = \hbar c/(eB)$ und verwenden $\phi_0 = 2\pi B l^2$, so lässt sich der Hamiltonoperator umschreiben:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left\{ \left(p_x + \frac{\hbar}{2l^2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\hbar}{2l^2} x \right)^2 \right\} = \frac{1}{2m} \left\{ \text{Re}^2 \left(p - \frac{i\hbar}{2l^2} z \right) + \text{Im}^2 \left(p - \frac{i\hbar}{2l^2} z \right) \right\} \stackrel{\hbar=1}{=} \\ &= \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2} \left\{ p - \frac{i}{2l^2} z, \bar{p} + \frac{i}{2l^2} \bar{z} \right\} = \frac{1}{2ml^2} \{a, a^\dagger\} = \frac{eB}{2mc} \{a, a^\dagger\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Es gilt

$$[a, a^\dagger] = \frac{e^2}{2} \left[-2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{i}{2l^2} z, -2i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2l^2} \bar{z} \right] = 1. \quad (15)$$

Das Problem ist äquivalent zum harmonischen Oszillator

$$H = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (16)$$

Elegant:

$$a = \sqrt{2}l \exp\left(-\frac{1}{4l^2}\bar{z}z\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp\left(\frac{1}{4l^2}\bar{z}z\right), \quad a^\dagger = -\sqrt{2}l \exp\left(\frac{1}{4l^2}\bar{z}z\right) \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(-\frac{1}{4l^2}\bar{z}z\right). \quad (17)$$

Um den Drehimpuls mittels Auf- und Absteigeoperatoren zu schreiben, benötigen wir zusätzlich

$$b = \sqrt{2}l \exp\left(-\frac{1}{4l^2}z\bar{z}\right) \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(\frac{1}{4l^2}z\bar{z}\right), \quad b^\dagger = -\sqrt{2}l \exp\left(\frac{1}{4l^2}z\bar{z}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp\left(-\frac{1}{4l^2}z\bar{z}\right). \quad (18)$$

Damit ergibt sich dann

$$L_z = \varepsilon_{ij}r_i p_j = \hbar(b^\dagger b - a^\dagger a), \quad (19)$$

und es gilt weiterhin $[b, b^\dagger] = 1$, $[a, b] = [a, b^\dagger] = 0$. Einteilchenzustände werden charakterisiert durch H und L_z ; sie werden erzeugt, indem die Operatoren a^\dagger und b^\dagger auf den Vakuumzustand wirken:

$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} (a^\dagger)^n (b^\dagger)^m |0\rangle, \quad a|0\rangle = b|0\rangle = 0. \quad (20)$$

Der Vakuumzustand besitzt im Ortsraum die Darstellung

$$\langle \mathbf{r} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right). \quad (21)$$

Er ist rotationssymmetrisch und lokalisiert bei $r = 0$. Weiterhin gilt

$$H|n, m\rangle = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) |n, m\rangle, \quad L_z|n, m\rangle = \hbar(m - n)|n, m\rangle. \quad (22)$$

Die Koordinate z und der Impuls p lassen sich wie folgt mittels der Operatoren $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$ darstellen:

$$z = \sqrt{2}l(a + b^\dagger), \quad p = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}l}(a - b^\dagger). \quad (23)$$

Das niedrigste Landauniveau befindet sich bei $n = 0$:

$$\psi_m(z, \bar{z}) = \langle \mathbf{r} | 0, m \rangle = \frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} = N z^m \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right). \quad (24)$$

$$|\psi_m|^2 = (r^2)^m \exp\left(-\frac{1}{2l^2}r^2\right) N, \quad r^2 = z\bar{z}. \quad (25)$$

Das m -abhängige Maximum folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial r^2} |\psi_m|^2 = \left(\frac{m}{r^2} - \frac{1}{2l^2} \right) |\psi_m|^2 \stackrel{!}{=} 0, \quad (26)$$

und liegt bei $r_m^2 = 2ml^2$, also somit $r_m = \sqrt{2ml}$. Die Anzahl der Zustände pro Fläche beträgt $1/(2\pi l^2)$. Der Fluss durch die Fläche $2\pi l^2$ ist

$$\phi = B \cdot 2\pi l^2 = 2\pi \frac{\hbar c}{e} = \phi_0, \quad (27)$$

mit dem Flussquant ϕ_0 . In einem gefüllten Landauniveau befinden sich N Teilchen.

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = N \mathcal{A} \{z_1^0 \cdot z_2^1 \cdot z_N^{N-1}\} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right) = N \prod_{i<j}^N (z_i - z_j) \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right), \quad (28)$$

mit dem Antisymmetrisierungsoperator \mathcal{A} . Die Zustände im niedrigsten Landauniveau sind

$$\psi(z, \bar{z}) = f(z) \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right), \quad (29)$$

mit einer analytischen Funktion f , da $a\psi = 0$. Allgemeine Vielteilchenzustände lassen sich in der Form

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = f(z_1, \dots, z_N) \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right), \quad (30)$$

schreiben, wobei auch hier die Funktion $f(z_1, \dots, z_N)$ analytisch ist. Bei periodischen Randbedingungen hat f so viele Nullstellen wie Flussquanten durch die Probe gehen.

Zur Erklärung der Breite der Plateaus benötigt man Unordnung und Lokalisierung.

4 Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt

Eichargument:

$$\Delta Q = \frac{e}{3}, \quad \phi \mapsto \phi + \phi_0. \quad (31)$$

Eine numerische Berechnung liefert, dass $\nu = 1/3$ besonders stabil ist, unabhängig von der Form der Wechselwirkung, solange diese nur repulsiv ist. Die allgemeine Wellenfunktion im niedrigsten Landauniveau bei $\nu = 1/3$ lautet ($l = 1$):

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = P(z_1, \dots, z_N) \prod_{i < j} (z_i - z_j) \prod_i \exp\left(-\frac{1}{4}|z_i|^2\right), \quad (32)$$

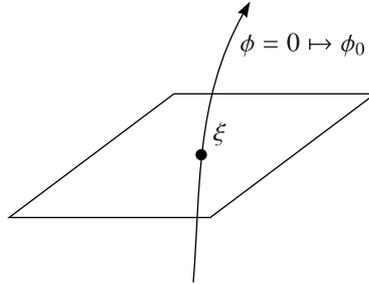
mit einem symmetrischen Polynom $P(z_1, \dots, z_N)$ und einem antisymmetrischen Faktor $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$. Es gibt dreimal so viele Nullstellen wie Teilchen. Somit hat P $2N$ Nullstellen in jedem z_i , also besitzt $P(z_1, \dots, z_N)$ $2N$ Nullstellen in z . Für günstige Energie bei repulsiver Wechselwirkung befinden sich die Nullstellen bei den anderen Teilchen (Laughlin 1983):

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \prod_i \exp\left(-\frac{1}{4}|z_i|^2\right). \quad (33)$$

Numerisch gilt beispielsweise für $N = 6$: $\langle \psi_{\text{Laughlin}} | \psi_{\text{Coulomb}} \rangle = 0,99$ mit der Grundzustandswellenfunktion $|\psi_{\text{Coulomb}}\rangle$. Die Interpretation ist, dass die Nullstellen nicht exakt bei den z_i liegen, sondern nur dort gebunden sind. Langreichweitige Effekte wie Anregungen werden aber durch $|\psi_{\text{Laughlin}}\rangle$ exakt beschrieben (effektive Wellenfunktion).

5 Fraktionale Ladung

ψ_{Laughlin} ermöglicht die Konstruktion von Anregungen. Hieraus ergeben sich die Quantenzahlen. Die erste Anregung – von Laughlin „Quasilo“ („Quasihole“) genannt – unterscheiden sich sehr von den Quasi-Elektronen in Landaus Theorie über Fermi-Flüssigkeiten, weshalb der Name eigentlich ungünstig ist, sich aber dennoch durchgesetzt hat. Wir betrachten eine Probe mit einer Quanten-Hall-Flüssigkeit, durch die ein Fluss von $\phi = 0$ bis $\phi = \phi_0$ adiabatisch eingeschaltet wird:



Dadurch wird ein elektrisches Feld induziert

$$\oint \mathbf{E} \, ds = E_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (34)$$

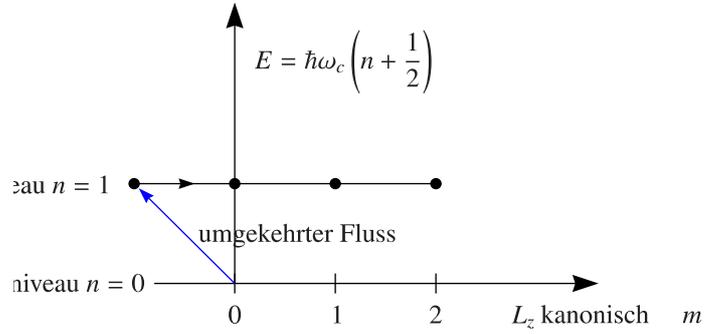
Die Änderung der (kanonischen) Drehimpulskomponente L_z ist gegeben durch

$$\Delta L_z = \int F_\varphi \cdot r \, dt = \frac{e}{2\pi c} \int \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dt = \frac{e}{2\pi c} \cdot \phi_0 = \hbar. \quad (35)$$

Der Drehimpuls ändert sich also um \hbar . Damit gilt für die Wellenfunktion

$$z^m \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right) \mapsto z^{m+1} \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right), \quad (36)$$

und allgemein $f(z) \mapsto z f(z)$ (für $\xi = 0$). Im untersten Landauniveau ist der kinetische Drehimpuls gleich Null und es sind nur die Werte $m = 0, 1, 2$ usw. möglich. Durch Änderung des Drehimpulses wird das Teilchen beschleunigt oder abgebremst. Da der Drehimpuls schon verschwindet, führt dies zu einer Verschiebung der Zustände im untersten Landauniveau.



Für $\xi \neq 0$ gilt zusätzlich $f(z) \mapsto (z - \xi)f(z)$. Dieser zusätzliche Faktor kommt für jedes Teilchen. ψ_{Laughlin} nach adiabatischem Prozess ist gegeben durch

$$\psi_{\xi}^{\text{QH}}(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i=1}^N (z_i - \xi) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4}|z_i|^2\right). \quad (37)$$

Die Flussröhre lässt sich wegschieben ($H_{\phi_0} = H_0$). Damit ist ψ_{ξ}^{QH} Eigenzustand von H_0 , wenn ψ_0 Eigenzustand (Grundzustand) ist. ψ_{ξ}^{QH} ist dann ein angeregter Zustand. ψ_{ξ}^{QH} hat eine zusätzliche Nullstelle, die nicht an ein Elektron gebunden ist. Die Nullstellen führen zu einer Abschirmung, so als ob nur ein Drittel der Elektronenladung vorhanden wäre.

$$\underbrace{\psi_{\xi, \xi, \xi, \dots}^m}_{m}^{\text{QH}}[z] = \prod_{i=1}^N (z_i - \xi)^m \psi_0. \quad (38)$$

Die Elektronen meiden die Stelle ξ , als ob sich da ein Elektron befinden würde. Damit handelt es sich um ein echtes Loch ($Q = +e$) bei ξ . Allgemein hat das Quasiloch die Ladung $Q = e/m$ mit $e > 0$. Neben dem Quasiloch ergibt sich noch das „Quasielektron“ als Anregung. Eine andere Schreibweise für das Quasiloch ist

$$\psi_{\xi}^{\text{QH}}[z] = \prod_{i=1}^N (2b_i^{\dagger} - \xi) \psi_0[z], \quad (39)$$

mit dem zuvor definierten b_i^{\dagger} . Das Quasielektron ist dagegen eine fehlende Nullstelle und diese wird erzeugt, indem der Prozess in umgekehrter Richtung abläuft. Analog gilt für das Quasielektron:

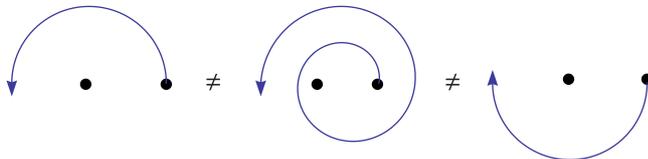
$$\psi_{\eta}^{\text{QE}}[z] = \prod_{i=1}^N (2b_i - \bar{\eta}) \psi_0[z] = \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4}|z_i|^2\right) \prod_{i=1}^N \left(2\frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{\eta}\right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (40)$$

Das Quasielektron ist also der Bereich, in dem eine Nullstelle fehlt. Das Quasiloch ist eine wesentlich lokalisierte Anregung als das Quasielektron. Die Energie eines Quasielektrons ist 2,5 mal so groß wie die eines Quasilochs. Die Ladung des Quasielektrons ist $-e/m$ mit $e > 0$. Damit verstehen wir, wie es zur Ausbildung eines Plateaus kommt:

Die lokalisierten Quasiteilchen tragen zum Transport nicht bei. Eine Änderung des Magnetfeldes führt zur Änderung des Füllfaktors. Es wird die Anzahl der Nullstellen geändert, weil sich der Fluss ändert. **Anmerkung:** Die Proben dürfen nicht zu rein sein. Bei geringen Verunreinigungen sind die Plateaus fast nicht sichtbar. Der erste angeregte Zustand bei einer bestimmten Füllung ist der mit der Energielücke $E_{1\text{QH}} + E_{1\text{QE}}$.

