Lösungsvorschlag zum Übungsblatt Nr.7

Aufgabe 49

Wie sich die Diffusionslänge in Abhängigkeit von der Diffusionskonstanten einstellt, folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} - r_p = -\frac{1}{e}\frac{\partial j}{\partial x} - r_p\,. \tag{1}$$

Die zeitliche Änderung der Ladungsträgerdichte p entspricht also der Summe aus Divergenz des Stroms $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}$ und der Rekombinationsrate r_p.

- Wir legen eine Fläche S um die Ladungsträgerdichte $p(x)$. Die Divergenz des Stroms ist ein Maß für die Stärke der Quellen und Senken des Stroms, also anschaulich für die Menge der Ladungsträger, die durch die Fläche S heraus oder hineinfließen. Je größer die Divergenz ist, also je mehr Elektronen herausfließen, umso größer muss auch die zeitliche Änderung der Ladungsträgerdichte sein. Das Minuszeichen besagt, dass $p(x)$ abnimmt, wenn Ladungen durch die Fläche nach außen fließen.
- Die Rekombinationsrate besagt, wie viele Ladungsträger miteinander rekombinieren, also wie viele Elektronen in Löcher fallen. Auch hier besagt das Minuszeichen, dass die Ladungsträgerdichte aufgrund von Rekombination abnimmt. Die Rekombinationsrate ist gegeben durch $r_p = p/\tau_p$, was besagt, dass p Löcher in der Zeitspanne τ_p mit Elektronen rekombinieren.

Der Strom ist außerdem proportional zum Konzentrationsgradienten der Ladungsträger, also zu $\boldsymbol{\nabla}p$. Die Proportionalitätskonstante setzt sich aus der Diffusionskonstanten D_p und der Elementarladung zusammen. In einer Dimension gilt $\nabla = \partial/\partial x$ und somit

$$j = -eD_p\frac{\partial p}{\partial x} = -eD_p\frac{\partial}{\partial x}\left[p_0\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right)\right] = \frac{eD_p}{L_D}p_0\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right)\,. \tag{2}$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass der Strom entgegengesetzt zum Konzentrationsgradienten verläuft. Er fließt also dahin, wo die Ladungsträgerdichte kleiner ist.

Die zeitliche Änderung der Ladungsträgerdichte verschwindet, wenn wir uns im Gleichgewicht befinden, also $\partial p/\partial t = 0$. Damit ist

$$-\frac{1}{e}\frac{\partial j}{\partial x} - r_p = 0\,. \tag{3}$$

Wir setzen nun alles ein und erhalten:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{eD_p}{L_D}p_0\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right)\right] - \frac{1}{\tau_p}p_0\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) &= -\frac{D_p p_0}{L_D}\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) - \frac{p_0}{\tau_p}\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) = \\ &= \frac{D_p p_0}{L_D^2}\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) - \frac{p_0}{\tau_p}\exp\left(-\frac{x}{L_D}\right) \overset{!}{=} 0\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Dies führt zum Zusammenhang

$$\boxed{L_D = \sqrt{D_p\tau_p}\,,} \tag{5}$$

und damit

$$L_D = \sqrt{D_p\tau_p} = \sqrt{\frac{k_B T\mu}{e}\tau_p} = \sqrt{\frac{1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 300\,\mathrm{K}\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{V\cdot s}}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx \boxed{50,8\,\mu\mathrm{m}\,.} \tag{6}$$

Aufgabe 50

a.)

