

VERSCHIEDENES ZUM ÜBUNGSBLATT NR.7

Aufgabe 1

a.)

Wir betrachten ein freies Materieteilchen der Masse m mit der Dispersionsrelation

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1)$$

Die Teilchen sind auf das Volumen V beschränkt. Daraus ergibt sich eine Quantelung von \mathbf{k} . Für ein makroskopisches Volumen werden die \mathbf{k} -Werte jedoch quasi wieder kontinuierlich (siehe Übungsblatt 6).

- Bosonen: Zunächst seien die Materieteilchen Bosonen, also Teilchen mit ganzzahligen Spin. Nach dem Spin-Statistik-Theorem genügen solche Teilchen der Bose-Einstein-Statistik; werden also durch eine symmetrisierte Wellenfunktion beschrieben. Charakteristisch für Bosonen ist, dass sich beliebig viele in einem einzelnen Energiezustand $\varepsilon(\mathbf{k})$ aufhalten können. Zur Beschreibung der Mikrozustände ist es am Geschicktesten, die Besetzungszahldarstellung zu verwenden. Ein Mikrozustand ist dann durch die Anzahl $n_{\mathbf{k}_1}$ der Bosonen mit der Energie $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$ bestimmt:

$$\{\alpha\} = \{n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, n_{\mathbf{k}_3}, \dots, n_{\mathbf{k}_i}, \dots\}, \quad n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2)$$

Die letzte Bedingung $n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ darf man natürlich nicht zu wörtlich nehmen. Da die Anzahl der Teilchen beschränkt ist, kann sicher auch die Besetzungszahl eines Zustands nicht größer als die Anzahl der Teilchen sein. Bei makroskopischen Systemen ist jedoch die Teilchenzahl sehr groß (in der Größenordnung der Avogadro-Konstanten $6 \cdot 10^{23}$) und deshalb können wir die maximalen Besetzungszahlen praktisch gegen Unendlich gehen lassen.

Die Teilchenzahl n_α eines Mikrozustandes $\{\alpha\}$ ist die Summe der einzelnen Besetzungszahlen

$$N_\alpha = n_{\mathbf{k}_1} + n_{\mathbf{k}_2} + \dots = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}. \quad (3)$$

Die Energie E_α eines Mikrozustandes $\{\alpha\}$ ist dann gegeben durch

$$E_\alpha = \varepsilon(\mathbf{k}_1)n_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon(\mathbf{k}_2)n_{\mathbf{k}_2} + \dots = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k})n_{\mathbf{k}}, \quad (4)$$

was im Wesentlichen die Summe der Energien aller Teilchen ist. Das System ist an ein Wärme- und Teilchenbad gekoppelt, also haben wir die großkanonische Zustandssumme zu berechnen:

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{\{\alpha\}} \exp(-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)) = \sum_{n_{\mathbf{k}_1}=0}^{\infty} \sum_{n_{\mathbf{k}_2}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{\mathbf{k}_i}=0}^{\infty} \dots \exp\left(-\beta \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)n_{\mathbf{k}}\right) = \\ &= \sum_{n_{\mathbf{k}_1}=0}^{\infty} \sum_{n_{\mathbf{k}_2}=0}^{\infty} \dots \exp\left(-\beta \sum_{\mathbf{k}=1}^{i-1} (\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)n_{\mathbf{k}}\right) \\ &\quad \sum_{n_{\mathbf{k}_i}=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}_i) - \mu)n_{\mathbf{k}_i}) \sum_{n_{\mathbf{k}_{i+1}}=0}^{\infty} \dots \exp\left(-\beta \sum_{\mathbf{k}=i+1} (\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)n_{\mathbf{k}}\right) = \\ &= \left\{ \sum_{n_{\mathbf{k}_1}=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \mu)n_{\mathbf{k}_1}) \right\} \left\{ \sum_{n_{\mathbf{k}_2}=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}_2) - \mu)n_{\mathbf{k}_2}) \right\} \times \dots \\ &\quad \dots \times \left\{ \sum_{n_{\mathbf{k}_i}=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}_i) - \mu)n_{\mathbf{k}_i}) \right\} \dots = \\ &= \prod_{\mathbf{k}} \left\{ \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)n_{\mathbf{k}}) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Summe in der geschweiften Klammer ist wiederum nichts anderes als der Grenzwert der geometrischen Reihe. Dies führt dann auf