6 Fraktionale Statistik

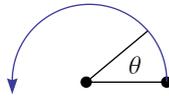
In zwei Dimensionen kann eine Windungszahl für Pfade, bei denen Teilchen vertauscht werden, definiert werden.



Die Pfade sind topologisch nicht äquivalent, weil es keinen Homöomorphismus (eine umkehrbare stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist) gibt, welcher die Pfade ineinander überführt. Hier ist die zugehörige Gruppe die Zopfgruppe mit einer eindimensionalen Darstellung, welche den unendlich vielen topologisch nicht äquivalenten Pfaden Rechnung trägt.

In drei Dimensionen ist dies jedoch nicht so, weil ein Homöomorphismus existiert derart, dass sich der Pfad in der zusätzlichen dritten Dimension zu einem Punkt (trivialen Pfad) deformieren lässt. Die zugehörige Gruppe ist die Permutationsgruppe mit der trivialen und der ungerade Darstellung, wobei die letztere ein Minuszeichen liefert (und die Vertauschung zweier Elektronen beschreibt). Die Zweidimensionalität der Elektronen ist im Labor eine approximative Zweidimensionalität. Pfade, welche zusätzlich durch die dritte Dimension führen, sind zwar stark unterdrückt (eventuell mit einem Gewichtungsfaktor von 10^{-20}), aber quantenmechanisch sind Prozesse entlang solcher Pfade dennoch möglich und müssen im Pfadintegral berücksichtigt werden. Fraktionale Statistik können also theoretisch nur solche Objekte haben, welche zweidimensional sind, nämlich beispielsweise Vortizes. Eine Nullstelle kann außerhalb der Ebene nicht existieren.

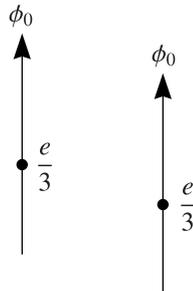
Physikalisch äußert sich diese Nicht-Äquivalenz in zwei Dimensionen darin, dass die Quantisierung des Drehimpulses von ihr beeinflusst wird. Damit ergibt sich die Möglichkeit der fraktionalen Statistik: Ein Austausch im Gegenuhrzeigersinn und Translation zurück auf die ursprünglichen Koordinaten führt zu einer zusätzlichen Phase der Wellenfunktion $\psi \mapsto \psi \exp(i\theta)$, wobei θ ein statistischer Parameter ist. Für Bosonen gilt $\theta = 0$ und für Fermionen $\theta = \pi$.



Ein allgemeines θ ist mit sogenannten **Anyonen** verknüpft. Was ist die physikalische Bedeutung dieses Parameters? Fraktionale Statistik führt zu fraktionalem relativen (kinetischen) Drehimpuls:

$$L_{\text{rel}} = \hbar \left(\frac{\theta}{\pi} + 2n \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{41}$$

Über die Quantisierung entscheidet physikalisch der Parameter θ . Für $\theta = 0$, also Bosonen, kann L_{rel} die Werte $\{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ und für $\theta = \pi$, also Fermionen die Werte $\{\dots, -3, -1, +1, +3, \dots\}$ (in Einheiten von \hbar) annehmen. Für Anyonen sind die Werte $\{\dots, \theta/\pi - 2, \theta/\pi, \theta/\pi + 2, \dots\}$ (in Einheiten von \hbar) möglich. Quasiteilchen im fraktionalem Quasi-Hall-Effekt gehorchen fraktionalem Statistiken mit $\theta = \pi/3$; diese sind also eine sehr hilfreiche Realisierung für Anyonen. Wir stellen uns die Teilchen vor als „Charge-Fluxtube-Composites“ folgendermaßen:



Jedem Teilchen entspricht ein Fluss, auf dem eine Ladung von $e/3$ sitzt. Bemerkung: Naiv führt ein solcher Austausch zu einer Phase $\theta = 1/3 \cdot \pi$ doppelt (siehe Aharonov-Bohm-Effekt). Jedoch gibt es eine sogenannte „Feldkorrektur“ und man darf nur einfach zählen. Dies kommt anschaulich daher, dass man die Ladung, die man bewegt nur als Testladung im Fluss der anderen Ladung betrachten darf.

$$|\psi\rangle \mapsto \exp\left(\frac{1}{3} \cdot 2\pi\right) |\psi\rangle. \tag{42}$$

Betrachtet man dieses Problem in der effektiven Feldtheorie, so kommt man auf einen **Chern-Simons-Term**:

$$\Delta\mathcal{L} = -qj^\mu A_\mu + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \tag{43}$$

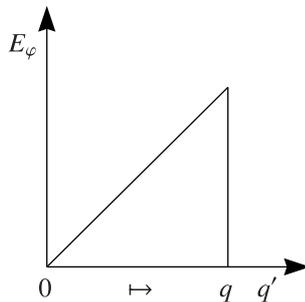
Der erste Term kommt von der minimalen Kopplung durch

$$\frac{1}{2m} \psi \left(-i\hbar \partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 \psi^*. \tag{44}$$

Hier laufen die Indizes wie folgt: $\{\mu, \nu, \varrho\} = \{0, 1, 2\}$. Schauen wir uns die Bewegungsgleichung für A_μ an:

$$qj^\mu = \mu \varepsilon^{\mu\nu\varrho} \partial_\nu A_\varrho. \tag{45}$$

Die Vortizes haben die Stärke der Ladungen.



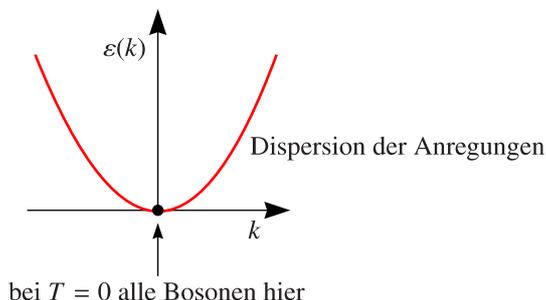
$$\int_0^q dq' E(q') \sim \frac{q^2}{2}, \tag{46}$$

wobei E das elektrische Feld ist, das aus dem Vektorpotential A_μ folgt. μ ist ein Parameter, der hier keine physikalische Bedeutung hat, weil man A_μ reskalieren kann. Man wählt $\mu = 1/(2\pi)$. [Literatur zur effektiven Feldtheorie: Goldhaber et al. Mod.Phys.Lett A 4, 21 (1989)]. Die Quasiteilchen im fraktionalen Quanten-Hall-Effekt sind Anyonen mit $\theta = \pi/m$ ($\nu = 1/m$).

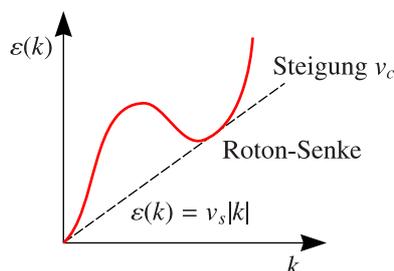
7 Pfaffian-Zustände

7.1 Vorbemerkungen

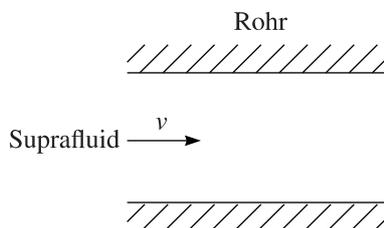
- a) Bosonen: Für ein nicht wechselwirkendes Bosegas kann eine Bose-Einstein-Kondensation auftreten.



Superfluid:



Bei $v < v_c$ gibt es keine Anregungen und damit ist der Fluss dissipationsfrei. Bei einem Bose-Einstein-Kondensat passiert dies nicht; da treten immer Anregungen auf.



Betrachte zwei Bosonen auf einem Ring der Länge L , was ein eindimensionales Problem mit periodischen Randbedingungen ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (47)$$

Einteilchen-Eigenzustände sind also ebene Wellen $\exp(ik_1x_1)$ und $\exp(ik_2x_2)$. Die Zweiteilchen-Wellenfunktion lautet:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}\{\exp(ik_1x_1)\exp(ik_2x_2)\} = \exp(ik_1x_1)\exp(ik_2x_2) + \exp(ik_1x_2)\exp(ik_2x_1) \\ \mathcal{A}\{\exp(ik_1x_1)\exp(ik_2x_2)\} = \exp(ik_1x_1)\exp(ik_2x_2) - \exp(ik_1x_2)\exp(ik_2x_1) \end{array} \right\} = \\ &= \exp\left(i(k_1+k_2)\frac{x_1+x_2}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} 2\cos\left\{(k_1-k_2)\frac{x_1-x_2}{2}\right\} \quad \text{für Bosonen} \\ 2i\sin\left\{(k_1+k_2)\frac{x_1-x_2}{2}\right\} \quad \text{für Fermionen} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

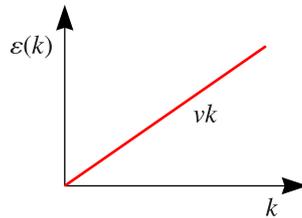
Zur Normierung setzen wir $x_2 = 0$:

$$\int_0^L dx_1 |\psi(x_1, 0)|^2 = \begin{cases} 2L & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ (4L, 0) & \text{für } k_1 = k_2 \text{ (Bosonen, Fermionen)} \end{cases}. \quad (49)$$

Betrachte nun eine repulsive Wechselwirkung $H_{\text{int}} = U\delta(x_1 - x_2)$ (auf Gitter $U\delta_{x_1, x_2}$) und berechne den zugehörigen Erwartungswert:

$$\langle H_{\text{int}} \rangle = \frac{\int_0^L dx_1 |\psi(x_1, 0)|^2 \cdot U\delta(x_1)}{\int_0^L dx_1 |\psi(x_1, 0)|^2} = \begin{cases} 2U/L & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ U/L & \text{für } k_1 = k_2 \text{ (nur Bosonen)} \end{cases}. \quad (50)$$

Die Bosonen minimieren die Amplitude dafür, im Ortsraum am selben Punkt zu sitzen (und damit die Energie bei **repulsiver** Wechselwirkung), indem sie (im Grundzustand) **im Impulsraum denselben Zustand einnehmen**. Führt zu linearer Dispersion:



Beispiel: Spin-1-Bosonen gehen alle in den Zustand mit $S_{z^*} = 0$ mit $O(3)/(\mathbb{Z}_2 \times U(1))$ -Symmetriebrechung durch Festlegung der Quantisierungsachse \hat{z}^* (die man beliebig wählen kann). Dabei handelt es sich genau um den besprochenen Effekt.

