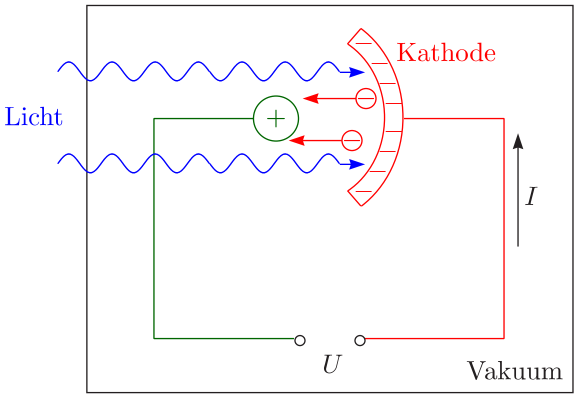
Handout zum Übungsblatt Nr.1

Der Photoeffekt

Durchführung



Der experimentelle Aufbau zum Nachweis dieses Effekts ist wie folgt. Man legt eine äußere Spannung zwischen einer großen Metallfläche und einer kleineren metallischen Kugel an. Die Spannung sollte so gepolt sein, dass die metallische Fläche negativ und die Kugel positiv geladen ist. Die negativ geladene Fläche nennen wir Kathode und die positiv geladene Kugel ist die Anode. Das Ganze sollte sich in einem luftleeren Raum (Vakuum) befinden. Zunächst kann man mit einem Strommesser keinen elektrischen Strom nachweisen, weil der Stromkreis zwischen Anode und Kathode unterbrochen ist. Strahlt man jedoch Licht einer bestimmten Wellenlänge auf die Kathode, so kann plötzlich ein Stromfluss festgestellt werden.
Legt man zwischen Anode und Kathode zusätzlich eine Gegenspannung an und erhöht diese stetig, so nimmt die gemessene elektrische Stromstärke ab und fällt schließlich ab einem bestimmten Wert der Gegenspannung auf Null. Die elektrische Stromstärke hängt zwar von der Intensität des Lichts (also der Lichtstärke) ab, mit der man die Kathode bestrahlt. Erstaunlicherweise gilt dies jedoch nicht für die Gegenspannung, bei welcher der elektrische Strom auf auf Null abfällt. Diese hängt dagegen von der Frequenz bzw. der Wellenlänge des eingestrahlten Lichtes ab. Das Experiment wurde anfangs des 20. Jahrhunderts durchgeführt und führten zu Aufsehen, weil die experimentellen Ergebnisse dem damaligen physikalischen Verständnis widersprachen.

Erklärung

Die äußeren Elektronen in den Metallatomen sind nicht stark an diese gebunden und können leicht abgelöst werden. Genau dies geschieht hier. Durch das Licht wird Energie auf solche Elektronen übertragen und diese werden infolgedessen aus dem Metall herausgeschlagen. Danach fliegen sie zur Anode und sind als elektrischer Strom nachweisbar.
Die angelegte Gegenspannung bremst die austretenden Elektronen ab, verringert also deren Energie. Hat die Spannung einen bestimmten Wert erreicht, so werden die Elektronen vollständig abgebremst und können die Anode nicht mehr erreichen. Damit fällt der elektrische Strom auf Null ab. Mit der Gegenspannung lässt sich also tatsächlich die Energie der Elektronen messen.
Doch warum hängt nur die Stromstärke von der Lichtintenstität ab, nicht aber die Energie der Elektronen? Damals war bekannt, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist, eine Welle, die aus elektrischen und magnetischen Feldern besteht. Diese Felder induzieren sich gegenseitig, womit sich die Welle durch das Vakuum bewegen kann ohne einen Träger, wie dieser bei mechanischen Wellen erforderlich ist. Die schon bekannten Maxwellschen Gleichungen lieferten die mathematische Beschreibung von

