

VERSCHIEDENES ZUM ÜBUNGSBLATT NR.8

Aufgabe 1

a.)

Die Teilchenzahl lässt sich über die Zustandsdichte und mittels der Bose-Einstein-Funktion $g(\varepsilon - \mu)$ berechnen:

$$N(T, V, \mu) = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu). \quad (1)$$

Die Zustandsdichte in drei Dimensionen haben wir auf Blatt 6 berechnet zu

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = C_3 \sqrt{\varepsilon} \theta(\varepsilon), \quad C_3 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2)$$

und die Bose-Einstein-Funktion lautet

$$g(\varepsilon - \mu) = \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (3)$$

mit dem chemischen Potential μ . Einsetzen liefert folgendes Integral:

$$N(T, V, \mu) = VC_3 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} d\varepsilon. \quad (4)$$

Dieses ist in der allgemeinen Form nicht so einfach zu berechnen. Deshalb betrachtet man am Besten verschiedene Grenzfälle. Wie in der Aufgabe angegeben, sei $-\mu \gg k_B T$, was laut der Aufgabe hohen Temperaturen entspricht. Natürlich wissen wir zu Anfang der Rechnung nicht, ob diese Bedingung tatsächlich erfüllt ist; wir müssen dies also am Endergebnis prüfen! Für $-\mu \gg k_B T$ wird die Exponentialfunktion im Nenner der Bose-Einstein-Funktion groß und wir können die zusätzliche -1 im Nenner vernachlässigen:

$$\frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} \approx \exp(-\beta(\varepsilon - \mu)). \quad (5)$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} N(T, V, \mu) &\approx VC_3 \int_0^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \exp(-\beta(\varepsilon - \mu)) = VC_3 \exp(\beta\mu) \int_0^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \exp(-\beta\varepsilon) = \\ &= VC_3 \exp(\beta\mu) \beta^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} \exp(-x). \end{aligned} \quad (6)$$

Mit der Definition der Γ -Funktion

$$\int_0^{\infty} dx x^n \exp(-x) = \Gamma(n + 1), \quad (7)$$

ergibt sich dann:

$$N(T, V, \mu) = VC_3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp(\beta\mu), \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$

Mit

$$C_3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (9)$$

können wir die $N(T, V, \mu)$ nach μ auflösen:

$$N(T, V, \mu) = V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(\beta\mu) \Rightarrow \boxed{\mu = -k_B T \ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}}. \quad (10)$$

Daraus lässt sich also das Verhalten $\mu(T) \sim -k_B T \ln(T)$ ablesen und damit gilt $-\mu = k_B T \ln(T) \gg k_B T$ für $T \mapsto \infty$. Damit ist die Bedingung $-\mu \gg k_B T$ für hohe Temperaturen erfüllt und die Rechnung ist selbstkonsistent. Wäre dies nicht der Fall, so wäre die zunächst angenommene Bedingung $-\mu \gg k_B T$ hinfällig, da sich das Ergebnis und diese Annahme widersprechen würden. Dies ist aber hier glücklicherweise nicht der Fall.

Kommen wir nun zur inneren Energie. Auch diese kann über die Zustandsdichte wie folgt berechnet werden, wobei wir jetzt auch ohne Bedenken annehmen können, dass $-\mu \gg k_B T$:-)

$$\begin{aligned} U &= V \int d\varepsilon \varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu) = VC_3 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} \approx VC_3 \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\frac{3}{2}} \exp(-\beta(\varepsilon - \mu)) = \\ &= VC_3 \exp(\beta\mu) \beta^{-\frac{5}{2}} \int_0^\infty dx x^{\frac{3}{2}} \exp(-x) = VC_3 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (k_B T)^{\frac{5}{2}} \exp(\beta\mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Verwenden wir $\Gamma(5/2) = 3/2\Gamma(3/2)$, können wir hier das berechnete Ergebnis für $N(T, V, \mu)$ einsetzen und erhalten schließlich:

$$\boxed{U = \frac{3}{2} N k_B T}, \quad (12)$$

und weiter für die Wärmekapazität

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \boxed{\frac{3}{2} N k_B}. \quad (13)$$

Das Bosegas nähert sich für hohe Temperaturen als dem Verhalten des idealen Gases an. Bei hohen Temperatur werden nämlich die Quanteneigenschaften, also die Heisenbergsche Unschärferelation und die Quantenstatistik immer unwichtiger. Es werden dann vor allem Zustände mit hohen Quantenzahlen besetzt und nach dem Korrespondenzprinzip geht die Quantenmechanik für hohe Quantenzahlen in die klassische Mechanik über, also in diesem Falle das Quantengas in das klassische Gas.

b.)