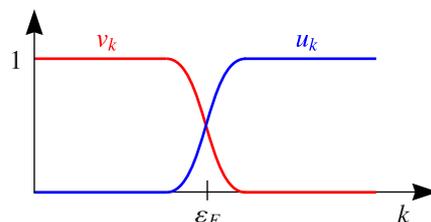
b) BCS-Wellenfunktion im Ortsraum:

Im Impulsraum gilt

$$|\psi_\phi\rangle = \prod_k (u_k + v_k \exp(i\phi) c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger) |0\rangle. \quad (51)$$

Den Zustand im Ortsraum erhält man, indem man auf N Paare projiziert.

$$|\psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-iN\phi) |\psi_\phi\rangle, \quad u_k = \cos \varphi_k, \quad v_k = \sin \varphi_k. \quad (52)$$



Umformen ergibt:

$$\begin{aligned} |\psi_\phi\rangle &= \prod_k \left(1 + \exp(i\phi) \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle = \prod_k \exp \left\{ \exp(i\phi) \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right\} = \\ &= \exp \left\{ \exp(i\phi) \sum_k \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right\} |0\rangle \equiv \exp(\exp(i\phi) b^\dagger) |0\rangle, \end{aligned} \quad (53)$$

mit

$$b^\dagger = \int d^3x_1 d^3x_2 \varphi(x_1 - x_2) \widehat{\psi}_\uparrow^\dagger(x_1) \widehat{\psi}_\downarrow^\dagger(x_2), \quad (54)$$

und

$$\varphi(x) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{v_k}{u_k} \exp(ikx). \quad (55)$$

Weiterhin gilt

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (b^\dagger)^N |0\rangle = \int dx_1 \dots dx_{2N} \varphi(x_{2N-1} - x_{2N}) \widehat{\psi}_\uparrow^\dagger(x_1) \dots \widehat{\psi}_\downarrow^\dagger(x_{2N}) |0\rangle, \quad (56)$$

mit den fermionischen Erzeugungsoperatoren $\widehat{\psi}^\dagger(x)$, wobei $\{\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}^\dagger(y)\}_+ = \delta(x - y)$. Für BCS ist die Wellenfunktion im Ortsraum symmetrisch ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), sofern es sich um s- und d-Welle handelt, und antisymmetrisch im Spinraum. Damit liegt im Spinraum ein Singulettzustand vor. Für p-Welle ist die Ortswellenfunktion antisymmetrisch. Dies vermutet man für Strontium-Supraleiter. Das Plateau bei $\nu = 5/2$ entspricht $\nu = 1/2$ im zweiten Landau-Niveau. Es findet eine Aufspaltung zwischen Up- und Down-Spin statt. Es kostet genauso viel Energie den Spin im Magnetfeld zu drehen wie das Landau-Niveau zu wechseln, wenn die effektive Masse des Elektrons bei der nackten Masse liegt.

$$\text{Pf}(z_1, \dots, z_N) = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^2 \prod_i \exp \left(-\frac{1}{4} |z_i|^2 \right), \quad (57)$$

wobei $\text{Pf}(\bullet)$ definiert ist als das antisymmetrische Produkt aller Paarungen:

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) = \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \dots \frac{1}{z_{N-1} - z_N} \right\}. \quad (58)$$

Dieses antisymmetrische Produkt entspricht dem in der BCS-Wellenfunktion im Ortsraum mit $\varphi(z_1 - z_2) = 1/(z_1 - z_2)$. Dies beschreibt einen p-Wellen-Supraleiter, weil der interne Drehimpuls bei $l = 1$ liegt. Dies bedeutet, dass φ antisymmetrisch bezüglich der Argumente ist. Die gepaarten Teilchen besitzen eine Nullstelle. Sei z_1 das Testteilchen. Bei seinem Partner sieht dieses eine Nullstelle und bei den anderen zwei Nullstellen. Im thermodynamischen Limes spielt dies keine Rolle, ist für den Füllfaktor also egal. Der jeweilige Partner befindet sich in der Nähe; diese Konfiguration ist bevorzugt. Die Paarwellenfunktion besitzt nur die Ausdehnung der supraleitenden Korrelationslänge, die bei etwa drei Gitterkonstanten liegt.

Solche Pfaffian-Zustände wurden Anfang der 90er Jahre entdeckt. Die Motivation dafür war einerseits physikalischer Natur und andererseits auch eher in der formalen konformen Feldtheorie begründet. Sie besitzen folgende Eigenschaften:

- 1) $\text{Pf}(f(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))^2 = \pm \det(M_{ij})$ mit $M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ f(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) & \text{für } i \neq j \end{cases}$, $f(-\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$
- 2) $\text{Pf} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) \prod_{i < j}^N (z_i - z_j) = \varphi \left\{ \prod_{i < j}^{N/2} (z_i - z_j)^2 \prod_{N/2 < i < j}^N (z_i - z_j)^2 \right\}$

z_1 sieht $2(N/2 - 1) = N - 2$ Nullstellen. (Ein Elektron sieht Nullstellen an allen anderen Elektronen außer an sich selbst und seinem Partner.) Mathematisch geht die Formel auf eine Identität von Cauchy zurück.

8 Nicht-abelsche Statistik

Anregungen (Vortizes) mit effektiver Ladung (Ladung der Paare) $e^* = e/4$ bei ξ_1, ξ_2 :

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) \mapsto \text{Pf} \left(\frac{(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + (z_1 \leftrightarrow z_2)}{z_1 - z_2} \right), \quad (59)$$

mit einer Nullstelle ξ_1 für den einen und ξ_2 für den anderen Partner. e^* -Quasiteilchen entsprechen $\phi_0/2$ Vortizes in Supraleitern. (Elektronpaare sehen „ganze“ Flussquanten $hc/(2e)$ und dies entspricht der Tatsache, dass Elektronen „halbe“ Flussquanten $hc/(2e)$ sehen.) Durch Paarkorrelationen entstehen Vortizes mit halbem Fluss.

Bei vier Anregungen mit $e^* = e/4$ passiert folgendes:

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) \mapsto \text{Pf} \left(\frac{(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2)(z_1 - \xi_3)(z_2 - \xi_4) + (z_1 \leftrightarrow z_2)}{z_1 - z_2} \right), \quad (60)$$

es gibt also eine Verknüpfung derart, dass Teilchen (1), (3) eine Gruppe und Teilchen (2), (4) eine weitere Gruppe bilden. ξ_1, ξ_3 sehen z_1 und ξ_2, ξ_4 sehen z_2 . Angenommen, man vertauscht ξ_3 und ξ_4 adiabatisch, so ändert sich der „interne“ Zustand des Systems. Man könnte vermuten, dass es drei verschiedene Zustände gibt, welche der Paarung von (1), (2) und (1), (3) und (1), (4) entspricht. Dies ist jedoch nicht so und war lange unverstanden. Die Zugehörigkeiten spannen einen internen Hilbertraum mit Dimension 2^{M-1} für $2M$ Anregungen auf. (Die Anzahl der Anregungen muss ungerade sein. Jede Anregung hat einen Fluss $1/2$ durch die Oberfläche. Dirac-Monopol-Bedingung: der gesamte Fluss durch Oberfläche muss ganze Zahl sein) Das adiabatische Vertauschen genügt der „nicht-abelschen“ Statistik; die Reihenfolge der Vertauschungen ist bedeutend. Vertauschen von ξ_i und ξ_j führt auf $|\psi\rangle \mapsto M_{ij}|\psi\rangle$, wobei M_{ij} eine Matrix im internen Hilbertraum ist. Nicht-abelsch bedeutet dann hier, dass diese Matrizen nicht vertauschen: $M_{ij}M_{jk} \neq M_{kj}M_{ji}$. (Es ist nicht klar, welches Elektron mit welchem gepaart ist, auch wenn man alle ξ_i kennt. Diese Information steckt im internen Raum. Alle Paarungen führen zu einem Erzeugendensystem, das jedoch keine Basis ist. Es bleibt also das Problem der Konstruktion einer (orthogonalen) Basis.) Der interne Raum ist topologisch geschützt („protected“) gegen externe Störungen, da keine äußeren Matrixelemente an den „internen Zustand“ koppeln; eine solche Kopplung ist exponentiell (und in der Praxis durch makroskopische Teilchenzahlen) unterdrückt. Eine mögliche Anwendung dieser Eigenschaft sind Quasicomputer, weil so die Kohärenz aufrechterhalten und ein mögliches Dephasing verhindert werden kann.

8.1 Majorana-Moden in Vortizes in p-Wellen-Superfluid

Die folgenden Betrachtungen gehen auf eine Veröffentlichung von Ivanov aus dem Jahre 2001 zurück. Betrachten wir ein (p+ip)-Superfluid ($1/(z_1 - z_2)$), wobei p+ip die Superposition ist, welche sich bilden lässt, sofern die Amplitude nicht vom Winkel abhängt, beispielsweise $p_x + ip_y$). Der Ordnungsparameter ist

$$\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \rangle = \Delta(k_x + ik_y). \quad (61)$$

und der Hamiltonoperator lautet

$$H = \int dr^2 \left\{ \psi^* \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \varepsilon_F \right) \psi + \psi^\dagger (\exp(i\theta)\Delta_0(r) * (\partial_x - i\partial_y)) \psi^\dagger + \text{h.c.} \right\}, \quad A * B = \frac{1}{2}\{A, B\}. \quad (62)$$

Wir haben hier keinen Spin; ansonsten müsste der Spinzustand ein Triplet sein, da die Ortswellenfunktion schon antisymmetrisch ist. Das Fehlen des Spins wird sich als wichtig erweisen. Die ungewöhnlichen Eigenschaften rühren nämlich von dieser Tatsache her.

Die Essenz ist, dass es in p -Wellen-Supraleitern Majorana-Fermion-Zustände (midgap states) mit $E = 0$ in den Vortizes gibt. $2L$ Quasilöchern entsprechen $2L$ Vortizes und diese $2L$ Majorana-Fermionen, also L Fermionen. Vergleiche mit dem Hamiltonoperator eines Supraleiters in BCS-Approximation:

$$H = \sum_{k,\sigma} \xi_k c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} + \sum_l \sum_k V_{k,l} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger c_{-l,\downarrow} c_{l,\uparrow}, \quad \Delta_l = \begin{cases} \Delta_0 & \text{für } |\xi_l| < \omega_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (63)$$

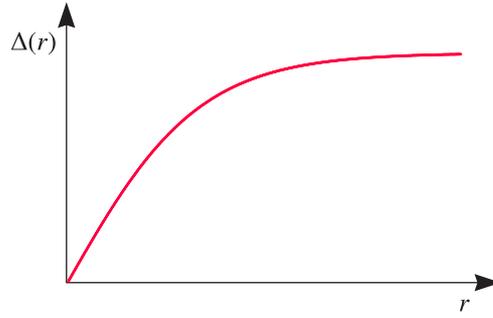
Für einen p-Wellen-Supraleiter (p+ip) gilt

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_0(k_x + ik_y) & \text{für } |\xi_l| < \omega_D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}. \quad (64)$$

Durch Herumlaufen um die Fermikugel ergibt sich also eine zusätzliche Phase. Befindet sich bei $r = 0$ ein Vortex, so ist Δ keine Konstante mehr:

$$\Delta_k(r, \vartheta) = \Delta(r) \exp(i\vartheta)(k_x + ik_y). \quad (65)$$

Im Vortexkern gibt es keine Supraleitung. Die Phase macht den Vortex aus.