elektromagnetischen Wellen. Hieraus folgt auch, dass die Lichtintensität I proportional zum Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke ist, also $I \sim |\mathbf{E}|^2$. Wollte man das Herauslösen der Elektronen aus dem Metall mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen beschreiben, so müsste man annehmen, dass die Elektronen durch das elektromagnetische Feld Lichtwelle selbst zu Schwingungen angeregt werden. Dies würde so lange passieren, bis sie aus dem Metall herausgerissen werden. Dann müsste jedoch die Energie der Elektronen von der Feldstärke und somit auch der Intensität des Lichts abhängen, was jedoch nicht der Fall ist. Damit konnten mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen die Ergebnisse des Experiments nicht erklärt werden.
Die Erklärung wurde erst von Einstein geliefert, wofür er den Nobelpreis für Physik erhielt. Er nahm an, dass die Energie einer Lichtwelle in kleine Portionen eingeteilt, also gequantelt ist. Diese Energiequanten wurden Photonen genannt. Die Energie eines solchen Photons hängt von der Frequenz f (bzw. Wellenlänge λ) des Lichtes ab und ist gegeben durch:

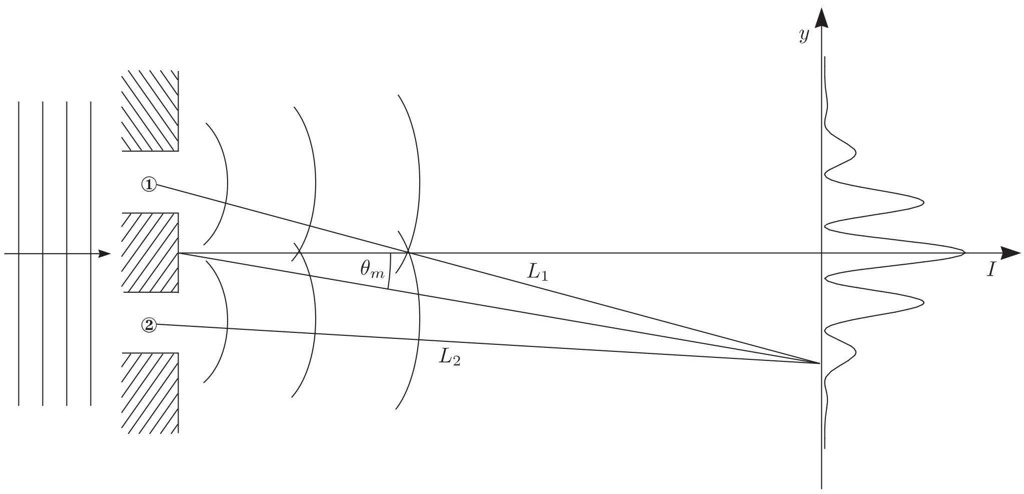
$$E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}\,, \tag{1}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und h eine Proportionalitätskonstante (das Plancksche Wirkungsquantum) ist. Mit dieser Annahme war es möglich, den Photoeffekt zu erklären. Ein Elektron kann demnach aus dem Metall herausgelöst werden, wenn es ein Photon aufnimmt, das genügend Energie besitzt. (Zum Herauslösen eines Elektrons wird eine bestimmte Ablöseenergie W_a benötigt, die vom Metall abhängt.) Der Rest, also die Energie $h \cdot f - W_a$ steht dem Elektron als kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2\,, \tag{2}$$

zur Verfügung. Damit ist klar, dass die Energie der Elektronen von der Frequenz des Lichts abhängt, nicht aber von dessen Intensität. Ändert man die Intensität des Lichts, ändert sich auch die Anzahl der Photonen und damit auch die Zahl der Elektronen, die aus dem Metall herausgelöst werden. Dies führt zu einem Anstieg oder Abfall des gemessenen elektrischen Stroms.
Die Erklärung des Photoeffekts führte zu den Anfängen der Quantenmechanik.

Das Doppelspaltexperiment



Schickt man eine Wasserwelle oder Lichtwelle auf einen Doppelspalt, so treten Beugungserscheinungen auf. Misst man die Stärke bzw. Intensität der Wellen auf einem Schirm hinter dem Doppelspalt, so erkennt man ein Beugungsmuster: An bestimmten Punkten auf dem Schirm ist die gemessene Intensität gleich Null und an anderen Punkten nimmt sie ein Maximum an. Das kommt daher, weil sich Wellenzüge an Punkten mit verschwindender Intensität destruktiv, sich also auslöschen, und an Punkten mit maximaler Intensität konstruktiv überlagern, sich somit verstärken. Dies war schon vor der Quantenmechanik bekannt und konnte mit klassischer Wellenmechanik erklärt werden.

