Handout zum Übungsblatt Nr.9

Aufgabe 1

a)

Allgemein bedeutet der Zeeman-Effekt eine Auspaltung von Spektrallinien in einem **externen** Magnetfeld. Diese Aufspaltung rührt von der zusätzlichen Energie her, die ein Elektron mit magnetischen Moment $(\boldsymbol{\mu}_j)_j$ im Magnetfeld besitzt, nämlich $\Delta E = -(\boldsymbol{\mu}_j)_j \cdot \mathbf{B}$. Legen wir das Magnetfeld in z-Richtung, so ergibt sich:

$$\Delta E = -(\boldsymbol{\mu}_j)_j \cdot \mathbf{B} = -g_j \frac{mu_B}{\hbar} \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = -g_j \frac{\mu_B}{\hbar} j_z B \,. \tag{1}$$

Damit folgt dann

$$\langle \Delta E \rangle = -g_j \mu_B B \langle j \rangle = -g_j \mu_B B m_j \,. \tag{2}$$

- Normaler Zeeman-Effekt: Elektron besitzt nur ein magnetisches Bahnmoment, also ist $g_j = g_l = 1$. Dann gilt $\langle \Delta E \rangle = -\mu_B B m_l$. Wegen der Auswahl-Regel $\Delta m_l = \{-1, 0, 1\}$ (da das Photon ein Vektorteilchen mit Spin 1 ist) Damit ergeben sich immer drei Spektrallinien (Zeeman-Triplet), welche der Energiedifferenz

  $$\Delta E(\Delta m_l = 1) = \Delta E(n_2 - n_1, l_2 - l_1) + \mu_B B \,, \tag{3a}$$

  $$\Delta E(\Delta m_l = 0) = \Delta E(n_2 - n_1, l_2 - l_1) \,, \tag{3b}$$

  und

  $$\Delta E(\Delta m_l = 1) = \Delta E(n_2 - n_1, l_2 - l_1) - \mu_B B \,. \tag{3c}$$

- Anomaler Zeeman-Effekt: Das Elektron besitzt sowohl magnetisches Bahn- als auch Spinmoment. Damit ist g_j der allgemeine komplizierte Ausdruck, den wir auf dem vorigen Blatt bestimmt haben, und es ergibt sich somit ein reichhaltigeres Aufspaltungsbild.

b)

Beim normalen Zeeman-Effekt spaltet ein Niveau mit $l = 3$ auf in $2l + 1 = 7$ Niveaus, da es genau so viele m_l-Quantenzahlen gibt. Der Energieunterschied zwischen zwei benachbarten Niveaus ($\Delta m_l = 1$) ist $\Delta(\Delta E) = g_l \mu_B B = \mu_B B$.

c)

Beim normalen Zeeman-Effekt spaltet – wie oben bereits erwähnt – jede Spektrallinie in drei Linien auf. Dies gilt auch für den Übergang von $l = 3$ nach $l = 2$. $\Delta m_l = 0$ entspricht der Emission eines Photons mit linearer Polarisation, während $\Delta m_l = \pm 1$ der Emission eines Photons mit zirkularer Polarisation entspricht.

d)

Der Spin des Photon folgt direkt aus der Auswahlregel $\Delta m_l = 0, \pm 1$ für das Zeeman-Triplett. Infolgedessen kann nämlich nur $\Delta l = 1$ sein und damit ist das Photon ein Spin-1-Teilchen (Vektorteilchen).

Aufgabe 2

Die Hyperfeinstruktur hat drei Ursachen:

1) Kopplung des Gesamtdrehimpulses j des Elektrons mit dem Kernspin I.
2) endliche Ausdehnung des Kerns
3) relativistische Bewegung des Elektrons

Die Punkte (1) und (2) unterscheiden sich daher zur Feinstruktur, Punkt (3) ist bei beiden Effekten wichtig.

b)

Die Anzahl der Komponenten ergibt sich aus der Anzahl der möglichen Werte der Quantenzahl F, die sich aus der Kopplung von j und I ergibt. Allgemein sind die Werte $F \in \{j+I, j+I-1, \ldots, |j-I|\}$ möglich.