In der BCS-Theorie kann die Lösung von

$$H = \sum_{k,\sigma} \xi_k c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} + \sum_k \Delta_k^* c_{k,\downarrow} c_{k,\uparrow} + \sum_k \Delta_k c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger. \quad (66)$$

mit der Bogoliubov-Transformation

$$\begin{pmatrix} c_{k,\uparrow} \\ c_{-k,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{k,\uparrow} \\ \gamma_{-k,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}, \quad |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad (67)$$

Damit lässt sich H auf die diagonale Form

$$H = E_0 + \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k \gamma_{k,\sigma}^\dagger \gamma_{k,\sigma}, \quad (68)$$

bringen. Zusätzlich mit der Forderung $\gamma_k |\psi_{\text{BCS}}\rangle = 0$ für alle k erhalten wir die BCS-Wellenfunktion. Um uns die Zustände im Vortextkern anzuschauen, machen wir eine ähnliche Transformation (und zwar im Ortsraum):

$$\gamma_E^\dagger(\mathbf{x}) = u_E(\mathbf{x}) \widehat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) + v_E(\mathbf{x}) \widehat{\psi}(x), \quad (69)$$

wobei E ein Index ist, welcher die Lösung angibt. $\widehat{\psi}^\dagger$ bzw. $\widehat{\psi}(x)$ sind fermionische Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren. (Da im Supraleiter die $U(1)$ -Symmetrie, also die Ladungserhaltung (modulo 2) gebrochen ist, muss man immer Kombinationen von Elektron-Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nehmen.) Der Operator $\gamma_E^\dagger(\mathbf{x})$ erzeugt einen Zustand mit Energie E im Vortex. Dieser Ansatz ist in die Bogoliubov-de-Gennes-Gleichung (Heisenbergsche Bewegungsgleichung für den Operator γ^\dagger) einzusetzen: $[H, \gamma^\dagger] = E\gamma^\dagger$ mit $E = n\omega_0$ wobei $n \in \mathbb{Z}$. Interessant ist, dass es hier keine Nullpunktsenergie gibt, sondern dass die niedrigste Energie bei $E = 0$ liegt! **Bemerkung:** Bei einem **s-Wellen-Supraleiter** hat man den Faktor $i(\partial_x + i\partial_y)$ nicht. Hier hat man Paare von Up- und Down-Spins:

$$\gamma_{\uparrow,E}^\dagger(\mathbf{x}) = u_E(\mathbf{x}) \widehat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{x}) + v_E(\mathbf{x}) \widehat{\psi}_\downarrow(\mathbf{x}). \quad (70)$$

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k,\uparrow}^\dagger c_{k,\downarrow}^\dagger) |0\rangle. \quad (71)$$

Es gilt also

$$\frac{1}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger |\psi_{\text{BCS}}\rangle = \frac{1}{v_k} c_{-k,\downarrow} |\psi_{\text{BCS}}\rangle, \quad (72)$$

es macht also keinen Unterschied, ob man ein Elektron mit Spin Up entfernt oder ein Elektron mit Spin Down dem System hinzufügt. Beim s-Wellen-Supraleiter gilt

$$[H, \gamma_{E,\uparrow}^\dagger] = E\gamma_{E,\uparrow}^\dagger, \quad E \approx \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (73)$$

Dies lässt sich vermeiden durch den obigen Faktor, weil dieser dafür sorgt, dass schon eine halbe Nullstelle da ist. Eine Eigenschaft bei den Bogoliubov-Transformationen ist folgendes:

$$[H, \gamma_{E,\downarrow}] = -E\gamma_{E,\downarrow}. \quad (74)$$

Man kann nicht unterscheiden zwischen einem Up-Spin-Teilchen und einem Down-Spin-Loch. Bogoliubov liefert jede physikalische Lösung zweimal, da wir nicht zwischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren unterscheiden können. Deshalb wirft man den Parameterbereich $n \in \{\dots, -2, -1\}$ als unphysikalisch weg. In de-Gennes-Gleichung gibt es keinen Spin, man hat aber dasselbe Overcounting. $n = \{\dots, -1, 0\}$ ist unphysikalisch.

$$[H, \gamma_E^\dagger] = E\gamma_E^\dagger. \quad (75)$$

Die hermitesch konjugierte Gleichung lautet $[H, \gamma_E] = -E\gamma_E$, wobei man die Lösung für $n = 0$ nur einmal erhält. Wir haben hier einen Operator, der zu sich selbst konjugiert ist. Dieser erzeugt ein Majorana-Fermion. Man kann aus zwei Majorana-Fermionen ein "echtes" Fermion machen:

$$\psi^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad \psi = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2). \tag{76}$$

9 Majorana-Fermionen

Ein Fermion mit den Operatoren ψ^\dagger, ψ entspricht zwei Majorana-Fermionen, wobei die beiden Majorana-Fermionen definiert sind über

$$\gamma_1 = \psi^\dagger + \psi, \quad \gamma_2 = i(\psi^\dagger - \psi) \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad \psi^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2). \tag{77}$$

Majorana-Fermionen antikommutieren ebenso wie gewöhnliche Fermionen: $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$, also beispielsweise

$$\gamma_1^2 = (\psi^\dagger + \psi)(\psi^\dagger + \psi) = \psi^\dagger\psi + \psi\psi^\dagger = 1, \tag{78}$$

per Definition. Oder auch

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = i\{\psi^\dagger + \psi, \psi^\dagger - \psi\} = i(-\{\psi^\dagger, \psi\} + \{\psi, \psi^\dagger\}) = 0. \tag{79}$$

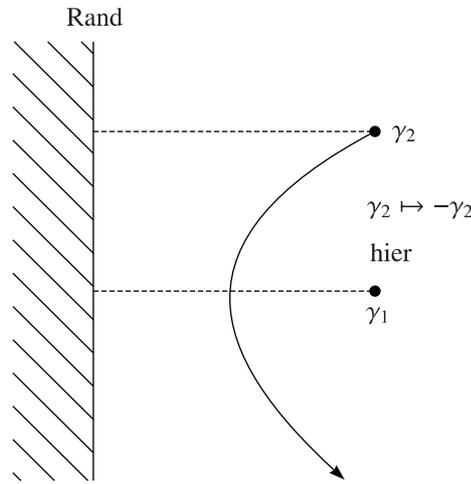
Die Basis des Zustandsraums für ein einziges Fermion ist gegeben durch $\{|0\rangle, \psi^\dagger|0\rangle\}$. Damit können wir die Operatoren in Matrixnotation schreiben wie folgt:

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y. \tag{80}$$

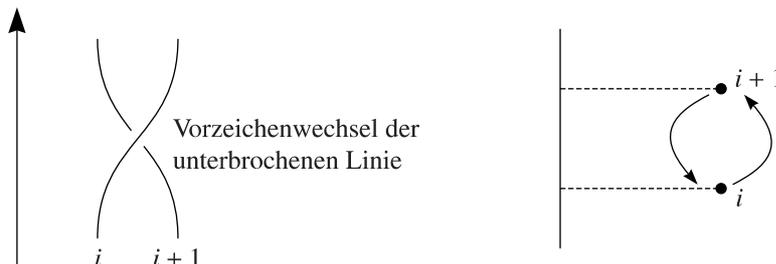
Majorana-Fermionen sind ihre eigenen Antiteilchen, was aus der Beziehung $\gamma_i^\dagger = \gamma_i$ ersichtlich ist. Kommen wir nun zurück zur Supraleitung. Eine U(1)-Eichtransformation kann in der Form $\Delta \mapsto \Delta' = \Delta \exp(i\phi)$ geschrieben werden, wobei $\Delta \sim \langle \psi\psi \rangle$ der Ordnungsparameter ist. Deshalb ist

$$\psi^\dagger \mapsto \psi^\dagger \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\right), \quad \psi \mapsto \psi \exp\left(i\frac{\phi}{2}\right). \tag{81}$$

Beim Umlaufen des Vortex gilt $\psi \mapsto -\psi$ und $\psi^\dagger \mapsto -\psi^\dagger$. Damit gilt auch $\gamma \mapsto -\gamma$.

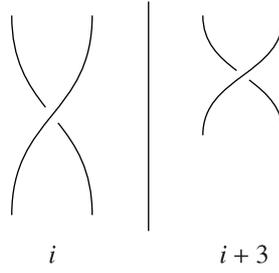


Wie führt uns dies zur nicht-abelschen Statistik? Dazu schauen wir uns die **Zopf-Gruppe** (braid group) B_{2n} an, wobei $2n$ die Anzahl der Vortizes ist. Die Generatoren der Zopfgruppe sind die T_i und diese vertauschen i und $i + 1$ im Gegenuhrzeigersinn.

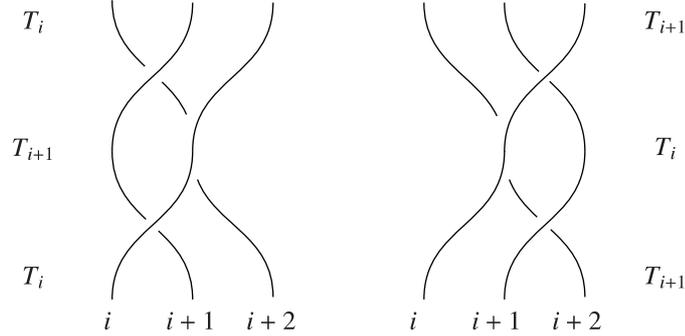


$$T_i : \gamma_i \mapsto \gamma_{i+1}, \quad \gamma_{i+1} \mapsto -\gamma_i, \quad \gamma_j \mapsto \gamma_j, \quad (82)$$

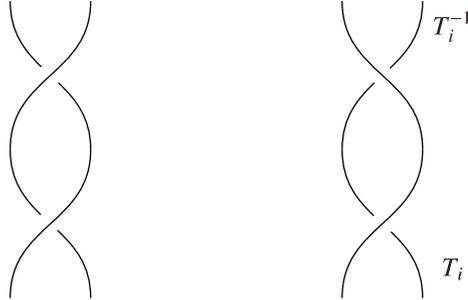
für $j = \pm i, i + 1$. Die Zopf-Algebra ist gegeben durch $T_i T_j = T_j T_i$ mit $|i - j| > 1$.



Außerdem gilt $T_i T_j T_i = T_j T_i T_j$ für $|i - j| = 1$.



Der Unterschied zur Permutationsgruppe ist, dass ein Hintereinanderausführen nicht die Identität produziert: $T_i^2 \neq T_i^{-1} T_i$.



Bemerkung: Die einzige eindimensionale Darstellung der Zopf-Gruppe ist $\tau(T_i) = \exp(i\theta)$ mit der beliebigen Phase θ . $\tau(T_i)$ wirkt auf Zustände $|\psi\rangle$. Für die Permutationsgruppe gibt es gerade und ungerade Darstellung mit $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$.

Wir brauchen Darstellungen $\tau(T_i)$, so dass

$$\tau(T_i) \gamma_j \tau(T_i)^{-1} = T_i(\gamma_j) = \begin{cases} \gamma_{j+1} & \text{für } j = i \\ -\gamma_{j-1} & \text{für } j = i + 1 \\ \gamma_j & \text{sonst} \end{cases} . \quad (83)$$

Vergleiche mit SO(3)-Rotationen $U^\dagger(\hat{n}\theta) \mathbf{v} U(\hat{n}\theta) = R_{\hat{n}, \theta} \mathbf{v}$ mit einem Vektoroperator \mathbf{v} und

$$U(\hat{n}\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{L} \hat{n} \theta\right), \quad R_{\hat{n}=\hat{z}, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

In unserem Falle gilt

$$\tau(T_i) = \exp\left(\frac{\pi}{4} \gamma_{i+1} \gamma_i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \gamma_{i+1} \gamma_i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (85)$$

wegen $(\gamma_{i+1} \gamma_i)^2 = -\gamma_{i+1}^2 \gamma_i^2 = -1$. Damit ist

$$\tau(T_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_{i+1} \gamma_i), \quad \tau(T_i)^{-1} = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \gamma_{i+1} \gamma_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_{i+1} \gamma_i). \quad (86)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau(T_1) \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \tau(T_1)^{-1} &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_2\gamma_1) \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} (1 - \gamma_2\gamma_1) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{Bmatrix} (1 - \gamma_2\gamma_1) = \\ &= \begin{Bmatrix} \gamma_2(1 + \gamma_2\gamma_1) \\ -\gamma_1(1 + \gamma_2\gamma_1) \end{Bmatrix} (1 - \gamma_2\gamma_1) = \begin{Bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (87)$$

Wir schauen uns die Darstellungen mit Fermionoperatoren an. Die Basis ist $\{|0\rangle, \psi^\dagger|0\rangle\}$, wobei $\psi = 1/2(\gamma_1 + i\gamma_2)$ und $\psi^\dagger = 1/2(\gamma_1 - i\gamma_2)$.