Durch Absorption von Photonen entstehen Elektron-Loch-Paare. Die Überschusselektronen werden an der Unterseite des Halbleiters abgesaugt, womit $\Delta n(x = d)$ verschwindet. Da an der Oberseite durch Lichteinstrahlung immer neue Ladungsträger erzeugt werden, kann $\Delta n(x = 0)$ als konstant angenommen werden; wir setzen die Konstante auf Δn_0. Der Strom der Ladungsträger von der Oberseite zur Unterseite der Platte wird aufgrund des Konzentrationsgradienten durch Diffusion getrieben. Weiterhin muss berücksichtigt werden, dass ein Teil der überschüssigen Elektronen mit Löchern rekombinieren werden. Löcher sind im p-dotierten Halbleiter die Majoritätsladungsträger und liegen daher in großer Zahl vor. Wir verwenden also erneut die Diffusionsgleichung für die Überschussverteilung Δn und erhalten:

$$\frac{\partial(\Delta n)}{\partial t} = -\frac{1}{e}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} - r_{\Delta n} = -\frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial x}\left(-eD_n\frac{\partial}{\partial x}(\Delta n)\right) - \frac{\Delta n}{\tau_n} = D_n\frac{\partial^2(\Delta n)}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n}\,. \tag{7}$$

Es habe sich ein stationärer Zustand eingestellt, also eine zeitunabhängige Verteilung Δn. Damit verschwindet $\partial(\Delta n)/\partial t$ und wir erhalten:

$$0 = D_n\frac{\partial^2(\Delta n)}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n}\,. \tag{8}$$

b.)

Wir müssen eine Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung

$$D_n\tau_n\frac{\partial^2(\Delta n)}{\partial x^2} - \Delta n = L_n^2\frac{\partial^2(\Delta n)}{\partial x^2} - \Delta n = 0\,, \tag{9}$$

finden. Hierbei haben wir die Gleichung für die Diffusionslänge $L_n = \sqrt{D_n\tau_n}$ verwendet, die wir in Aufgabe (49) hergeleitet haben (nur dieses mal für Elektronen anstelle für Löcher). Es handelt sich um eine Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Speziell diese Gleichung löst man mit dem Ansatz

$$\Delta n(x) = C_1\exp(ax) + C_2\exp(-ax)\,, \tag{10}$$

da die zweite Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion ist und genau das benötigen wir hier. Die Unbekannte a bestimmen wir durch einsetzen in die Differentialgleichung und erhalten:

$$L_n^2a^2\left\{C_1\exp(ax) + C_2\exp(-ax)\right\} = C_1\exp(ax) + C_2\exp(-ax)\,. \tag{11}$$

Dividieren wir durch $C_1\exp(ax) + C_2\exp(-ax)$ (was erlaubt ist, da die Funktion $\neq 0$ ist), so folgt $L_n^2a^2 = 1$, also $a = 1/L_n$. Damit ist die Lösung

$$\Delta n(x) = C_1\exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + C_2\exp\left(-\frac{x}{L_n}\right)\,. \tag{12}$$

Es bleiben noch die Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen. Diese ergeben sich aus den Randbedingungen

$$\Delta n(x=0) = \Delta n_0\,,\quad \Delta n(x=d) = 0\,, \tag{13}$$

also aus dem Gleichungssystem

$$C_1 + C_2 = \Delta n_0\,, \tag{14a}$$

$$C_1\exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) = 0\,. \tag{14b}$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(d/L_n) & \exp(-d/L_n) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta n_0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{15}$$

führt auf:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(d/L_n) & \exp(-d/L_n) \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \Delta n_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\exp(-d/L_n) - \exp(d/L_n)}\begin{pmatrix} \exp(-d/L_n) & -1 \\ -\exp(d/L_n) & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Delta n_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta n_0)\exp(-d/L_n)}{\exp(-d/L_n)-\exp(d/L_n)} \\ \frac{-(\Delta n_0)\exp(d/L_n)}{\exp(-d/L_n)-\exp(d/L_n)} \end{pmatrix}\,, \end{aligned} \tag{16}$$

also

$$\boxed{C_1 = -(\Delta n_0)\frac{2\exp(-d/L_n)}{\sinh(d/L_n)}\,,\quad C_2 = (\Delta n_0)\left\{1 + \frac{2\exp(-d/L_n)}{\sinh(d/L_n)}\right\}\,.} \tag{17}$$

c.)