- ^{3}H($^2s_{1/2}, I = 1/2$): Hier ist $j = 1/2$ und $I = 1/2$, also ist $F \in \{1, 0\}$ und es gibt zwei Komponenten.
- ^{3}H($^2s_{1/2}, I = 1$): Aus $j = 1/2$ und $I = 1$ folgt $F \in \{3/2, 1/2\}$, also auch hier gibt es zwei Komponenten.
- ^{14}N($^4s_{3/2}, I = 1$): Hier gilt $j = 3/2$ und $I = 1$, also $F \in \{5/2, 3/2, 1/2\}$, also gibt es drei Komponenten.
- ^{4}H($^4s_{3/2}, I = 1/2$): Für diese Konfiguration ist $j = 3/2$ und $I = 1/2$. Wegen $F \in \{2, 1\}$ gibt es zwei Komponenten.

c)

Die Hyperfeinstrukturverschiebung ist gegeben durch

$$\Delta E_{\text{Hyperfein}} = \frac{a}{\hbar^2}\langle \mathbf{I} \cdot \mathbf{j} \rangle\,, \quad a = \frac{2\mu_0}{3\pi a_0^3} g_e \mu_B g_p \mu_K \cdot \frac{1}{n^3}\,. \tag{4}$$

Zunächst müssen wir den Erwartungswert des Skalarprodukts $\mathbf{I} \cdot \mathbf{j}$ umschreiben. Mittels

$$F^2 = (j + L)^2 = j^2 + I^2 + 2\mathbf{j} \cdot \mathbf{I}\,, \tag{5}$$

ergibt sich dann:

$$\langle \Delta E_{\text{Hyperfein}} \rangle = \frac{a}{2\hbar^2}(\langle F^2 \rangle - \langle j^2 \rangle - \langle I^2 \rangle) = \frac{a}{2}(F(F+1) - j(j+1) - I(I+1))\,. \tag{6}$$

Der Grundzustand von atomarem Wasserstoff besitzt die Quantenzahlen $j = 1/2$ und $I = 1/2$. Damit sind die Werte $F \in \{1, 0\}$ möglich. Die Hyperfeinaufspaltung, also die Energiedifferenz zwischen $E(F = 1)$ und $E(F = 0)$ ist mit

$$g_e = 2{,}002\,, \quad \mu_K = 5{,}051 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Am}^2\,, \quad \mu_B = 9{,}274 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2\,, \tag{7a}$$

$$a_0 = 5{,}292 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\,, \quad \mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,, \tag{7b}$$

gegeben durch:

$$\Delta(\Delta E_{\text{Hyperfein}}) \approx 1{,}47 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV} - (-4{,}41 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}) = 5{,}88 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}\,. \tag{8}$$

Mittels $E = h\nu$ und $\lambda = c/\nu$ folgt zusätzlich

$$\Delta(\Delta\nu_{\text{Hyperfein}}) \approx 1{,}42 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz}\,, \quad \Delta(\Delta\lambda_{\text{Hyperfein}}) = 21{,}1\,\mathrm{cm}\,. \tag{9}$$

Zusätzlich können wir mit $a = 5{,}88 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}$ die Intervallregel

$$\Delta E_{F=1} - \Delta E_{F=0} = a\,, \tag{10}$$

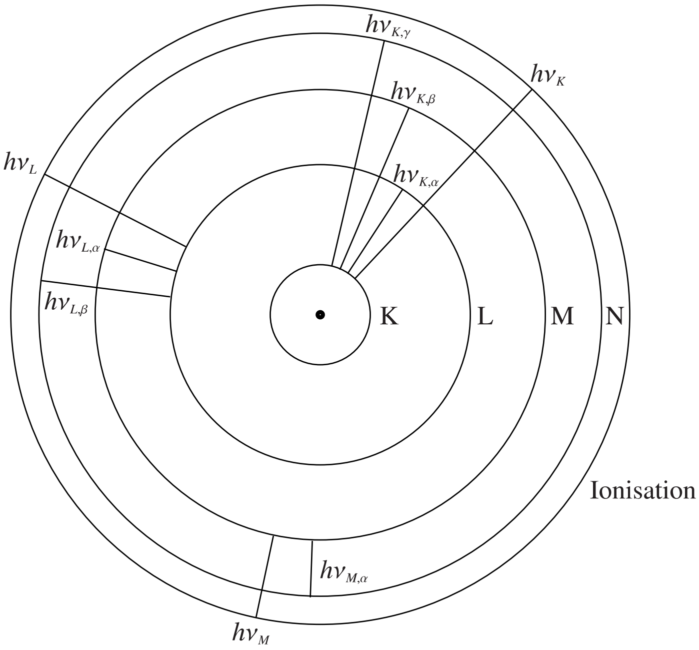
(für $F = 0$) bestätigen.