Wie wir schon gesehen haben, ist die Teilchenzahl über die Zustandsdichte und die Bose-Einstein-Funktion gegeben:

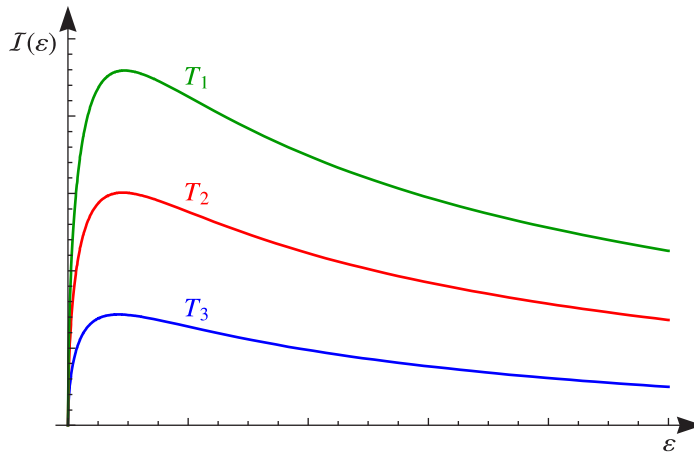
$$N(T, V, \mu) = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu). \quad (14)$$

Die mittlere Besetzung eines Ein-Teilchen-Zustandes der Energie $\varepsilon(\mathbf{k})$ ist gerade gegeben durch die Bose-Stein-Funktion selbst:

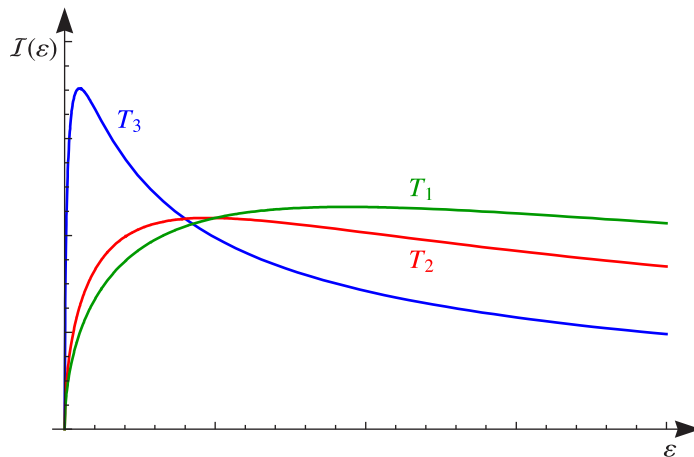
$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{Z_G} \sum_{\{\alpha\}} n_{\mathbf{k}}(\alpha) \exp(-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)) = g(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu). \quad (15)$$

Die mittlere Besetzung $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ muss für ein physikalisches System ≥ 0 sein; negative Besetzungszahlen machen ja keinen Sinn. Damit sollte $g(\varepsilon - \mu) \geq 0$ sein und zwar für physikalisch zugängliche Energien $\varepsilon \geq 0$. Somit muss sich der Pol der Bose-Einstein-Funktion, an welchem $g(\varepsilon - \mu)$ einen Vorzeichenwechsel macht, bei $\varepsilon \leq 0$ liegen und damit kann das chemische Potential μ nur negative Werte annehmen oder verschwinden.