Die Störstellenrekombinationsrate kann wie folgt berechnet werden:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_\mathrm{p} n + \tau_\mathrm{n} p} \,. \tag{18}$$

- Die Elektron- bzw. Löcheranzahl im unbeleuchteten Halbleiter ist n_0 bzw. p_0; dabei gilt außerdem $n_0 p_0 = n_i^2$ im Gleichgewicht, wobei n_i die Konzentration im intrinsischen Halbleiter ist.
- Bei Beleuchtung entsteht ein Nichtgleichgewicht. Die Elektronenzahl sei um Δn und die Löcherzahl um Δp erhöht: $n = n_0 + \Delta n$ und $p = p_0 + \Delta p$.
- Wir betrachten einen stark n-dotierten Halbleiter, also gilt $p \ll n_0$ und $n \simeq n_0$.
- Weiterhin gilt $(\Delta p)(\Delta n) \ll n_i^2$; die Anzahl der Elektronen und Löcher, die durch Absorption von Photonen gebildet werden, ist viel kleiner als die intrinsische Konzentration n_i.

Also gilt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{np - n_i^2}{\tau_\mathrm{p} n + \tau_\mathrm{n} p} = \frac{(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) - n_i^2}{\tau_\mathrm{p}(n_0 + \Delta n) + \tau_\mathrm{n}(p_0 + \Delta p)} = \frac{n_i^2 + (\Delta n)p_0 + (\Delta p)n_0 + (\Delta p)(\Delta n) - n_i^2}{\tau_\mathrm{p}(n_0 + \Delta n) + \tau_\mathrm{n}(p_0 + \Delta p)} \approx \\ &\approx \frac{(\Delta n)p_0 + (\Delta p)n_0}{\tau_\mathrm{p} n_0 + \tau_\mathrm{n} p_0} \approx \frac{(\Delta p)n_0}{\tau_\mathrm{p} n_0} = \boxed{\frac{\Delta p}{\tau_\mathrm{p}}\,.} \end{aligned} \tag{19}$$

Aufgabe 51

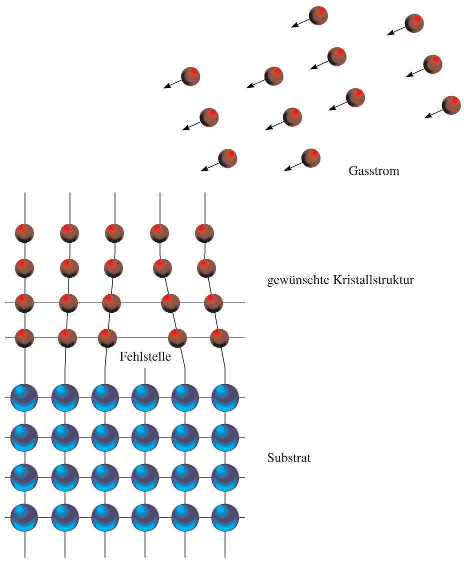
a.)

1.) Diffusionsmethode:

   - Man bringt gasförmiges, flüssiges oder festes Dotiermaterial auf den Halbleiter.
   - Aufgrund des Konzentrationsgefälles diffundieren die Dotieratome in den Halbleiter hinein.

2.) Epitaktisches Schichtwachstum:

   - Beim der Epitaxie wird lässt man einen Halbleiter auf einem Untergrund (Substrat) wachsen.
   - Die Dotieratome werden im Epitaxiestrahl einfach beigemischt, so dass sich diese sofort in das Atomgitter einbauen.



3.) Ionenimplantation: Hierbei werden geladene Dotieratome in den Halbleiter geschossen!

b.)

- Im n-dotierten Halbleiter sind Leitungselektronen die Majoritätsladungsträger und im p-dotierten Halbleiter sind dies die Löcher.
- Bringt man eine p- und n-Schicht zusammen, so diffundieren die Leitungselektronen in die p- und die Löcher in die n-Schicht.
- Damit rekombinieren Elektronen und Löcher.
- Akzeptoren liegen als negativ geladene Ionen A^- und Donatoren als positiv geladene Ionen D^+ vor.
- Die n-Schicht leitet sich somit positiv und die p-Schicht negativ auf. Der Halbleiter ist also in der Nähe des pn-Übergangs nicht mehr elektrisch neutral; man bezeichnet diese Schicht als **Raumladungszone**.
- Infolgegessen baut sich am pn-Übergang ein elektrisches Feld auf, das der Diffusion der Dotieratome entgegenwirkt.

c.)