$$\tau(T_1) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}(\psi - \psi^\dagger)(\psi + \psi^\dagger)\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}[\psi, \psi^\dagger]\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}(2\psi^\dagger\psi - 1)\right) \hat{=} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_z\right). \quad (88)$$

Hier haben wir zwei Fermionen

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\gamma_3 + i\gamma_4). \quad (89)$$

Eine mögliche Basis ist $\{|0\rangle, \psi_1^\dagger|0\rangle, \psi_2^\dagger|0\rangle, \psi_1^\dagger\psi_2^\dagger|0\rangle\}$. Hierbei gilt nun

$$\begin{aligned} \tau(T_1) &= \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}(\psi_1 - \psi_1^\dagger)(\psi_1\psi_1^\dagger)\right\} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{(1)}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (90)$$

und

$$\tau(T_3) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Was jetzt nicht-trivial ist, ist folgendes:

$$\begin{aligned} \tau(T_2) &= \exp\left(i\frac{\pi}{4}\gamma_3\gamma_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_3\gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + i(\psi_2^\dagger + \psi_2)(\psi_1^\dagger - \psi_1)\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (92)$$

Bemerkungen

- 1) Es gilt $\dim \mathcal{H}_{\text{intern}} = 2^{2n}$, wenn n die Anzahl der Vortizes ist. Die Dimension des Pfaffian war 2^{2n-1} , weil man zwei entkoppelte Teilräume hat. Das zusätzliche -1 im Exponenten kommt daher, dass nur der Sektor mit einer geraden Anzahl von Elektronen durch ψ_{Pfaffian} beschrieben wird. (Die Elektronen sind die einzigen Fermionen.) Beim Supraleiter führt die Symmetriebrechung dazu, dass die Teilchenzahl N keine gute Quantenzahl ist (da $N, N+2, \dots$ vermischt). Jedoch ist die Eigenschaft, ob N gerade bzw. ungerade ist, eine gute Quantenzahl.
- 2) Wenn man eine Vertauschung viermal durchführt, kommt man wieder zum Anfangszustand zurück: $\tau(T_i^4) = \mathbf{1}$.
- 3) Für die Analyse haben wir nur verwendet,
 - a) dass die Vortizes einen Majorana-Zustand besitzen und
 - b) und dass $\gamma_i \mapsto -\gamma_i$, wenn für die Phase des Ordnungsparameters $\phi \mapsto \phi + 2\pi$ gilt.

10 Periodische Randbedingungen und topologische Entartungen

Wir wollen uns anschauen, wie man den Quanten-Hall-Effekt auf periodische Randbedingungen verallgemeinert. **Wiederholung:**

$$b_i = \sqrt{2l} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{4l^2} \bar{z}_i \right), \quad b_i^\dagger = \sqrt{2l} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{4l^2} z_i \right). \quad (93)$$

Wir führen den **magnetischen Translationsoperator** ein, weil dieser mit dem Hamiltonoperator kommutiert, während dies der gewöhnliche Translationsoperator nicht tut:

$$t_i(\xi) = \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}} (\xi b_i - \bar{\xi} b_i^\dagger) \right\}. \quad (94)$$

Dieser verschiebt z_i in der Art, dass $z_i \mapsto z_i + \xi$ und gleichzeitig bekommt ψ eine Phase. Um den Kommutator $[t(\xi_1), t(\xi_2)]$ zu berechnen, benötigen wir die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B) \exp \left(\frac{1}{2} [A, B] \right) = \exp(B) \exp(A) \exp([A, B]), \quad (95)$$

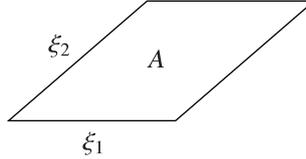
für $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} [t(\xi_1), t(\xi_2)] &= t(\xi_1) t(\xi_2) \left\{ 1 - \exp \left(\frac{1}{2l^2} [\xi_2 b - \bar{\xi}_2 b^\dagger, \xi_1 b - \bar{\xi}_1 b^\dagger] \right) \right\} = \\ &= t(\xi_1) t(\xi_2) \left\{ 1 - \exp \left(\frac{1}{2l^2} (\xi_1 \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 \xi_2) \right) \right\} = \\ &= t(\xi_1) t(\xi_2) \left\{ 1 - \exp \left(\frac{1}{2l^2} \cdot 2i \operatorname{Im}(\xi_1 \bar{\xi}_2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (96)$$

$\operatorname{Im}(\xi_1 \bar{\xi}_2)$ ist die Fläche, welche von den komplexen Größen ξ_1 und ξ_2 aufgespannt wird. Damit gilt weiterhin

$$\frac{\operatorname{Im}(\xi_1 \bar{\xi}_2)}{l^2} = i \cdot 2\pi N_\phi, \quad (97)$$

wobei N_ϕ der magnetische Fluss durch A ist in Dirac-Quanten ϕ_0 . Die Operatoren kommutieren also für $N_\phi \in \mathbb{N}$.

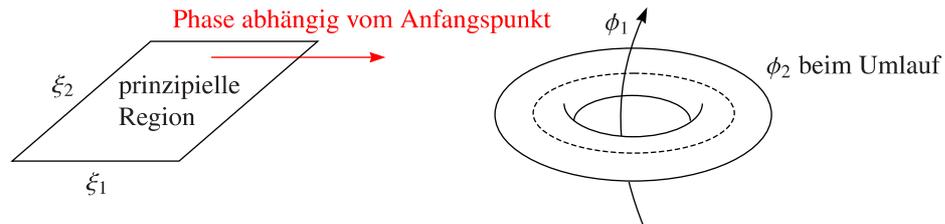


10.1 Periodische Randbedingungen

Kommen wir nun zu den **periodischen Randbedingungen**. Wir spannen die Einheitszelle durch ξ_1 und ξ_2 auf. Dann ist die Forderung an die Wellenfunktion

$$t_i(\xi_\alpha) \psi[z] = \exp(i\phi_\alpha) \psi[z], \quad (98)$$

mit der sogenannten Randphase (Boundary-Phase) und für alle i ($\alpha = 1, 2$). ϕ_1 und ϕ_2 werden von Hand gewählt, genauso wie die Größe des Torus von außen vorgegeben wird.



Mit dem Translationsoperator

$$t_i(\xi_\alpha) = \exp \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial z_i} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{4l^2} (\xi_\alpha \bar{z}_i - \bar{\xi}_\alpha z_i) \right\}, \quad (99)$$

ergibt sich:

$$\psi(z_1, \dots, z_i + \xi_\alpha, \dots, z_N) = \exp\left(-\frac{1}{4l^2}(\xi_\alpha \bar{z}_i - \bar{\xi}_\alpha x_i)\right) \exp(i\phi_\alpha) \psi(z_1, \dots, z_i, \dots, z_N). \quad (100)$$

Wähle $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \tau$ mit $\text{Im}(\tau) = 2\pi l^2 N_\phi > 0$.

10.2 Einteilchenzustände im niedrigsten Landauniveau

Mit

$$\psi(z) = f(z) \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right), \quad (101)$$

ergibt sich (unter Forderung der periodischen Randbedingungen):

$$\begin{aligned} \psi(z + \xi_\alpha) &= f(z + \xi_\alpha) \exp\left\{-\frac{1}{4l^2}(z + \xi_\alpha)(\bar{z} + \bar{\xi}_\alpha)\right\} \stackrel{!}{=} \\ &= f(z) \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4l^2}(\xi_\alpha \bar{z} - \bar{\xi}_\alpha z)\right) \exp(i\phi_\alpha). \end{aligned} \quad (102)$$

Damit muss gelten:

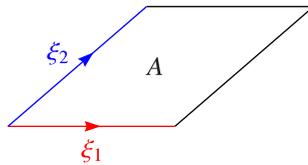
$$\frac{f(z + \xi_\alpha)}{f(z)} = \exp\left(\frac{1}{4l^2}\bar{\xi}_\alpha(2z + \xi_\alpha)\right) \exp(i\phi_\alpha). \quad (103)$$

Die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in der prinzipiellen Region („principal region“) ist gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\square} dz \frac{d \ln f(z)}{dz} = \oint_{\square} dz \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (104)$$

In das integral geht jede Polstelle mit ihrem Residuum ein. Wenn $f(z) = 0$, dann besitzt $1/f(z)$ eine Polstelle mit Residuum $1/f'(z)$.

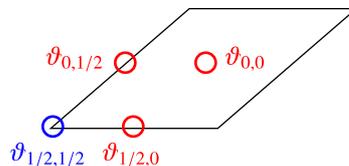
$$\begin{aligned} \oint_{\square} d \ln f(z) &= \ln\left(\frac{f(z)}{f(z+\tau)}\Big|_{z=0}^{z=1}\right) - \ln\left(\frac{f(z)}{f(z+1)}\Big|_{z=0}^{z=\tau}\right) = -\frac{1}{4l^2}\bar{\tau}(2z+\tau)\Big|_{z=0}^{z=1} + \frac{1}{4l^2} \cdot 1(2z+1)\Big|_{z=0}^{z=\tau} = \\ &= \frac{1}{4l^2}(-2\bar{\tau} + 2\tau) = \frac{i\text{Im}(\tau)}{l^2} = 2\pi i N_\phi. \end{aligned} \quad (105)$$



Wie können wir nun solche Wellenfunktionen konstruieren? Dazu freien wir auf Jacobische Theta-Funktionen zurück:

$$\vartheta_{a,b}(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i(n+a)^2\tau) \exp(2\pi i(n+a)(z+b)), \quad a \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}, \quad b \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}. \quad (106)$$

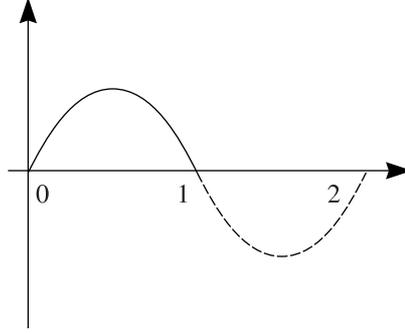
Die Theta-Funktion mit $a = b = 1/2$ (ungerade Theta-Funktion) besitzt die Eigenschaft $\vartheta_{1/2,1/2}(-z|\tau) = -\vartheta_{1/2,1/2}(z|\tau) \equiv \vartheta(z)$. Für alle anderen a und b (gerade Theta-Funktionen) gilt $\vartheta_{a,b}(-z|\tau) = \vartheta_{a,b}(z|\tau)$. Die Nullstellen dieser Funktionen liegen bei:



Weiterhin gelten folgende quasiperiodische Bedingungen:

$$\vartheta_{a,b}(z+1|\tau) = \exp(2\pi ia)\vartheta_{a,b}(z,\tau), \quad \vartheta_{a,b}(z+\tau|\tau) = \exp(-\pi i\tau)\exp(-2\pi i(z+b))\vartheta_{a,b}(z|\tau). \quad (107)$$

Weiterhin gilt $\vartheta_{1/2,1/2}(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in \mathbb{R}$.



Zusammenfassend sind die Eigenschaften der Theta-Funktionen:

- Sie sind doppel-periodisch,
- analytisch in z ,
- und sie besitzen genau eine Nullstelle in der prinzipiellen Region.