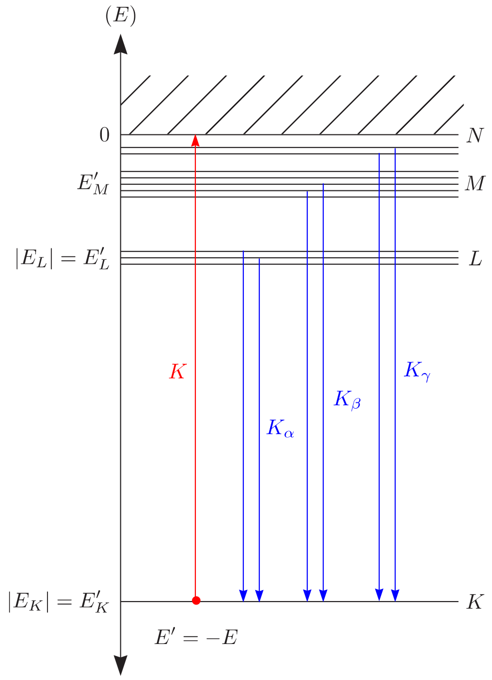
Aufgabe 3

Beim Beschuss einer Elektrode mit Elektronen nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung U entsteht Röntgenlicht. Dieses lässt sich spektral zerlegen (beispielsweise nach Frequenzen) und man erhält dabei:

1) das kontinuierliche Röntgen-Bremsspektrum als Folge der Ablenkung von Elektronen im Coulomb-Feld von Atomkernen
2) und ein Spektrum diskreter Linien – das sogenannte charakteristische Spektrum.

In dieser Aufgabe interessieren wir uns nur für das charakteristische Spektrum. Dieses zeichnet sich durch viele Gruppen von Linien aus, wobei die Linien innerhalb einer Gruppe nahe beieinander liegen und gegen eine Grenzfrequenz (die „Kante“) konvergieren. Die Gruppen werden der Reihe nach mit den Buchstaben K, L, M, N usw. und die einzelnen Linien einer Gruppe mit griechischen Buchstaben α, β, γ usw. bezeichnet. Man kann sich diese am einfachsten am Bohrschen Atommodell erklären:





Die einzelnen Linien entsprechen den Übergängen zwischen verschiedenen Schalen. Die Kante entspricht der Ionisierungsenergie bezüglich einer Schale. Dabei gibt es folgende Unterschiede zum Wasserstoffatom:

a) Die Elektrode besteht typischerweise aus einem Metall (beispielsweise Wolfram) mit einer komplizierten Elektronenkonfiguration. Solche Atome lassen sich quantenmechanisch im Rahmen des Schrödingermodells nicht analytisch behandeln (numerisch oder mit Näherungsmethoden).

b) Infolge der Kernladungszahl werden die Energieniveaus erhöht und liegen jetzt nicht mehr im Sichtbaren, sondern im Röntgenbereich.

c) Durch innere Elektronen wird ein Teil der Kernladung abgeschirmt.

a)

Die Linien der Kanten des charakteristischen Röntgenspektrums erfüllen die Proportionalität $\sqrt{h\nu_{\text{Kante}}} \sim Z - s$ (Moseley-Geraden), mit einer Konstanten s, welche die Abschirmung durch die inneren Elektronen beschreibt. Damit man alle Linien einer jeweiligen Serie erhält, muss die Energie, welche der Kante entspricht, aufgewendet werden. Es handelt sich dabei um die Ionisierungsenergie bezüglich einer jeweiligen Schale im Bohrschen Atommodell. Speziell für die K-Serie von Wolfram gilt mit $Z = 74$:

$$E_K = hcR_\infty (Z-1)^2 = 13{,}61\,\text{eV} \cdot 73^2 \approx 72{,}5\,\text{keV}\,. \tag{11}$$

b)

Das Termschema ergibt sich aus den in (a) angegebenen Wellenlängen mit $E = h\nu/\lambda$:

$$E_K = 69{,}7\,\text{keV}\,,\quad E_{K,\alpha} = 59{,}1\,\text{keV}\,,\quad E_{K,\beta} = 67{,}4\,\text{keV}\,,\quad E_{K,\gamma} = 69{,}3\,\text{keV}\,. \tag{12}$$

c)

Die L-Schale ist die energetisch höhere Schale, welche direkt auf die K-Schale folgt. Um die Energie der L-Kante zur erhalten, muss von der Energie der K-Kante die Energiedifferenz zwischen der L- und K-Schale abgezogen werden (siehe dazu obiges Bild):

$$E_L = E_K - E_{K,\alpha} = 10{,}4\,\text{keV}\,. \tag{13}$$

Analog ergibt sich die Energie der L_α-Linie zu

$$E_{L,\alpha} = E_{K,\beta} - E_{K,\alpha} = 8,3\,\mathrm{keV}\,. \tag{14}$$

d)