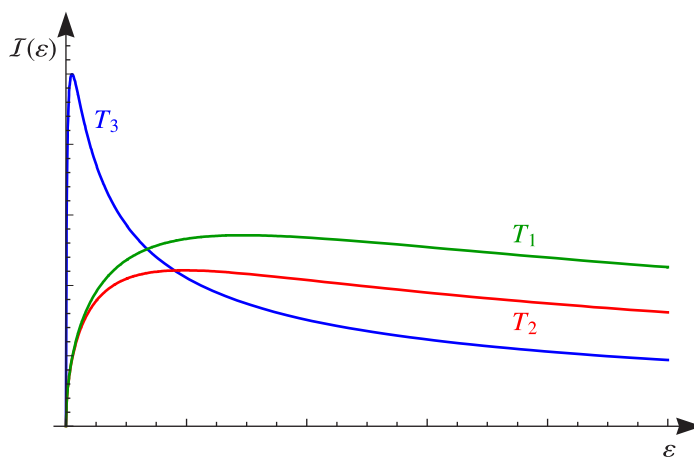
Um uns die Teilchenzahl in Abhängigkeit der Temperatur anzuschauen, betrachten wir uns den Integranden $\mathcal{I}(\varepsilon) \equiv \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu)$ an. Da die Teilchenzahl als Integral über diese Funktion gegeben ist, entspricht die Fläche unter der Kurve gerade der Teilchenzahl. Halten wir das chemische Potential zunächst konstant und variieren die Temperatur, so erkennen wir, dass die eingeschlossene Fläche mit der ε -Achse für fallende Temperatur immer kleiner wird:



In diesem und in den folgenden Schaubildern ist $T_3 < T_2 < T_1$. Die Teilchenzahl sollte sich mit der Temperatur jedoch nicht ändern. Unter anderem aus der vorherigen Aufgabe wissen wir, dass jedoch das chemische Potential nicht konstant ist, sondern selbst auch von der Temperatur abhängt. Für hohe Temperaturen verhält es sich wie $-T \ln(T)$. Wird die Temperatur kleiner, so sollte es sich dem Wert $\mu = 0$ annähern, da dann der Pol der Bose-Einstein-Funktion (und damit das Maximum des Integranden $\mathcal{I}(\varepsilon)$) zu kleinen Energien hin verschoben wird. Dies hat zur Folge, dass der Verlust der Fläche für sinkende Temperatur im Bereich kleiner Energien durch einen sich vergrößernden Ausschlag ausgleicht. (Ab jetzt ist μ nicht mehr konstant, sondern $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$!)



Nähert sich die Temperatur jedoch dem Wert Null an, so wird dieser Ausgleich immer schwieriger, da dann der Wert des Maximums durch den Anteil der Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ unterdrückt wird, welcher für kleine Energien ja gegen Null geht. Für immer kleinere Temperaturen haben wir somit keine Chance, die Fläche unter der Kurve $\mathcal{I}(\varepsilon)$ und somit die Teilchenzahl konstant zu halten; beides geht in die Knie.



Der Ausschlag kann den Verlust der Fläche nicht mehr ausgleichen. Offensichtlich muss sich hier etwas Physikalisches abspielen, weil es ja nicht sein kann, dass die Teilchen keinen Platz im Gas mehr haben. Die Lösung

für das Problem ist, dass sich unterhalb einer bestimmten Sprungtemperatur T_0 Teilchen im niedrigsten Energiezustand mit $\varepsilon(\mathbf{k}) = 0$ (und somit auch $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) sammeln. Für $T < T_0$ sammeln sich immer mehr Bosonen in diesem Zustand und dies ist ja auch möglich, da für Bosonen das Pauli-Prinzip nicht gilt. (Etwas Analoges gibt es nicht für Fermionen!) Das ist jedoch in der Zustandsdichte nicht berücksichtigt. Die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ ist ein Maß für die Dichte von Zuständen im Intervall $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. Aus $\mathcal{N}(0) = 0$ (in drei Dimensionen gilt ja $\mathcal{N}(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$) folgt, dass sich im Intervall $[0, d\varepsilon]$, also in der Nähe von $\varepsilon = 0$ überhaupt keine Zustände und bei der Integration über $g(\varepsilon - \mu)$ trägt $\varepsilon = 0$ somit überhaupt nicht bei!

Dieser fehlende Beitrag in der Zustandsdichte muss jedoch für die Anzahl der Teilchen berücksichtigt werden. Deshalb schreibt man

$$N(T, V, \mu) = N_0(T, V) + V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu). \quad (16)$$

Hierbei ist $N_0(T, V)$ die Anzahl der Bosonen im tiefen Ein-Teilchen-Zustand mit $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. $N_0(T, V)$ hängt nicht mehr vom chemischen Potential μ ab, da dieses für $T \leq T_0$ verschwindet. $\mu = 0$ bedeutet, dass die Gibbsche Enthalpie ein Extremum besitzt. Die Gibbsche Enthalpie bleibt bezüglich der Teilchenzahl für $T < T_0$ konstant. Das Kondensat bevorzugt also entweder die Entnahme noch die Aufnahme von Teilchen.