Damit können wir für die Wellenfunktion den folgenden Ansatz machen (Doppelperiodizität als analytische Funktionen in z):

$$f(z) = \exp(ikz) \prod_{\nu=1}^{N_\phi} \vartheta(z - z_\nu) \exp\left(\frac{1}{4l^2} z^2\right). \quad (108)$$

Dann ist

$$\frac{f(z+1)}{f(z)} = \exp(ik)(-1)^{N_\phi} \exp\left(\frac{1}{4l^2}(2z+1)\right), \quad (109)$$

und

$$\frac{f(z+\tau)}{f(z)} = \exp(ik\tau)\exp(-\pi i\tau N_\phi)(-1)^{N_\phi} \exp\left(-2\pi i \sum_{\nu=1}^{N_\phi} (z - z_\nu)\right) \exp\left(\frac{1}{4l^2}\tau(2z+\tau)\right). \quad (110)$$

k benötigen wir, um den Zustand an die Randphase anzupassen. Aus (103) ergibt sich $\exp(ik)(-1)^{N_\phi} = \exp(i\phi_1)$ zum einen und unter Verwendung von

$$\exp(-\pi i\tau N_\phi) \exp\left(-2\pi i \sum_{\nu=1}^{N_\phi} z\right) = \exp(-i\pi N_\phi(2z+\tau)) = \exp\left(\frac{1}{4l^2}(\bar{\tau}-\tau)(2z+\tau)\right), \quad (111)$$

folgt

$$\exp(ik\tau)(-1)^{N_\phi} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu} z_\nu\right) = \exp(i\phi_2), \quad (112)$$

zum anderen. Aus der Tatsache, dass z_ν fest ist, sind k , ϕ_1 und ϕ_2 eindeutig bestimmt. Wenn ϕ_1 und ϕ_2 fest sind, gibt es N_ϕ linear unabhängige Lösungen (für z_1, \dots, z_{N_ϕ}). Das ist physikalisch klar, denn es gibt N_ϕ Einteilchenzustände. Die mathematische Argumentation ist wie folgt: Wenn wir zwei Lösungen $f(z)$ und $\tilde{f}(z)$ (mit festem ϕ_1, ϕ_2) haben, ist $\tilde{f}(z)/f(z)$ strikt doppelperiodisch und hat N_ϕ Polstellen (die Nullstellen von $f(z)$). Das Riemann-Roch-Theorem besagt, dass der Raum dieser Funktionen $f(z)$ N_ϕ -dimensional ist.

10.3 Der Laughlin-1/ m -Zustand

Wir betrachten

$$\psi_m[z] = f[z] \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z_i|^2\right), \quad (113)$$

mit dem folgenden Ansatz:

$$f[z] = \exp(iKZ) \underbrace{\prod_{\nu=1}^m \vartheta(Z - Z_\nu)}_{(1)} \underbrace{\prod_{i<j}^N \vartheta(z_i - z_j)^m}_{(2)} \prod_{i=1}^N \exp\left(\frac{1}{4l^2}z_i^2\right), \quad Z = \sum_{i=1}^N z_i, \quad (114)$$

mit der sogenannten Schwerpunktskoordinaten Z und den Schwerpunktskoordinatennullstellen Z_ν . Für ein Testteilchen benötigen wir $N_\phi = N \cdot m$ Nullstellen. Der Faktor (2) liefert $(N-1) \cdot m$ Nullstellen für z_1 ; es fehlen also zunächst m Nullstellen. Dazu benötigt man den Faktor (1), der so konstruiert ist, dass er keine globale Nullstelle für alle Teilchen (Quasiloche) erzeugt. Für Vielteilchenzustände wird analog zu (103) die Bedingung

$$\frac{f(z_1 + \xi_\alpha, z_2, \dots)}{f[z]} = \exp\left(\frac{1}{4l^2}\bar{\xi}_\alpha(2z_1 + \xi_\alpha)\right) \exp(i\phi_\alpha), \quad (115)$$

gefordert und damit

$$\frac{f(z_1 + 1, \dots)}{f[z]} = \exp(iK)(-1)^m(-1)^{(N-1)m} \exp\left(\frac{1}{4l^2}(2z_1 + 1)\right), \quad (116)$$

also $\exp(iK)(-1)^{N_\phi} = \exp(i\phi_1)$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{f(z_1 + \tau, \dots)}{f[z]} &= \exp(iK\tau) \exp(-\pi i \tau N_\phi) (-1)^{N_\phi} \times \\ &\quad \times \exp\left\{-2\pi i \left[\sum_{\nu=1}^m (Z - Z_\nu) + m \sum_{i=2}^N (z_1 - z_i)\right]\right\} \exp\left(\frac{1}{4l^2}\tau(2z_1 + \tau)\right) = \\ &= \exp(iK\tau) \exp(-i\pi N_\phi(2z_1 + \tau)) (-1)^{N_\phi} \exp\left\{-2\pi i \left(mz_1 + (N-1)mz_1 - \sum_{\nu=1}^m Z_\nu\right)\right\} = \\ &= \exp(iK\tau) \exp(-i\pi N_\phi(2z_1 + \tau)) (-1)^{N_\phi} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu=1}^m Z_\nu\right) \exp\left(\frac{1}{4l^2}\tau(2z_1 + \tau)\right), \quad (117) \end{aligned}$$

also muss

$$\exp(iKZ)(-1)^{N_\phi} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu=1}^m Z_\nu\right) = \exp(i\phi_2), \quad (118)$$

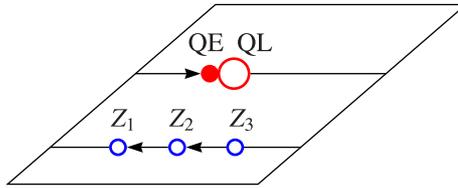
gelten. Die Gleichungen für die Schwerpunktskoordinatennullstellen Z_ν sind analog zu den Gleichungen für ein Teilchen im niedrigsten Landauniveau mit $N'_\phi = m$ Flussquanten. Damit gibt es für festes K , ϕ_1 und ϕ_2 m unabhängige Lösungen; m entspricht der **topologischen Entartung**. Dies ist der Prototyp einer topologischen Quantenzahl. Hier ist die Ordnung nicht durch einen Ordnungsparameter charakterisiert, sondern durch die Anregungen und deren Quantenzahlen; eine alternative Möglichkeit der Beschreibung ist durch die topologische Ordnung gegeben. Diese liefert die Eigenschaften des Systems auf einer Mannigfaltigkeit. Besitzt diese das Genus g , so beträgt die Entartung m^g ; beispielsweise ist die Entartung auf einem Torus mit zwei Henkeln gerade gleich 9. Möchte man die Pfaffian-Zustände auf die periodischen Randbedingungen verallgemeinern, so muss die Ersetzung

$$\frac{1}{z_i - z_j} \mapsto \frac{\vartheta_{a,b}(z_i - z_j|\tau)}{\vartheta_{1/2,1/2}(z_i - z_j|\tau)}, \quad (a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (119)$$

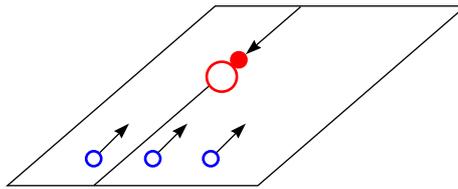
vorgenommen werden. Damit ergibt sich eine zusätzliche Entartung von 3. Diese ist ein Charakteristikum für eine $SU(2)_{\text{Level } k}$ -Chern-Simons-Theorie mit der Entartung $k+1$. Für den Pfaffian gilt $k=2$. Die $SU(2)$ -Gruppe ist für die nicht-abelsche Statistik verantwortlich, wodurch beispielsweise die Anyonen beschrieben werden, welche wir schon kennengelernt haben. Befindet sich ein Quasiloche bei η , so gilt:

$$f_m^\eta = \exp(iKZ) \prod_{\nu=1}^m \vartheta(Z - Z_\nu) \prod_{i=1}^N \vartheta(\eta - z_i) \prod_{i<j}^N \vartheta(z_i - z_j)^m \prod_i \exp\left(\frac{1}{4l^2}z_i\right), \quad Z = \sum_{i=1}^N z_i + \frac{\eta}{m}, \quad (120)$$

wobei das Quasiloach zusätzlich in der Schwerpunktskoordinate berücksichtigt wird. Mit dem Quasiloach haben wir eine zusätzliche Nullstelle und damit gilt $N_\phi = m \cdot N + 1$. Für ein Quasiloach gilt die Periodizität $\eta \mapsto \eta + m\xi_\alpha$ mit $\xi_1 = 1$ und $\xi_2 = \tau$. Wir stellen uns vor, dass ein Quasielektron-Quasiloach-Paar erzeugt wird. Dabei soll das Quasiloach sich um den Torus bewegen: $T_1 : |\psi\rangle \mapsto \exp(i\varphi)|\psi\rangle$. Was passiert nun mit den drei Nullstellen? Wenn das Quasiteilchen bewegt wird und ϕ_1, ϕ_2 konstant sein soll, müssen wir die Z_ν anpassen.



$$Z = \sum_{i=1}^N z_i, \quad (-1)^{N_\phi} \exp(iK\tau) \exp \left\{ 2\pi i \sum_{\nu} \left(Z_\nu + \frac{\eta}{m} \right) \right\} = \exp(i\phi_2). \quad (121)$$

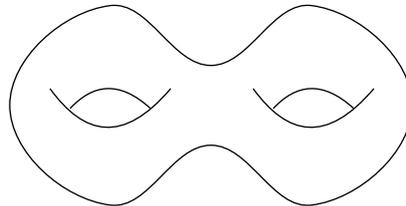


In diesem Falle verschieben sich die Z_ν jeweils um $1/3$ nach oben. Dann ändert sich der Zustand $T_\tau : |\psi_\nu\rangle \mapsto |\psi_{\nu+1}\rangle$, wobei $\{|\psi_\nu\rangle\}$ eine Basis des internen Raums ist. Die topologische Entartung m bleibt dabei erhalten. Im Allgemeinen gilt $T_\tau^{-1}T_1^{-1}T_\tau T_1 \neq 1$; diese Transformationen kommutieren also nicht. Wir haben gesehen, dass es auf einer geschlossenen Oberfläche so viele Nullstellen wie Flussquanten gibt. In diesem Zusammenhang haben wir topologische Entartungen untersucht, die eine Aussage über den Zustand machen. Eine Verallgemeinerung dieses Konzepts ist sinnvoll, weil sich auf diese Weise Quanten-Hall-Zustände auf topologisch nichttrivialen Oberflächen untersuchen lassen. Dies kann in anderen Systemen (beispielsweise Spinflüssigkeiten) als universalen Rahmen dienen.

11 Topologische Ordnung

Als **topologische Ordnung** wird Ordnung bezeichnet, die nicht durch eine spontan gebrochene Symmetrie (Beschreibung über Ordnungsparameter, mittlere Feldnäherung, Landau-Ginzburg-Theorie, Goldstone-Theorem), sondern durch neue Quantenzahlen charakterisiert wird. Diese Quantenzahlen lassen sich nicht lokal messen, sondern nur durch nicht-lokale topologische Prozesse wie beispielsweise

- fraktionale Statistik (inklusive nicht-abelscher Statistik)
- Entartung von Grundzuständen auf topologisch nicht-trivialen Geometrien: (Entartung auf Torus)^g (wobei g das Geschlecht der Mannigfaltigkeit ist)



- Klassifizierung der Randzustände
- Verschränkungsentropie



Für die Zustandsdichtematrix gilt $\varrho_A = \text{Sp}_B(\varrho)$, wobei $\varrho = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ die Dichtematrix des gesamten Systems ist. ϱ_A bezeichnet man als reduzierte Dichtematrix. Für die Verschränkungsentropie gilt dann

$S_a = -k_B \text{Sp}(\rho_A \ln(\rho_A))$ und ist ein Maß für den Grad der Verschränkung von Zuständen. Ein Beispiel dafür ist der ($S = 0$)-Singulett-Zustand

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle), \quad (122)$$

der maximal verschränkt ist; für diesen Zustand gilt $S = 1$. Der Zustand $|1, 1\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle$ ist nicht verschränkt, weil er als Tensorprodukt geschrieben werden kann; hier gilt $S = 0$.

Dies sind Beispiele für solche Quantenzahlen, durch die Zustände eindeutig klassifiziert werden können. Zustände mit verschiedener topologischer Ordnung können nur durch Phasenübergänge (im Allgemeinen erster Art) ineinander übergehen.