$$Z_G = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu))}. \quad (6)$$

Da die freie Enthalpie über den Logarithmus der Zustandssumme Z_G gegeben ist, benötigen wir noch den Logarithmus von (6). Der Logarithmus des Produkts geht hierbei über in eine Summe aus Logarithmen:

$$\ln(Z_G) = - \sum_{\mathbf{k}} \ln [1 - \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu))]. \quad (7)$$

Die innere Energie ist als großkanonischer Erwartungswert gegeben durch

$$U = \langle E \rangle = \frac{1}{Z_G} \sum_{\{\alpha\}} E_{\alpha} \exp(-\beta(E_{\alpha} - \mu N_{\alpha})), \quad (8)$$

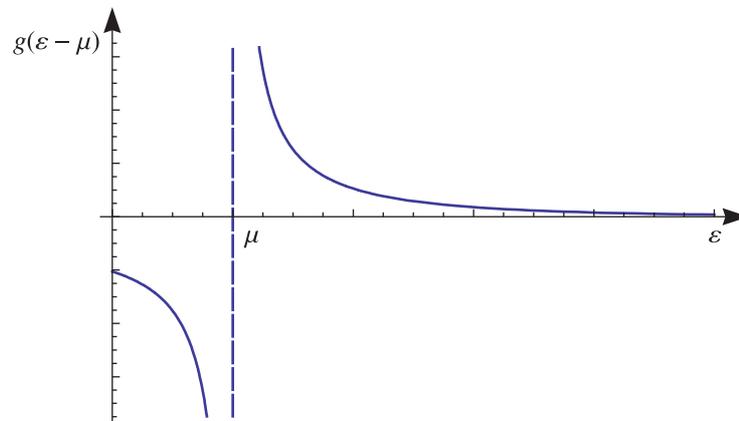
und kann aus der Zustandssumme selbst abgeleitet werden, wenn man β und $\beta\mu$ als voneinander unabhängige Variablen betrachtet (siehe Übungsblatt 5):

$$\langle E \rangle = - \frac{1}{Z_G} \left(\frac{\partial Z_G}{\partial \beta} \right)_{\beta\mu} = - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z_G) \right)_{\beta\mu}. \quad (9)$$

Damit gilt dann:

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)) - 1} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu). \quad (10)$$

Die Energie folgt als Summe über die Energie $\varepsilon(\mathbf{k})$ eines einzelnen Zustands mit Wellenvektor \mathbf{k} , welcher mit der Bose-Verteilungsfunktion $g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)$ gewichtet ist. Die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion ist der Erwartungswert von $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ und gibt also die mittlere Besetzungszahl des Zustands \mathbf{k} an.



Auch die mittlere Teilchenzahl ergibt sich aus den Überlegungen von Übungsblatt 5 direkt aus der Zustandssumme:

$$\begin{aligned} N = \langle N \rangle &= \frac{1}{Z_G} \sum_{\{\alpha\}} N_{\alpha} \exp(-\beta(E_{\alpha} - \mu N_{\alpha})) = \frac{1}{Z_G} \left. \frac{\partial Z_G}{\partial(\beta\mu)} \right|_{\beta} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)} \ln(Z_G) \right|_{\beta} = \sum_{\mathbf{k}} g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Es werden also alle mittleren Besetzungszahlen (gegeben durch die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion $g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)$) aufsummiert. Die Bose-Einstein-Funktion besitzt für $\varepsilon = \mu$ einen Pol; es sind alle vor allem die Zustände nahe bei $\varepsilon = \mu$ besetzt und die Besetzung von Zuständen mit hoher Energie nimmt schnell ab. Da $g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu) < 0$ für $\varepsilon < \mu$ können keine Zustände mit $\varepsilon < \mu$ besetzt werden. Dies hat mit der Bildung des Bose-Einstein-Kondensats zu tun, worauf wir jetzt jedoch nicht näher eingehen wollen.