Ist der Wert $T = T_0$ gerade erreicht, sammeln sich die ersten Bosonen im Zustand mit $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Bei $T = T_0$ ist gerade $N_0 = 0$ und die Teilchenzahl folgt durch Integration über die Zustandsdichte; Teilchen im niedrigsten Zustand müssen noch nicht berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} N(T_0, V, \mu = 0) &= N = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon)|_{T=T_0} = VC_3 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_0}\right) - 1} = \\ &= VC_3 (k_B T_0)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{\exp(x) - 1} = \boxed{VC_3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T_0)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Über diesen Ausdruck lässt sich eine thermische de-Broglie-Wellenlänge definieren:

$$\lambda_T = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}} \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \approx \boxed{\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}}. \quad (18)$$

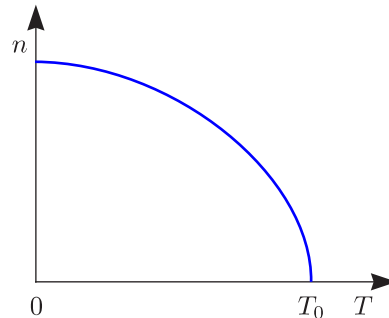
Nebenbemerkung: Dieser Ausdruck lässt sich auch aus der ursprünglichen de-Broglie-Beziehung abschätzen, wobei man die thermische Energie $U = 3/2 k_B T$ für ein ideales Gas einsetzt:

$$\lambda_T = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3m k_B T}}. \quad (19)$$

Auflösen von (17) nach der Sprungtemperatur ergibt:

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{\left[\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{\frac{2}{3}} 2\pi m k_B} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (20)$$

Theoretisch wurde der Effekt von Bose und Einstein in den Jahren 1924/1925 vorhergesagt. Es sammeln sich also unterhalb der Sprungtemperatur T_0 die Teilchen des Gases in diesem Kondensat:

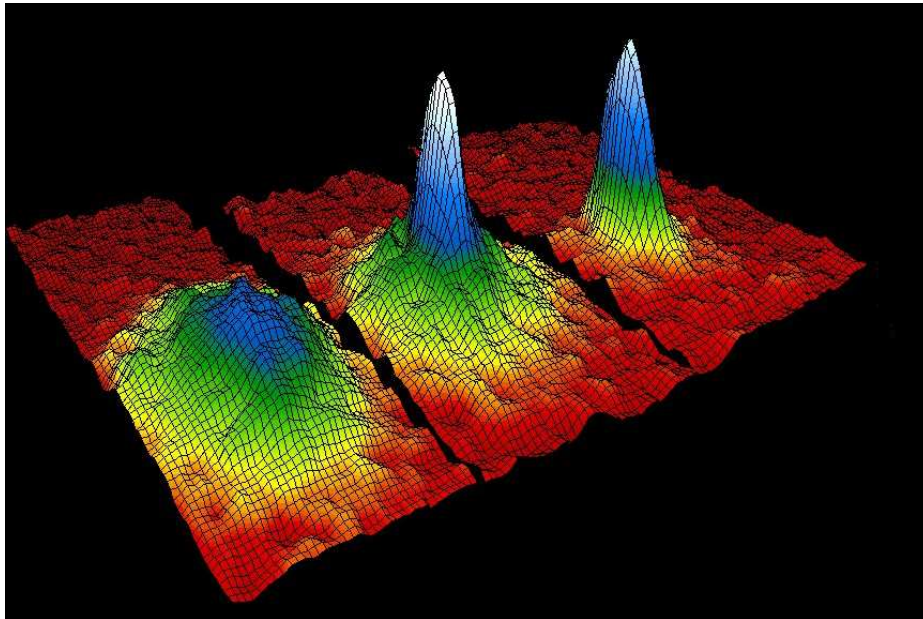


Im Wesentlichen handelt es sich dabei um einen Phasenübergang. Unterhalb der Temperatur liegen zwei Phasen vor, nämlich zum einen das Kondensat und zum anderen die Gasphase. Der dritte Hauptsatz ist auch wieder