11.1 Beispiele für solche Zustände

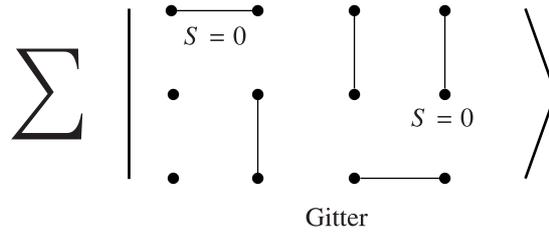
1) Chirale Spinflüssigkeit:

Vereinfachte Beschreibung: Dabei handelt es sich um einen ($m = 2$)-Laughlin-Zustand für Spinflips $S_{z_i}^+$ auf einem Vakuum $|\downarrow, \downarrow, \dots, \downarrow\rangle$. Eine solche Spinflüssigkeit besitzt Chiralität und ist das zweidimensionale Analogon zum Haldane-Shastry-Modell.

2) Quanten-Hall-Zustände:

Eine topologische Quantenzahl ist N_{shift} in $2S = N/\nu - N_{\text{shift}}$ auf der Kugel mit Monopol $2S\phi_0$ im Zentrum der Kugel. $2S$ ist die Anzahl der Zustände auf der Kugel abzüglich von 1 und N die Anzahl der Elektronen. Der Spin S charakterisiert die Zustände; Einteilchenzustände sind charakterisiert durch die Wahl von $m = -S, \dots, S$. Der Pfaffian-Zustand ist nicht sein eigenes Teilchen-Loch-Konjugiertes, weil diese Zustände besitzen unterschiedliche topologische Quantenzahlen N_{shift} besitzen.

3) Dimer-Zustände für Spinmodelle:



Auch diese haben topologisch nichttriviale Eigenschaften. Die formale Behandlung ist jedoch nicht einfach, weil die Basis der Dimer-Konfigurationen nicht orthogonal ist. Mit jeder Dimer-Konfiguration gibt es ein Singulett. Man hat viel mehr Dimer-Konfigurationen und die Basis ist übervollständig. **Problem:** Die Anzahl der Dimer-Coverings (Anzahl Dimers zu bilden) ist sehr viel größer als die Anzahl der Singulett.

4) Kitajev-Modelle:

Dabei handelt es sich um esoterische (in dem Sinne, dass sie nicht invariant unter Spinrotationen sind), aber einfache Spinmodelle mit topologisch interessanten Quantenzahlen. Experimentell versucht man, solche Modelle durch kalte Atome auf optischen Gittern zu realisieren; dabei sind die „Spins“ die Zustände von Atomen und Molekülen.

12 Hierarchie der Quanten-Hall-Zustände

Es befinden sich Plateaus bei $\nu = 2/5, 2/7, 3/7, 4/9$ usw. (Laughlin nur $\nu = 1/m$). Quantenlöcher (oder Quantenelektronen) kondensieren selbst in ein Fluid vom Laughlin-Typ (dabei handelt es sich um geladene Teilchen im niedrigsten Landauniveau mit Coulomb-Wechselwirkung) beispielsweise $m = 3, p = 2$ also $\nu = 2/7$.

$$\psi_{[m,p]}(z_1, \dots, z_N) = \int D\xi_1 \dots D\xi_M \phi_p(\xi_1, \dots, \xi_M) \underbrace{\prod_{l=1}^M \exp\left(-\frac{1}{4ml^2}|\xi_l|^2\right) \prod_{l < k}^M (\xi_l - \xi_k)^{\frac{1}{m}}}_{\text{Normierung des Hilbertraumes für Quasilöcher}} \times \prod_{l=1}^M \prod_{i=1}^N (\xi_l - z_i) \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \prod_i \exp\left(-\frac{1}{4l^2}|z_i|^2\right), \quad (123)$$

wobei $\phi(x_1, \dots, \xi_M)$ die Wellenfunktion der Quasilöcher ist. Integriert wird hier über Quasiteilchenpositionen $D\xi_i = d(\text{Re}(\xi_i))d(\text{Im}(\xi_i))$. Die Quasiteilchen sehen ein effektives Magnetfeld, welches um einen Faktor $1/m$ kleiner ist, womit sich das Auftreten von $1/m$ in der Exponentialfunktion erklärt. Die Quasilöcher (oder allgemeinen Anregungen) werden in der Wellenfunktion nicht mehr als Parameter, sondern als quantenmechanische Teilchen mit eigener Wellenfunktion $\phi_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$ behandelt. Wir machen folgenden Ansatz für ϕ_p :

$$\phi_p(\xi_1, \dots, \xi_M) = \prod_{l < k}^M (\bar{\xi}_l - \bar{\xi}_k)^{p + \frac{1}{m}} \prod_{l=1}^M \exp\left(-\frac{1}{4ml^2} |\xi_l|^2\right). \quad (124)$$

Für die effektive magnetische Länge der Quasilöcher gilt $l_{\text{eff}}^2 = ml^2$ und $B_{\text{eff}} = B/m$. Diese Wellenfunktion ϕ_p ist mehrdeutig, in Kombination mit $\psi_{[m,p]}$ jedoch eindeutig, weil dann keine komplexe Größe mehr auftritt. Die Integration führt auf

$$\int D\xi \bar{\xi}^n \xi^q \exp\left(-\frac{1}{2ml^2} |\xi|^2\right) = \delta_{n,q} \int_0^\infty 2\pi r (r^2)^n \exp(-\beta r^2) dr, \quad (125)$$

mit $\beta = 1/(2ml^2) > 0$. Sie Substitution $t = r^2$ führt dann auf

$$\delta_{n,q} \pi \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^n \int_0^\infty \exp(-\beta t) dt = \frac{\pi}{\beta} \delta_{n,q} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^n [-\exp(-\beta t)]_0^\infty = \delta_{n,q} \frac{\pi n!}{\beta^{n+1}} = \delta_{n,q} n! \pi (2ml^2)^{n+1}. \quad (126)$$

ϕ ist ein Polynom vom Grad $(p + 1/m)(M - 1)$ in $\bar{\xi}_i$, ψ ist vom Grad $N + 1/m(M - 1)$ in ξ_i und vom Grad $m(N - 1) + M$ in z_i . Damit die Integrale über ξ_i beitragen, müssen die Grade in $\bar{\xi}_i$ und ξ gleich sein; damit ergibt sich $N = p(M - 1)$. Der Grad $m(N - 1) + M$ in z_i entspricht $N_\phi + m$ auf dem Torus und N_ϕ auf der Kugel (der Anzahl der Nullstellen, die gesehen werden). Der Füllfaktor liegt bei

$$\frac{1}{\nu} \equiv \frac{\partial N_\phi}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} \left\{ m(N - 1) + \left(\frac{N}{p} + 1\right) \right\} = m + \frac{1}{p}. \quad (127)$$

Da die Wellenfunktion symmetrisch in der Quasilochkoordinaten ist, muss p gerade sein, während m ungerade sein muss, da es sich um eine Fermionwellenfunktion handelt. Beispielsweise ist $\nu = 2/7$ für $[m, p] = [3, 2]$. Wenn anstelle der Quasilöcher eine Kondensation von Quasielektronen stattfindet, wird (*) ersetzt durch

$$\prod_{l < k}^M (\bar{\xi}_l - \bar{\xi}_k)^{-\frac{1}{m}} \prod_{i=1}^M \left(\bar{\xi}_i - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z_i} \right), \quad (128)$$

wobei $\partial/\partial z_i$ nur auf das Polynom in den z_i wirkt, **nicht** auf $\exp(-1/(4^2)|z_i|^2)$. Weiterhin ist dann

$$\phi_{-p}(\xi_1, \dots, \xi_M) = \prod_{l < k}^M (\xi_l - \xi_k)^{p - \frac{1}{m}} \prod_{l=1}^M \exp\left(-\frac{1}{4ml^2} |\xi_l|^2\right). \quad (129)$$

Dann ist $\nu = 2/5$ für $[m, p] = [3, -2]$.

12.1 Iteration der Quasiteilchen-Kondensation

$$\frac{1}{\nu} = [m_1, \alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2, \dots, \alpha_n p_n] = m + \frac{\alpha_1}{[p_1, \alpha_2 p_2, \dots, \alpha_n p_n]}, \quad (130)$$

mit $[p] = p$, wobei die p_i ungerade und m gerade ist. α_i sind Vorzeichen und es gilt $\alpha_i = 1$ für Quasilöcher und $\alpha_i = -1$ für Quasielektronen. Die Quasiteilchen sind Anyonen und das wird dadurch ausgedrückt, dass wir eine bosonische Darstellung haben $\hat{=} \text{Bosonen} + ()^{1/m}$ -Faktor.

12.2 Die Ladung der Quasiteilchen

Wie ändert sich N_ϕ , also der Fluss für die Elektornen, wenn ich im innersten Fluid ein Quasiloch erzeuge?

$$e^* \equiv (m, \alpha_1, p_1, \dots, \alpha_n p_n) = -\alpha_1 \frac{(p_1, \dots, \alpha_n p_n)}{[m, \alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n]} = \frac{(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{\text{Nenner von } \nu}, \quad (131)$$

mit $(p) = 1/p$. Für $\nu = 2/5$, also $[3, -2]$, gilt $\alpha_1 = -1$ und $(2) = 1/2$, also $e^* = 1/5$.

Beispiel

Wir betrachten einen $\nu = 2/5$ -Zustand mit Quasiloach im Elternfluid ($m = 3$ -Fluid). Dann geht N_ϕ nach $N_\phi + 1$. Jedes Elektron sieht $1/\nu = 5/2$ Nullstellen. Eine Elektronladung entspricht 2,5 Nullstellen, also hat dieses Quasiloach die Ladung $\tilde{e}^* = 2/5$. Wenn $\tilde{e}^* = 1/3$ wäre, könnten wir $\tilde{e}^* + qe^*$ (mit $q \in \mathbb{Z}$) kombinieren und noch kleinere Ladungen erhalten.

12.3 Quasiteilchen-Statistik

$$\theta = \pi \frac{(m, \alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n)}{|(m, \alpha_1 p_1, \dots, \alpha_{n-1} p_{n-1})|} = \pi \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5}\pi. \quad (132)$$

Ist das konsistent? Wir betrachten zwei Quasilöcher mit $e^* = 1/5$, $\theta = 3\pi/5$. Für das zusammengesetzte Objekt gilt $\tilde{e}^* = 2/5$ und $\tilde{\theta} = 4 \cdot 3/5\pi = 12/5\pi \triangleq 2/5\pi$. Die Statistik ist also über die ganze Hierarchie konsistent. Nun noch zu „zusammengesetzten Fermionen“: Wir betrachten n gefüllte Landauniveaus und multipliziert die Wellenfunktion mit einem Faktor $\prod (z_i - z_j)^1$, wobei q gerade ist. Das Ganze wird projiziert in das niedrigsten Landaunivau (effektiv greift sich jedes Teilchen zwei q -Flussquanten. Diese Teilchen müssen sich jedoch nicht im untersten Landauniveau befinden.) und man erhält

$$\psi_\nu = \frac{n}{qn+1} = \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}. \quad (133)$$

Für den Füllfaktor gilt dann

$$\frac{1}{\nu} \approx \frac{N_\phi}{N} = \frac{1}{n} + q = \frac{qn+1}{n}. \quad (134)$$

13 Effektive Feldtheorie

In diesem Zusammenhang handelt es sich um eine klassische Feldtheorie, deren Moden (Felder) die Niederenergie-Anregungen einer mikroskopischen Quantentheorie beschreiben. Was ist die effektive Feldtheorie eines Laughlin-Zustandes? Allgemein gilt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e A_\mu J^\mu, \quad (135)$$

mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, dem Materiestrom J^μ , an den das elektromagnetische Eichfeld koppelt, und die Elektronladung $-e$, wobei $e > 0$. J^μ ist ein Viererstrom, also $J^\mu = (\varrho, \mathbf{J})$ mit der Teilchendichte ϱ und dem Teilchenstrom \mathbf{J} . Das Eichfeld besitzt die Form $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$ und $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$. Der Teilchenstrom folgt aus der Variation der Lagrangedichte bezüglich des Eichfelds:

$$J^\mu = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = \quad (136)$$

Für den Laughlin- $1/m$ -Zustand gilt

$$\varrho = \frac{1}{m} \frac{N_\phi}{\text{Fläche}} = \frac{1}{m} \frac{B}{\phi_0} = \frac{e}{2\pi m} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j, \quad (137)$$

für $i, j=1, 2$ und mit $\phi_0 = hc/e = 2\pi/e$ (wobei $\hbar = c = 1$ und im Allgemeinen $1/m$ durch $1/\nu$ zu ersetzen ist). Läuft der Strom in x -Richtung und erzeugt man das Magnetfeld in y -Richtung, so gilt in dieser Hall-Geometrie

$$J_x = \frac{1}{-e} \sigma_{xy} E_y, \quad E_y = -\partial_y A_0 - \partial_t A_y = -\partial_y \Phi - \partial_t(-A_2), \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{m} \frac{e^2}{\hbar} = \frac{e^2}{2\pi m}, \quad (138)$$

und somit

$$J_1 = \frac{e}{2\pi m} (\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2). \quad (139)$$

Zusammen gilt

$$J^\mu = \frac{e}{2\pi m} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda, \quad (140)$$

für $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$.