Die positive Überschussladung im n-Bereich bzw. die negative im p-Bereich sind gleich groß, weil die Konzentration der ionisieren Akzeptoren A^- im p-Bereich der Konzentration der ionisierten Donatoren D^+ im n-Bereich entspricht. Damit ist $x_n = x_p = d/2$.

d.)

Da sich am pn-Übergang Raumladungen ausgebildet haben, ist der Halbleiter lokal nicht mehr neutral, sondern geladen. Für die Ladungsdichte gilt dann

$$\varrho(x) = -e[n(x) - p(x) - n_D^+(x) + n_A^-(x)]\,, \tag{20}$$

wobei $n(x)$ die Anzahl der Leitungselektronen und $p(x)$ die Anzahl der Löcher in Abhängigkeit vom Ort x ist. Jedes Elektron lässt einen positiv ionisierten Donator und jedes Loch einen negativ ionisierten Akzeptor zurück. $n_D^+(x)$ und $n_A^-(x)$ sind dabei deren Anzahl in Abhängigkeit vom Ort. Wir haben bereits gesehen, dass in der Nähe des pn-Übergangs, also zwischen x_p und x_n keine freien Ladungsträger mehr vorhanden sind, also gilt $n(x) = p(x) = 0$. Dann sind in diesen Bereich alle Donatoren und Akzeptoren ionisiert und es gilt

$$\varrho(x) = e[n_D^+(x) - n_A^-(x)] = eax\,. \tag{21}$$

Mittels des Gaußschen Gesetzes

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\,, \tag{22}$$

können wir das elektrische Feld berechnen. Die Integration über $x' = -d/2$ bis zu $x' = x$ führt zu:

$$ea\int\limits_{-d/2}^{x} x'\,\mathrm{d}x' = \varepsilon_0\varepsilon_r\int\limits_{-d/2}^{x}\frac{\partial E}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{23}$$

Die elektrische Feldstärke hängt von x ab: $E = E(x)$. Damit können wir den Ort x in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke schreiben. Die Substitution

$$x = x(E)\,,\quad \mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial E}\,\mathrm{d}E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^{-1}\mathrm{d}E\,, \tag{24}$$

führt dann auf:

$$\varepsilon_0\varepsilon_r\int\limits_{-d/2}^{x}\frac{\partial E}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \varepsilon_0\varepsilon_r\int\limits_{E(-d/2)}^{E(x)}\frac{\partial E}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^{-1}\mathrm{d}E = \varepsilon_0\varepsilon_r\int\limits_{0}^{E(x)}\mathrm{d}E = \varepsilon_0\varepsilon_r E(x)\,. \tag{25}$$

Also gilt

$$\frac{a}{2}\left\{x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\} = \varepsilon_0\varepsilon_r E(x)\,, \tag{26}$$

also

$$
\boxed{E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -d/2 \\ \dfrac{a}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{x^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2\right\} & \text{für} \quad -d/2 \leq x \leq d/2 \\ 0 & \text{für} \quad x > d/2 \end{cases} .} \tag{27}
$$

Eine weitere Integration bezüglich x führt zum Potential, da $E(x) = -\mathrm{d}\phi(x)/\mathrm{d}x$. Dazu müssen wir jedoch unterscheiden, in welchem Bereich auf der x-Achse wir uns befinden. Als Bezugspunkt, das heißt untere Integrationsgrenze verwenden wir immer das Potential bzw. die elektrische Feldstärke bei $x = -d/2$. Wir setzen dabei $\phi(x = -d/2) = \phi_0$.

- $x < -d/2$:

$$
\int\limits_{\phi_0}^{\phi(x)} \mathrm{d}\phi = -\int\limits_{-d/2}^{x} E(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{28}
$$

  weil $E(x) = 0$ für $x < -d/2$. Damit ist also $\phi(x) = \phi_0$.