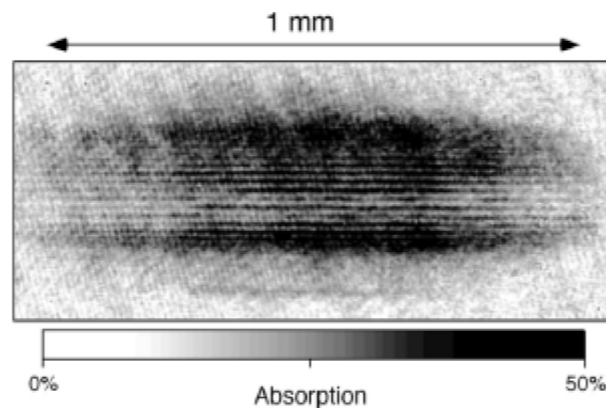
erfüllt, denn man kann berechnen, dass sich die Entropie des Phasengemisches $\sim T^{\frac{3}{2}}$ verhält. Für $T = 0$ liegt ein reines Kondensat vor und dieses besitzt die Entropie $S = 0$.

Liegt der Abstand der Atome eines Gases im Bereich der thermischen de-Broglie-Wellenlänge, verlieren die Atome ihre Identität (Identitätskrise). Dann überlagern sich die Wellenfunktionen der einzelnen Atome und es entsteht ein Zustand mit einer makroskopischen Wellenfunktion, bei der alle Teilchen in einer festen Phasenbeziehung zueinander stehen und sich wie ein „gemeinsames Ganzes“ verhalten. (Die makroskopische Wellenfunktion ist das Produkt von N Ein-Teilchen-Wellenfunktionen.) Genau dabei handelt es sich um das Bose-Einstein-Kondensat. Man spricht im Falle einer festen Phasenbeziehung auch von Kohärenz und diese Eigenschaft ist wesentlich, sofern man Interferenzerscheinungen betrachten möchte.

Experimentell kann man ein Bose-Einstein-Kondensat beobachten, indem man Laserlicht einer bestimmten Wellenlänge einstrahlt. Das Kondensat streut dann Photonen, so dass der Laserstrahl geschwächt wird. Eine Aufnahme der Absorptionskurve führt dabei auf folgendes Bild:



Experimentell hat man folgendes Interferenzschema zweier sich ausdehnender Kondensate aufgenommen:



Das Bild wurde während einer Zeitdauer von 40 ms aufgenommen. Die Interferenzstreifen haben einen Abstand von $15 \mu\text{m}$, was einer sehr großen Wellenlänge für Materiewellen entspricht. Zum Vergleich ist die Wellenlänge der Materiewelle, die man einem Atom zuordnet, bei Raumtemperatur weniger als $0,5 \text{ \AA}$.

Um ein Gefühl für die Größenordnung der Sprungtemperatur und für die einhergehenden physikalischen Effekte zu bekommen, machen wir eine Abschätzung. Wir betrachten dazu ein Bosongas, welches bei Raumtemperatur die Dichte $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ besitzt (analog zu Wasser). Ein Die Bosonen sollen dieselbe Masse wie Wassermoleküle besitzen, also 18 u , wobei $1 \text{ u} \approx 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ die atomare Masseneinheit ist. In 18 g , also in einem Volumen von 18 ml , befinden sich dann ungefähr $6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Damit gilt:

$$T_0 = \frac{1}{\left[\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2\pi \cdot 18 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}} \left(\frac{6,022 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}\right) \approx \boxed{0,93 \text{ K}} \quad (21)$$

Eine Temperatur von einem Kelvin ist heutzutage experimentell einfach zu erreichen. Das Problem ist jedoch, dass schon lange vor dieser Temperatur Clusterbildung einsetzt und das Gas zu einem Feststoff erstarren wird. Dann ist kein Bose-Einstein-Kondensat beobachtbar und das Ganze scheitert an der hohen Teilchendichte. Damit so etwas nicht passiert, muss die Teilchendichte auf etwa ein Milliardstel, also auf den Faktor $1/10^9$ reduziert werden. Damit ergibt sich dann eine Sprungtemperatur $T_0 = 100 \text{ nK}$ bis $1 \text{ } \mu\text{K}$. Solche Temperaturen in einem Experiment zu erreichen, ist eine große technische Herausforderung, handelt es sich nämlich dabei um niedrigere Temperaturen als im interstellaren Raum! Durch sehr ausgefeilte Methoden wie die Laserkühlung/Verdampfungskühlung konnte das Bose-Einstein-Kondensat für Alkalimetallatome experimentell erst um 1995 von drei Gruppen unabhängig voneinander nachgewiesen:

- 1.) MIT: Ketterle (mit Natriumgas)
- 2.) University of Colorado in Boulder: Wieman und Cornell (mit Rubidium und Cäsium)
- 3.) Rice University in Houston: Hulet (mit ${}^7\text{Li}$)

c.)