- Fermionen: Nun noch das Ganze für Fermionen, wobei wir hier die Rechnung abkürzen werden ;-). Die Mikrozustände geben wir erneut in der Besetzungszahldarstellung an. Der entscheidende Unterschied zu Bosonen ist hier jedoch, dass aufgrund des Pauli-Prinzips sich höchstens ein Fermion in einem Zustand befinden kann:

$$\{\alpha\} = \{n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_i}, \dots\}, \quad n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots \in \{0, 1\}. \quad (12)$$

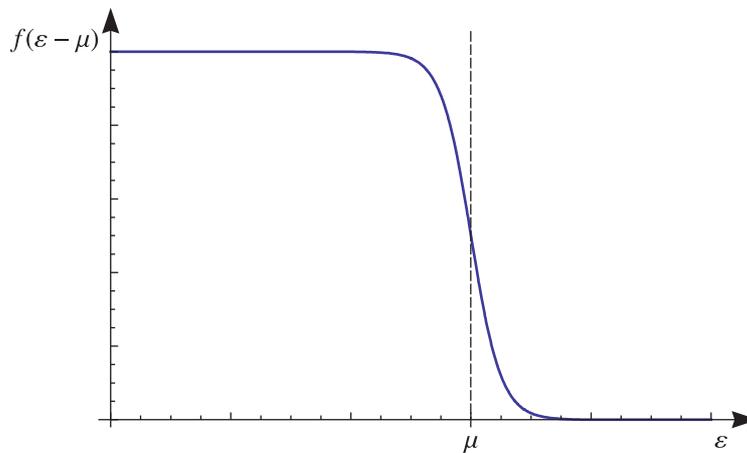
Dann ist die großkanonische Zustandssumme gegeben durch:

$$Z_G = \prod_{\mathbf{k}} \left\{ \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^1 \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)) n_{\mathbf{k}} \right\} = \prod_{\mathbf{k}} \{1 + \exp(-\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu))\}. \quad (13)$$

Energie und Teilchenzahl wird analog zu den Bosonen berechnet:

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)) + 1} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) f(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu). \quad (14)$$

Der einzige, aber wesentliche, Unterschied ist, dass anstelle der Bose-Einstein-Funktion $g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)$ die Fermi-Dirac-Funktion $f(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)$ auftaucht. Die Fermi-Dirac-Funktion gibt die mittlere Besetzungszahl von Fermionen an.



Die Fermi-Dirac-Funktion nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an, worin sich das Pauli-Prinzip widerspiegelt. Anders als bei Bosonen stellt eine Besetzung von Zuständen mit $\varepsilon < \mu$ kein Problem dar. Für $T = 0$ geht $f(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)$ in die Heavisidsche Sprungfunktion $\theta(\varepsilon - \mu(T = 0))$ über (wobei $\mu(T = 0) = \varepsilon_F$, siehe dazu Aufgabe 2) über. Dann sind alle Zustände bis zur Fermienergie ε_F besetzt und oberhalb von ε_F keine mehr. Für große Temperaturen wird die Fermifunktion sehr flach und der Übergang von der Besetzungszahl 1 nach 0 ist sehr ausgewaschen.