13.1 Wiederholung: Chern-Simons-Term

Betrachte eine Theorie mit Erhaltungsstrom $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$.

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda - qa_\mu j^\mu, \quad (141)$$

wobei a_μ ein fiktives Eichfeld und q eine fiktive Ladung ist. Die Bewegungsgleichung lautet hier

$$\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu a_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_\mu} = 0. \quad (142)$$

(Siehe in der klassischen Mechanik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0.) \quad (143)$$

Es ergibt sich dann

$$\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\lambda\nu\mu}\partial_\nu a_\lambda - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda + qj^\mu = 0, \quad (144)$$

also

$$\mu\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda = qj^\mu. \quad (145)$$

Schauen wir uns die ($\mu = 0$)-Komponente an:

$$\mu B_z(x) = q\varrho(x), \quad (146)$$

und damit bindet eine Punktladung q den fiktiven Fluss q/μ . Beim Umkreisen bekommt die Wellenfunktion eine zusätzliche Phase: $|\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle \exp(iq^2/\mu)$. Es liegt hier eine fraktionale Statistik vor mit $\theta = q^2/(2\mu)$. Für $\mu \mapsto \infty$ ist die Statistik bosonisch. Durch Reskalierung $a_\nu \mapsto a_\nu/\sqrt{\mu}$ lässt sich μ im Chern-Simons-Term absorbieren und damit wird der zweite Term mit $q \mapsto q/\sqrt{\mu}$ unterdrückt und es findet eine Entkopplung des Chern-Simons-Terms statt.

13.2 Effektive Theorie des Laughlin-Fluids

Wir benötigen eine effektive Theorie, welche die Anregungen beschreibt und nicht nur den Grundzustand. Addiere den Term

$$\mathcal{L} = \left(-\frac{m}{4\pi}a_\mu + \frac{e}{2\pi}A_\mu\right)\partial_\nu a_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} + la_\mu j^\mu, \quad l = \begin{cases} +1 & \text{für Quasielektronen} \\ -1 & \text{für Quasilöcher} \end{cases}, \quad (147)$$

wobei j^μ der Teilchenstrom der Quasiteilchen ist. a_μ ist ein fiktives Eichfeld, welches die Quasiteilchen beschreibt und diese an das äußere Magnetfeld koppelt. Für den Teilchenstrom ergibt sich

$$J^\mu \equiv \frac{1}{e} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda, \quad (148)$$

und das mutet zunächst seltsam an, weil dieser mit dem fiktiven Eichfeld zusammenhängt. Die Bewegungsgleichung für a_μ lautet:

$$\frac{m}{2\pi}\partial_\nu a_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{e}{2\pi}\partial_\nu A_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - lj^\mu = 0. \quad (149)$$

Einsetzen von (149) in (148) führt auf den Term (140) und einen zusätzlichen Beitrag durch den Strom der Quasiteilchen. Dieser trägt zu dem Strom der Elektronen $\sim 1/m$ bei. Das zeigt, dass die Ladung für die Quasielektronen $1/m$ und für die Quasilöcher $-1/m$ in Einheiten der Elektronladung ist.

$$J^\mu = \frac{e}{2\pi m}\partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{l}{m}j^\mu. \quad (150)$$

Das Quanten-Hall-Fluid nimmt das Originalproblem der Elektronen und bildet ein neues Problem mit Quasiteilchen, welche fraktionale Statistik tragen. Der erste Term beschreibt die elektromagnetische Response in Abwesenheit von Quasiteilchen. Es handelt sich dabei um eine Bedingungen zwischen Teilchendichte und elektrischem Feld. Wenn man einen Strom in eine Richtung anlegt, entsteht ein elektrisches Feld senkrecht dazu

(Füllfaktor $1/m$). Der zweite Term ist der Quasiteilchenstrom, welcher aus Quasiteilchen mit fraktionaler Ladung besteht. Bewegt sich ein Quasielektron von einer Seite des Fluids zur anderen, dann entspricht dies einer Bewegung von einem $1/m$ Elektron, wobei die Bewegung eines Quasiholes der Bewegung von $-1/m$ Elektron entspricht. Die Quasiteilchen besitzen „Ladung“ (Kopplung) l in Bezug auf das fiktive Eichfeld a_μ , welches wir benötigen, um die Niederenergiephysik zu beschreiben. Das Problem induziert sich also auf das nächste Niveau; das a_μ -Feld selbst besitzt keine Dynamik. Ohne A_μ ist die Lagrangedichte ein reiner Chern-Simons-Term, welcher den Fluss $(2\pi/m)e$ an a_μ bindet. Die Teilchen binden einen fraktionalen Fluss an sich und damit sind es auch Teilchen mit fraktionaler Statistik. Die Statistik (also die zusätzliche Phase, welche die Wellenfunktion bei einer Drehung um 180° der Teilchen umeinander bekommt) folgt dann zu

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{m} \cdot l^2 = \frac{\pi}{m}, \quad (151)$$

wegen $l^2 = 1$. (Bewegt man ein Quasielektron um ein Quasiloch, muss der Faktor l^2 durch $l_1 \cdot l_2$ ersetzt werden.)

13.3 Hierarchie der Quanten-Hall-Zustände als effektive Feldtheorie

Hierarchi-Zustände nennt man solche Zustände, bei denen Quasiteilchen selbst in ein p-Laughlin-Fluid kondensieren (wobei p gerade ist). Die Statistik tritt dann im Wesentlichen als Normierungsfaktor bei den Wellenfunktionen auf. Wir wollen die Theorie jedoch ohne Normierungsfaktoren formulieren, weil dies einfacher ist. Wir addieren zu (147) den Term

$$\Delta\mathcal{L} = \left(-\frac{p}{4\pi}\tilde{a}_\mu + \frac{1}{2\pi}a_\mu \right) \partial_\nu \tilde{a}_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \tilde{l}\tilde{a}_\mu \tilde{j}^\mu. \quad (152)$$

Die Bewegungsgleichungen für a_μ und \tilde{a}_μ folgen aus

$$\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu a_\mu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_\mu} = 0, \quad (153)$$

zu

$$\frac{m}{2\pi}\partial_\nu a_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{e}{2\pi}\partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2\pi}\partial_\nu \tilde{a}_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - l j^\mu = 0, \quad (154)$$

$$\frac{1}{2\pi}\partial_\nu \tilde{a}_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2\pi p}\partial_\nu a_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{\tilde{l}}{p}\tilde{j}^\mu = 0. \quad (155)$$

Einsetzen von (155) in (154) liefert

$$\frac{1}{2\pi} \left(m - \frac{1}{p} \right) \partial_\nu a_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{e}{2\pi}\partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - l j^\mu - \frac{\tilde{l}}{p}\tilde{j}^\mu = 0. \quad (156)$$

Einsetzen von (156) in (148) führt auf

$$J^\mu = \frac{e}{2\pi \left(m - \frac{1}{p} \right)} \partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{l}{m - \frac{1}{p}} j^\mu + \frac{\tilde{l}}{mp - 1} \tilde{j}^\mu, \quad (157)$$

woraus sich $\nu = 1/(m - 1/p)$ ergibt, also

$$\nu = \frac{p}{mp - 1} = \begin{cases} 2/5 & \text{für } (m = 3, p = 2)\text{-Quasielektron-Kondensation} \\ 2/7 & \text{für } (m = 3, p = -2)\text{-Quasiloch-Kondensation} \end{cases}. \quad (158)$$

p entspricht αp in Wellenfunktionen. Die Ladung der Quasiteilchen im $(1/m)$ -Fluid beträgt

$$\frac{l}{m - \frac{1}{p}}, \quad l = \begin{cases} +1 & \text{für Quasielektronen} \\ -1 & \text{für Quasilöcher} \end{cases}. \quad (159)$$

Die Ladungen der Anregungen im Elternfluid ist entsprechend dem Füllfaktor. Im $(1/p)$ -Fluid gilt entsprechend für die Ladung der Quasiteilchen

$$\frac{\tilde{l}}{mp - 1}, \quad \tilde{l} = \begin{cases} +1 & \text{für Quasielektronen} \\ -1 & \text{für Quasilöcher} \end{cases}. \quad (160)$$

\tilde{l} sagt aus, welches Vorzeichen die Ladung der inneren Quasiteilchen haben.

13.4 Statistik der Quasiteilchen

Wieviel \tilde{a}_μ -Fluss ist an die \tilde{j}_μ -Quasiteilchen gebunden? Einsetzen von (154) in (155) liefert

$$\frac{1}{2\pi} \left(p - \frac{1}{m} \right) \partial_\nu \tilde{a}_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{e}{2\pi m} \partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{l}{m} j^\mu - \tilde{l} j^\mu = 0. \quad (161)$$

Die $(\mu = 0)$ -Komponente liefert

$$\frac{1}{2\pi} \left(p - \frac{1}{m} \right) \tilde{b}_z - \frac{e}{2\pi m} \tilde{B}_z - \frac{l}{m} j^0 - \tilde{l} j^0 = 0. \quad (162)$$

Es ergibt sich die Statistik

$$\tilde{\theta} = \frac{q^2}{2\mu} = \frac{\tilde{l}^2}{2 \cdot \frac{1}{2\pi} \left(p - \frac{1}{m} \right)} = \frac{\pi m}{pm - 1}. \quad (163)$$

Für $m = 3$, $p = 2$ ($\nu = 2/5$) folgt $\tilde{\theta} = 3\pi/5$. Für die Quasiteilchen im m -Elternfluid folgt aus (156) $\theta = \pi/(m - 1/p)$ und somit $2\pi/5$ für $\nu = 2/5$. Damit gilt also

$$\tilde{\theta}_{\text{Teilchen}} = 4\tilde{\theta} = \frac{12\pi}{5} \triangleq \frac{2\pi}{5} = \theta. \quad (164)$$

13.5 Allgemeine Formulierung der Hierarchie

Die Lagrangedichte kann allgemein in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ} a_{J,\mu} \partial_\nu a_{J,\lambda} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{e}{2\pi} q_I A_\mu \partial_\nu a_{J,\lambda} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} + l_I a_{I,\mu} j^\mu, \quad (165)$$

mit Matrizen

$$K_{IJ} = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & p_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad q_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad l_{I,\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (166)$$

wobei die Zeile in l_I dem Niveau in der Hierarchie entspricht. Das Quasiteilchen, welches ein Compostiojekt ist, wird als Vektor dargestellt. j^μ ist ein Strom, der für verschiedene Teilchen aus verschiedenen Ebenen der Hierarchie zusammengesetzt werden kann. Speziell im vorigen Kapitel hatten wir

$$K_{IJ} = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & p \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Daraus folgt $\nu = q^\top K^{-1} q$ mit der Statistik $\theta_l = \pi l^\top K^{-1} l$ und der Ladung $Q_l = -e q^\top K^{-1} l$. Die Bewegungsgleichung ist eine Matrixgleichung.