Wir untersuchen den Fall für kleine Temperaturen oberhalb der Sprungtemperatur T_0 , also $\delta \equiv (T - T_0)/T_0 \ll 1$. Dann ist $-\mu \ll k_B T \simeq k_B T_0$. Wegen $\mu \neq 0$ (im Gegensatz zu Aufgabenteil (b), wo es um das Bose-Einstein-Kondensat ging), sind die auftretenden Integrale nun problematisch. Man macht deshalb die Näherung, dass man die Teilchenzahl in der Form

$$N(T, V, \mu) = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu) = \Delta N(T, V, \mu) + N(T, V, 0), \quad (22)$$

schreibt, wobei

$$N(T, V, 0) = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon), \quad (23)$$

nicht vom chemischen Potential μ abhängt und sich daher gut berechnen lässt. $\Delta N(T, V, \mu)$ ist definiert als die Differenz

$$\Delta N(T, V, \mu) = N(T, V, \mu) - N(T, V, 0), \quad (24)$$

zwischen der Teilchenzahl mit nicht verschwindendem bzw. verschwindendem Potential. $N(T, V, 0)$ ist jedoch nur für $T = T_0$ mit der Teilchenzahl des Bosegases identisch, da sich für $T < T_0$ immer mehr Bosonen im energetisch niedrigsten Ein-Teilchen-Zustand mit $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sammeln. Diese Teilchen werden bei der Integration über die Zustandsdichte nicht berücksichtigt, wie wir in Aufgabenteil (b) ausführlich besprochen haben. Es bleibt die Differenz $\Delta N(T, V, \mu)$ zu berechnen:

$$\Delta N(T, V, \mu) = V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) [g(\varepsilon - \mu) - g(\varepsilon)] = VC_3 \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} - \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon) - 1} \right]. \quad (25)$$

Das zweite Integral divergiert für $\varepsilon = 0$. Da das chemische Potential für Temperaturen nahe der Sprungtemperatur T_0 sehr klein ist, divergiert auch das erste Integral für kleine ε . Die stärksten Beiträge von beiden Integralen kommen also von kleinen ε , was bedeutet, dass wir die Exponentialfunktion im Nenner entwickeln:

$$\frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} \approx \frac{1}{1 + \beta(\varepsilon - \mu) - 1} = \frac{k_B T}{\varepsilon - \mu}, \quad \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon) - 1} \approx \frac{1}{1 + \beta\varepsilon - 1} = \frac{k_B T}{\varepsilon}. \quad (26)$$

Jetzt erkennen wir auch, warum es sinnvoll war, diese Differenz zu berechnen. Jedes der beiden einzelnen Integrale ist nämlich divergent für $\varepsilon \mapsto 0$; die Differenz ist jedoch endlich, da sich die divergenten Anteile gegenseitig wegheben :-)

$$\begin{aligned} \Delta N(T, V, \mu) &\approx VC_3 k_B T \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon - \mu} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = VC_3 k_B T \mu \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon - \mu)} = \\ &\stackrel{\varepsilon=x^2}{=} VC_3 k_B T \mu \int_0^\infty dx \frac{2}{x^2 + (-\mu)} = VC_3 k_B T \mu \left[\frac{2}{\sqrt{-\mu}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{-\mu}} \right) \right]_0^\infty = \\ &= VC_3 k_B T \mu \frac{2}{\sqrt{-\mu}} \frac{\pi}{2} = \boxed{-VC_3 \pi k_B T \sqrt{-\mu}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Auch hier erkennen wir wieder, dass der Ausdruck nur dann definiert ist, sofern das chemische Potential negativ ist. $N(T, V, 0)$ haben wir in Aufgabenteil (b) benötigt und schon berechnet:

$$N(T, V, 0) = VC_3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T)^{\frac{3}{2}}. \quad (28)$$