Aufgabe 2

Wir gehen von der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion

$$\bar{n}_{\mathbf{x}, \mathbf{p}; s_z} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; s_z) - \mu}{k_B T}\right) + 1}, \quad (15)$$

mit der Energie $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; s_z)$, welche von der zweidimensionalen Ortskoordinaten $\mathbf{x} = (x, y)$, der zweidimensionalen Impulskoordinaten $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ und der Spinquantenzahl s_z abhängt. \mathbf{x} und \mathbf{p} sind kontinuierliche Variablen; die Quantenzahl s_z nimmt die $(2s + 1)$ kontinuierlichen Werte $\{-s, -s + 1, \dots, s - 1, s\}$ an, wenn s der Spin des Teilchens ist. $\bar{n}_{\mathbf{x}, \mathbf{p}; s_z}$ gibt die mittlere Besetzungszahl eines Zustandes an, der durch \mathbf{x} , \mathbf{p} und s_z charakterisiert ist. Integriert bzw. summiert man alle möglichen Besetzungszahlen auf, so resultiert hieraus die Gesamtzahl an Teilchen. Hierbei sind über die kontinuierlichen Variablen \mathbf{x} und \mathbf{p} zu integrieren und über die diskrete Quantenzahl s_z zu summieren:

$$\bar{N} = \frac{1}{h^2} \sum_{s_z=-s}^s \int d^2x \int d^2p \bar{n}_{\mathbf{x}, \mathbf{p}; s_z}. \quad (16)$$

h ist das Plancksche Wirkungsquantum, welches den Ausdruck dimensionslos macht. Hier möchten wir nun ein freies zweidimensionales Fermigas mit der Dispersionsrelation

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}, \quad (17)$$

betrachten. Die Energie und damit auch die Verteilungsfunktion hängen hier also weder von der Ortskoordinaten \mathbf{x} noch von der Quantenzahl s_z ab (Orts- und Spinartung). Damit liefert die Summe über s_z einen Faktor $2s + 1$ und das Integral über \mathbf{x} liefert die Fläche A im Ortsraum, in der sich das zweidimensionale Elektronengas aufhält. Damit gilt also:

$$\bar{N} = \frac{(2s+1)A}{h^2} \int d^2p \bar{n}_{\mathbf{p}} = \frac{(2s+1)A}{h^2} \int d^2p \frac{1}{\exp\left(\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{k_B T}\right) + 1}. \quad (18)$$

Da die Dispersionsrelation isotrop ist, also nicht von irgendwelchen Winkeln abhängt, sondern nur vom Betrag des Impulsvektors \mathbf{p} , ist es geschickt, das Integral in Polarkoordinaten zu berechnen. Dies führt dann auf

$$\bar{N} = \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} \int_0^\infty dp \frac{p}{\exp\left(\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{k_B T}\right) + 1}. \quad (19)$$

Zur Berechnung des verbleibenden Integrals substituiert man am Besten das Argument der Exponentialfunktion:

$$z = \frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{k_B T}, \quad dz = \frac{p dp}{mk_B T}, \quad (20)$$

was dann auf folgendes Zwischenergebnis führt:

$$\bar{N} = \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} mk_B T \int_{-\mu/(k_B T)}^{+\infty} \frac{dz}{\exp(z) + 1}. \quad (21)$$

Das Integral dieser Form löst man am Besten mit der Substitution $\exp(z) = t$, also:

$$\int_b^a \frac{dz}{\exp(z) + 1} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) \Big|_{t_a}^{t_b} = \ln\left(\frac{\exp(z)}{\exp(z)+1}\right) \Big|_a^b, \quad (22)$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} mk_B T \ln\left(\frac{\exp(z)}{\exp(z)+1}\right) \Big|_{-\mu/(k_B T)}^{\infty} = \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} mk_B T \ln\left\{\frac{\exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) + 1}{\exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right)}\right\} = \\ &= \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} mk_B T \ln\left\{1 + \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Teilchenzahl hängt sicherlich nicht von der Temperatur ab. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \bar{N}(T) &= \bar{N}(T=0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} mk_B T \ln\left\{\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)\right\} = \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} m\mu(T=0) = \\ &= \frac{2\pi(2s+1)A}{h^2} m\varepsilon_F, \end{aligned} \quad (24)$$