Ein solches Doppelspaltexperiment wurde jedoch auch mit Elektronen, also Teilchen, durchgeführt. Dabei beobachtete man ein ähnliches Interferenzmuster wie bei Wasser- oder Lichtwellen. Dies führte erneut zu großem Aufsehen, war das Ergebnis nämlich völlig unerwartet.
Schießt man gewöhnliche Teilchen auf einen Doppelspalt (beispielsweise Gewehrkugeln) erwartet man erst einmal kein Beugungsmuster, sondern pro einzelnen Spalt (wenn man den jeweils anderen Spalt abdeckt) so etwas wie eine Normalverteilung. (Eine Kugeln werden den Spalt etwas streifen und daher mehr oder weniger stark abgelenkt.) Hat man beide Spalte offen, so werden sich die Normalverteilungen der Einzelspalte, also die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Gewehrkugel an einer bestimmten Stelle auf den Schirm trifft, einfach addieren.
Setzt man die vom Photoeffekt her bekannte Energie eines Lichtteilchens $E = h \cdot f$ mit der von Einstein gefundenen Beziehung

$$E = mc^2 \,, \tag{3}$$

gleich, welche die Ruheenergie eines Teilchens der Masse m angibt (Äquivalenz von Masse und Energie), so lässt sich Photonen tatsächlich eine Masse zuordnen:

$$m_{\mathrm{Ph}} = \frac{h \cdot f}{c^2} = \frac{h}{\lambda \cdot c} \,, \tag{4}$$

damit handelt es sich aber um keine Ruhemasse, sondern um eine Masse, die von der Bewegung der Photonen kommt; diese bewegen sich nämlich immer mit der Lichtgeschwindigkeit c und haben damit den Impuls $p = m_{\mathrm{Ph}}v = m_{\mathrm{Ph}}c$. Bringen wir in der obigen Gleichung das c im Nenner auf die andere Seite, folgt:

$$m_{\mathrm{Ph}}c = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda} \,.} \tag{5}$$

Die letzte Gleichung stellt also einen Zusammenhang zwischen dem Impuls p und der Wellenlänge λ eines Photons her.
Quantenmechanisch können sich jedoch Teilchen wie Wellen verhalten. Der Physiker de Broglie hat auf diesen Zusammenhang als erster aufmerksam gemacht und zwar in seiner Doktorarbeit, für die er später den Nobelpreis erhielt. Dabei ordnete er Materieteilchen mit dem Impuls p (also nicht mehr notwendigerweise Photonen) eine Wellenlänge zu über die obige Gleichung (nach λ aufgelöst):

$$\lambda = \frac{h}{p} \,. \tag{6}$$

Dies ist die sogenannte de-Broglie-Wellenlänge, welche jedem Teilchen mit einem Impuls p eine Wellenlänge λ zuordnet. Materieteilchen (beispielsweise Elektronen) können sich somit korpuskular (also wie Teilchen) oder aber auch wie Wellen verhalten; man spricht dann von Materiewellen. Teilchen kann man somit als Quanten einer Materiewellen auffassen, so wie man Photonen als Quanten von elektromagnetischen Wellen verstanden werden. Diesen sogenannten Wellen-Teilchen-Dualismus im Grunde zu entschlüsseln, ist schwierig und kann letztendlich erst in einer weiterführenden Theorie, nämlich der Quantenfeldtheorie (Vereinigung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie) erklärt und mathematisch beschrieben werden.