Wegen der Bedingung $N(T_0, V, 0) = N$ können wir die Konstante C_3 aus der Zustandsdichte eliminieren:

$$\begin{aligned} N(T, V, \mu) &= N(T, V, 0) + \Delta N(T, V, \mu) = VC_3 \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T)^{\frac{3}{2}} - \pi(k_B T) \sqrt{-\mu} \right] = \\ &= N(T_0, V, 0) \left\{ \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{T}{T_0}\right) \sqrt{\frac{-\mu}{k_B T}} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Die Teilchenzahl ist unabhängig von chemischem Potential und Temperatur (wegen des Bose-Einstein-Kondensats solange $T > T_0$) und damit eine Konstante N . Dann lässt sich (29) nach μ auflösen:

$$\boxed{\sqrt{\frac{-\mu}{k_B T}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{T_0}{T} \right]}. \quad (30)$$

Das Ganze lässt sich nun noch entwickeln, indem wir die zuvor definierte Größe δt einführen:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{T - T_0}{T_0} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + \delta t)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\delta t}{2}, \quad (31a)$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1} = \left(\frac{T - T_0}{T_0} + 1\right)^{-1} = (1 + \delta t)^{-1} \approx 1 - \delta t, \quad (31b)$$

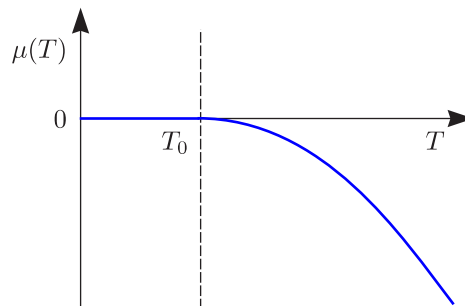
also:

$$\boxed{\sqrt{\frac{-\mu}{k_B T}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \delta t \Rightarrow \frac{-\mu}{k_B T} = \left[\frac{3}{2\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right]^2 (\delta t)^2}. \quad (32)}$$

Also fassen wir das gesamte Verhalten des chemischen Potentials zusammen:

$$\boxed{\mu = \begin{cases} 0 & \text{für } T < T_0 \\ \propto -T^2 & \text{für } T \geq T_0 \\ \propto -T \ln(T) & \text{für } T \ll T_0 \end{cases}}. \quad (33)$$

Graphisch sieht das chemische Potential damit aus wie folgt:



Das Gas empfindet es also weder als günstig noch als ungünstig, wenn ihm Teilchen aus dem Kondensat entnommen werden (da $\mu < 0$ für $T < T_0$). Da $\mu < 0$ für $T > T_0$ bevorzugt das Bosegas die Aufnahme von Teilchen. Dann ist nämlich $\partial G / \partial N < 0$ und G strebt einem minimalen Wert zu.

d.)

Wie wir auf dem sechsten Übungsblatt gesehen haben, ist die Zustandsdichte in zwei Dimensionen für $\varepsilon \geq 0$ eine Konstante: $N(\varepsilon) = C_2 \theta(\varepsilon)$. Wir können nun eine ähnliche Rechnung wie in (b) durchführen und zwar muss

bei $T = T_0$ das Integral über Zustandsdichte multipliziert mit der Bosefunktion der Teilchenzahl entsprechen:

$$\begin{aligned}
N &= V \int d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) g(\varepsilon)|_{T=T_0} = C_2 \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)|_{T=T_0} = C_2 k_B T \int_0^\infty dx \frac{1}{\exp(x) - 1} = \\
&\stackrel{\exp(x)=t}{=} C_2 k_B T \int_1^\infty dt \frac{1}{t(t-1)} = C_2 k_B T \int_1^\infty dt \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} C_2 k_B T_0 [-x + \ln(\exp(x) - 1)]_a^\infty = \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} -C_2 k_B T_0 \ln(a). \tag{34}
\end{aligned}$$

Das Integral ist somit divergent an der unteren Grenze! Trägt man hier $\mathcal{I} = \mathcal{N}(\varepsilon)g(\varepsilon - \mu)$ über ε auf, so werden wegen der konstanten Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ die Beiträge für kleine ε nicht unterdrückt (im Gegensatz zum dreidimensionalen Falle). Damit kann die Teilchenzahl auf Zuständen mit $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ untergebracht werden und es setzt keine Bose-Kondensation ein.