mit der Fermienergie ε_F , welche dem chemischen Potential am Temperaturnullpunkt entspricht. Aus $\bar{N}(T) = \bar{N}(T=0)$ folgt also

$$\varepsilon_F = k_B T \ln\left\{1 + \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)\right\}, \quad (25)$$

und durch Auflösen nach μ ergibt sich das chemische Potential in Abhängigkeit von der Temperatur:

$$\mu(T) = k_B T \ln \left\{ \exp \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) - 1 \right\}. \quad (26)$$

μ verschwindet bei $\varepsilon_F = k_B T \ln(2)$; dies entspricht einer Temperatur von

$$T(\mu = 0) = \frac{\varepsilon_F}{k_B \ln(2)}. \quad (27)$$

Wir möchten nun den Ausdruck für $k_B T \ll \varepsilon_F$ bzw. für $k_B T \gg \varepsilon_F$ betrachten:

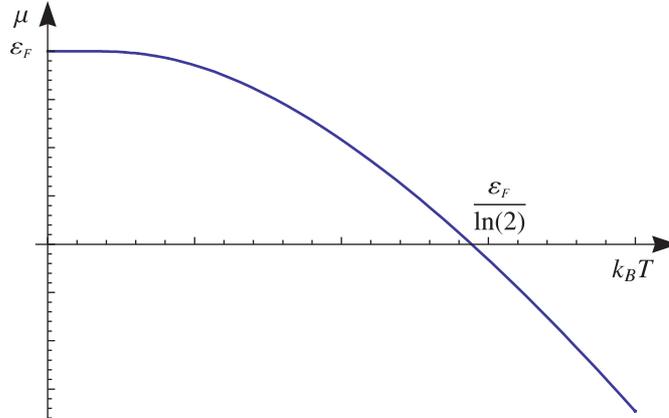
- $k_B T \ll \varepsilon_F$: Wir schreiben das Argument im Logarithmus so um, dass wir diesen entwickeln können (im Prinzip hatten wir diesen Ausdruck schon vorher):

$$\begin{aligned} \mu(T) &= k_B T \ln \left\{ \exp \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) - 1 \right\} = k_B T \ln \left\{ \exp \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) \right] \right\} = \\ &= k_B T \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} + \ln \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) \right\} \right) \approx \varepsilon_F - k_B T \exp \left(-\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

- $k_B T \gg \varepsilon_F$: Dann wird das Argument in der Exponentialfunktion selbst klein und wir können diese entwickeln:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= k_B T \ln \left\{ \exp \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) - 1 \right\} \approx k_B T \ln \left\{ \frac{\varepsilon_F}{k_B T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right)^2 + \dots \right\} \approx \\ &\approx -k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Die Funktion $\mu(k_B T)$ sieht im Wesentlichen wie folgt aus:



Das chemische Potential ist ja nichts anderes als die Ableitung der Gibbschen Enthalpie nach der Teilchenzahl N :

$$\mu = \frac{\partial G}{\partial N}. \quad (30)$$

Die Nullstelle $\varepsilon_F / \ln(2)$ von $\mu(k_B T)$ bedeutet, dass dort G ein Extremum besitzt. Handelt es sich um ein Minimum, so wird das Fermigas diesen Punkt bevorzugen. Für $k_B T < \varepsilon_F / \ln(2)$ ist das chemische Potential als Ableitung von G positiv. Dies bedeutet, dass G sich erhöht, wenn die Anzahl der Teilchen vergrößert wird. Im Falle des entarteten Fermigas (für $k_B T \ll \varepsilon_F$) bevorzugt das Gas eher eine abnehmende Teilchenzahl, weil sich dann auch G verringert. Dies hat mit dem für kleine Temperaturen wichtig werdenden Paulidruck zu tun, der nur beim Fermigas auftritt, und die Teilchen auseinander treibt. Für $k_B T > \varepsilon_F / \ln(2)$ ist $\mu(k_B T)$ negativ und damit auch die Ableitung von G . Die Gibbsche Enthalpie nimmt dann also ab, wenn sich die Teilchenzahl erhöht; das Fermigas bevorzugt also bei hohen Temperaturen eine Erhöhung der Teilchenzahl.