Die Energie wird dann frei, wenn ein Elektron aus der K-Schale entfernt wird und eines aus der P-Schale das entstandene Loch in der K-Schale auffüllt. Das Elektron in der P-Schale sieht nur eine effektive Kernladung $Z_{\text{eff}} = 74 - 72 = 2$, da alle verbleibenden Elektronen (bis auf das betrachtete Elektron in der P-Schale selbst) die Kernladung abschirmen. Mit $n = 6$ ist die Energie des Elektrons in der P-Schale gegeben durch

$$E_P = -hc\frac{R_\infty Z_{\text{eff}}^2}{n^2} = -\frac{4}{36}R_\infty \approx -6,04\,\mathrm{eV}\,. \tag{15}$$

Die Energie des Übergangs von der P- zur K-Schale ist dann

$$\Delta E = E_P - E_K = 69,5\,\mathrm{keV} - 6,04\,\mathrm{eV} \approx 69,5\,\mathrm{keV}\,, \tag{16}$$

und entspricht damit im Großen und Ganzen der Energie der K-Kante. Die zugehörige Wellenlänge folgt aus $\lambda = hc/E$ zu $1,79 \cdot 10^{-11}$ m.

e)

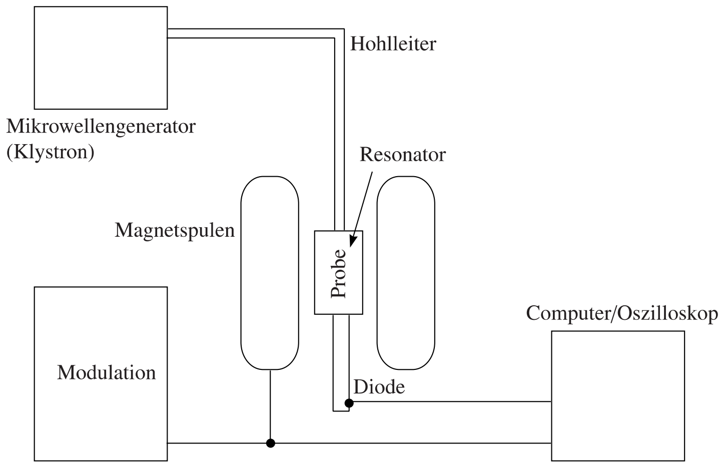
Die freiwerdende Energie der L_α-Linie kann dazu genutzt werden, ein Elektron aus dem Atom herauszuschlagen. Ein solches Elektron bezeichnet man als Auger-Elektron (und den physikalischen Effekt als Auger-Effekt). Ein P-Elektron ist am schwächsten gebunden, hat also, nachdem es vom Atom getrennt wurde, die größte kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = E_{L,\alpha} - |E_P| = 8,3\,\mathrm{keV} - 6,04\,\mathrm{eV} \approx 8,3\,\mathrm{keV}\,, \tag{17}$$

also kommt es auf die Bindungsenergie $|E_P|$ fast wieder nicht an.

Aufgabe 4

Schematischer Aufbau eines ESR-Spektrometers:



Mittels der ESR-Resonanz (Elektronenspin-Resonanz) werden Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus, welche durch die Quantenzahl m charakterisiert sind, angeregt. Besitzt beispielsweise ein Atom nur das (durch ein Elektron) verursache magnetisches Spinmoment, so spaltet ein Energieniveau E_0 in einem äußeren Magnetfeld B durch den (anomalen) Zeeman-Effekt in zwei Niveaus auf:

$$E_1 = E_0 + g_s\mu_B B m_s\,, \quad E_2 = E_0 - g_s\mu_B B m_s\,, \tag{18}$$

mit $m_s = 1/2$ und $g_s \approx 2,002$. Die Energiedifferenz zwischen beiden Niveaus entspricht der sogenannten Larmorfrequenz:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = g_s\mu_B B = h\nu_{\text{Larmor}} = \hbar\omega_{\text{Larmor}}\,. \tag{19}$$

Durch ein zweites magnetisches Wechselfeld (beispielsweise von der Form $B_1\cos(\omega t)$) kann der Übergang zwischen beiden Niveaus angeregt werden, sofern ω der Larmorfrequenz entspricht.