Die Schrödingergleichung

So wie die Newtonschen Axiome die Grundgesetze der klassischen Mechanik sind, handelt es sich bei der Schrödingergleichung um die Grundgleichung der Quantenmechanik. Schauen wir uns die Schrödingergleichung mal näher an:

$$\mathrm{j}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \,, \quad \text{mit } \hbar = \frac{h}{2\pi} \,, \quad j^2 = -1 \,. \tag{7}$$

$\psi(x,t)$ ist die sogenannte Wellenfunktion; sie beschreibt so etwas wie die Wahrscheinlichkeitsamplitude, die jedoch zunächst keine physikalische Bedeutung hat. Erst das Betragsquadrat $|\psi(x,t)|^2$ steht für eine physikalisch messbare Größe. $|\psi(x,t)|^2$ besagt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen im Raumintervall $[x_1, x_2] = [x, x + \mathrm{d}x]$ (mit einem infinitesimal kleinen $\mathrm{d}x$) zu finden. Integriert über den Ort ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, also gibt beispielsweise

$$W(x_1 = -2\,\mathrm{cm}, x_2 = 2\,\mathrm{cm}, t) = \int\limits_{x_1=-2\,\mathrm{cm}}^{x_2=2\,\mathrm{cm}} |\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x\,, \tag{8}$$

die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen zwischen $x = -2\,\mathrm{cm}$ und $x = 2\,\mathrm{cm}$ zu finden. Die Wahrscheinlichkeit hängt selbst noch von der Zeit ab, wenn die Wellenfunktion zeitabhängig ist. Dies kommt dann daher, dass sich das Teilchen durch den Raum bewegt, womit sich seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit natürlich mit der Zeit ändert. Insgesamt gilt

$$W(x_1 = -\infty, x_2 = +\infty, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = 1\,, \tag{9}$$

und zwar unabhängig von der Zeit! Physiker sprechen hierbei von der Normierung der Wellenfunktion. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass man ein Teilchen zu allen Zeitpunkten auf jeden Fall finden muss, sofern man die gesamte x-Achse von $x_1 = -\infty$ bis $x_2 = +\infty$ nach diesem absucht. Irgendwo muss es sich ja befinden! Diese quantenmechanische Beschreibung der Physik durch Wahrscheinlichkeiten und nicht durch Bahnkurven (wie in der klassischen Mechanik und Elektrodynamik) ist neu und im Bereich der Atome und Moleküle (und der noch kleineren Teilchen) unersetzbar und nicht wegzudenken. In unserer Alltagswelt sind quantenmechanische Effekte jedoch nicht sichtbar und man kann ohne Bedenken weiterhin mit den Newtonschen Grundgesetzen rechnen.
Die Schrödingergleichung ist eine partielle Differentialgleichung mit einer zweiten Ortsableitung und einfachen Zeitableitung. Wegen der imaginären Einheit j sind komplexe Lösungen durchaus wichtig, um die Physik zu beschreiben (im Gegensatz zur reellen Wellengleichung, bei der komplexe Lösungen nur ein Rechentrick sind). In einer komplexen Lösung steckt im Wesentlichen drin, wie sich eine Wellenfunktion zeitlich verhält; der komplexe Anteil hat also etwas mit der zeitlichen Entwicklung zu tun. Die Lösungen der Schrödingergleichung hängen vom vorgegebenen Potential $V(x,t)$ ab. Setzen wir $V(x,t)$ gleich Null, so bedeutet dies, dass wir freie Materieteilchen betrachten. Dann lautet die Schrödingergleichung

$$\mathrm{j}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\,. \tag{10}$$

Wie man diese jetzt löst, weiß man zunächst nicht. Man behilft sich dabei mit bestimmten Ansätzen, die man macht. (Natürlich sind diese Ansätze nicht einfach so ersichtlich, sondern viele schlaue Leute haben sich darüber in der Vergangenheit Gedanken gemacht ;-) Es ist geschickt, für die Wellenfunktion den Ansatz einer ebenen Welle zu machen (wegen des Welle-Teilchen-Dualismus):

$$\psi(x) = A\exp(\mathrm{j}(kx - \omega t))\,, \quad \omega = 2\pi f\,, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \tag{11}$$

Einsetzen liefert

$$\hbar\omega = hf = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}\,. \tag{12}$$

Dies liefert eine Beziehung zwischen Frequenz f und Wellenlänge λ von Materiewellen; man nennt diesen Zusammenhang auch Dispersionsrelation. Die Dispersionsrelation von elektromagnetischen Wellen lautet dazu im Vergleich

$$\omega = ck \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}\,, \tag{13}$$

und man erkennt den großen Unterschied zwischen den Dispersionsrelationen von Materiewellen und elektromagnetischen Wellen.