Aufgabe 3

c.)

Anmerkung: Das Ergebnis für die Entropie

$$S = \gamma T + \mathcal{O}(T^3/\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}), \quad (31)$$

bzw. für die Wärmekapazität

$$C_V(T, V, N) = \frac{\pi^2}{2} n(T=0) V k_B \frac{k_B T}{\varepsilon_F}, \quad (32)$$

ist erneut im Einklang mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik!

d.)

Der Druck des Fermigases kann aus dem großkanonischen Potential gewonnen werden:

$$P = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial V} \right|_{T, \mu}. \quad (33)$$

Mittels des angegebenen Ausdrucks für das entartete Fermigas (für $k_B T \ll \varepsilon_F$)

$$\Omega(T, V, \mu) = -(2s+1)V \left[b(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \mathcal{N}(\mu) + \dots \right], \quad (34)$$

ergibt sich dann der Druck bei verschwindender Temperatur:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} P &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ (2s+1)b(\mu) + (2s+1) \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \mathcal{N}(\mu) + (2s+1)V \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{\partial \mathcal{N}(\mu)}{\partial V} \right\} = \\ &= (2s+1)b(\mu). \end{aligned} \quad (35)$$

Es ist also $b(\mu)$ zu berechnen und dazu benötigen wir aber zunächst $a(\varepsilon)$. Die zu berechnenden Integrale sind aus der Vorlesung bekannt und ebenso die Zustandsdichte (vom letzten Übungsblatt):

$$a(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' \mathcal{N}(\varepsilon') = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon' \theta(\varepsilon') C_3 \sqrt{\varepsilon'} = \frac{2}{3} C_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \theta(\varepsilon). \quad (36)$$

Die Teilchendichte kann immer als Integral über die Zustandsdichte (mit zusätzlicher Spinsummutation) geschrieben werden:

$$n(T=0) = \frac{N(T=0)}{V} = (2s+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (37)$$

und die Berechnung dieses Integrals liefert dasselbe Ergebnis wie (36). Also gilt:

$$a(\varepsilon) = \frac{2}{3} C_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \theta(\varepsilon) = \frac{N(T=0)}{V(2s+1)}. \quad (38)$$

Das zweite Integral ist nun nicht mehr schwer und wir schreiben das Ergebnis dann mit Hilfe von (38):

$$b(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon' a(\varepsilon') = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} C_3 \mu^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{N(T=0)}{(2s+1)V} \mu = \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{2 N k_B T_F}{5 V}, \quad (39)$$

wobei wir $\mu(T=0) = \varepsilon_F = k_B T_F$ verwendet haben. Damit gilt für den Druck am Temperaturnullpunkt:

$$\boxed{P = \frac{2 N k_B T}{5 V}}. \quad (40)$$

Das Fermigas besitzt also (anders als das Bosegas oder das klassische Maxwell-Boltzmann-Gas) bei Temperatur $T=0$ einen nichtverschwindenden Druck, den man als Paulidruck bezeichnet. Bei sehr niedrigen Temperaturen kommt das Quantenverhalten der Teilchen zum Tragen, also ob es sich um Bosonen oder Fermionen handelt. Der Paulidruck ist eine Folge des Pauliprinzip und der Heisenbergschen Unschärferelation. Er sorgt beispielsweise dafür, dass sich zwei makroskopische Körper gegenseitig nicht durchdringen können. Außerdem ist er in Sternen wichtig, wo er dafür sorgt, dass diese aufgrund ihrer eigenen Schwerkraft nicht in sich zusammenfallen.