- $-d/2 \leq x \leq d/2$:

$$
\int\limits_{\phi_0}^{\phi(x)} \mathrm{d}\phi = -\int\limits_{-d/2}^{x} E(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-d/2}^{x} \frac{a}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,, \tag{29}
$$

  also

$$
\phi(x) = \frac{a}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{2\left(\frac{d}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{d}{2}\right)^2 x - x^3\right\} + \phi_0\,. \tag{30}
$$

- $x > d/2$:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\phi_0}^{\phi(x)} \mathrm{d}\phi &= \int\limits_{-d/2}^{x} E(x')\,\mathrm{d}x' = \int\limits_{-d/2}^{d/2} E(x')\,\mathrm{d}x' + \int\limits_{d/2}^{x} E(x')\,\mathrm{d}x' = \\
&= \left[\frac{a}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{2\left(\frac{d}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{d}{2}\right)^2 x - x^3\right\} + \phi_0\right]_{x=-d/2}^{x=d/2} + 0 = \frac{2a}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{d}{2}\right)^3\,,
\end{aligned} \tag{31}
$$

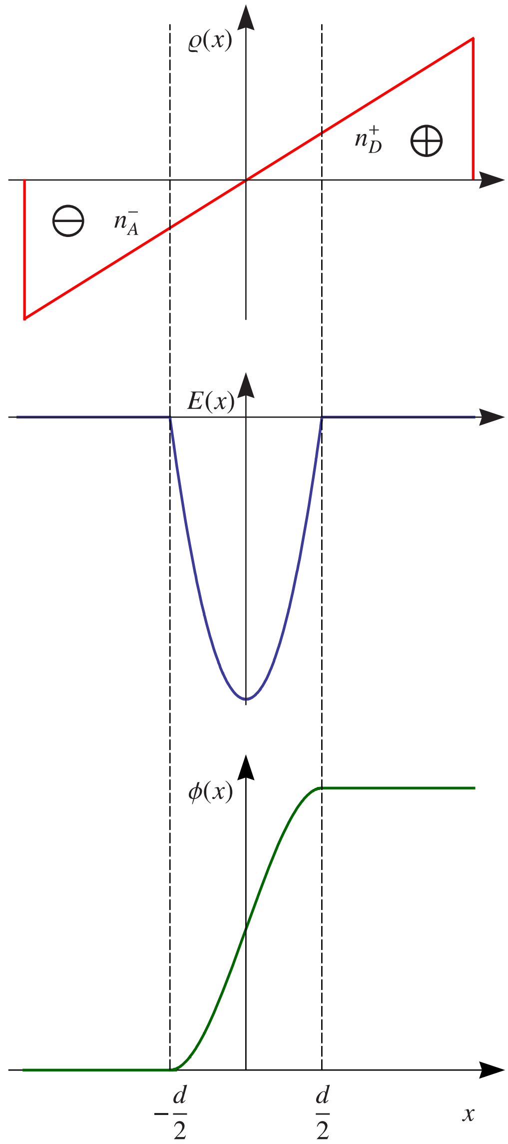
  da das elektrische Feld für $x > d/2$ verschwindet, also

$$
\phi(x) = \frac{2a}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{d}{2}\right)^3 + \phi_0\,. \tag{32}
$$

Das Potential können wir verschieben, wie wir wollen, da physikalisch nur Potentialdifferenzen gemessen werden können. Mit $\phi_0 = 0$ (Prinzip der Eichfreiheit!) gilt:

$$
\boxed{\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -d/2 \\ \dfrac{a}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{2\left(\dfrac{d}{2}\right)^3 + 3\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 x - x^3\right\} & \text{für} \quad -d/2 \leq x \leq d/2 \\ \dfrac{2a}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{d}{2}\right)^3 & \text{für} \quad x > d/2 \end{cases} .} \tag{33}
$$

Schauen wir uns das Ganze nochmal in einem Schaubild an:



e.)

Im Prinzip gibt uns das Potential die Energie an, die ein positiv geladenes Teilchen aufwenden muss, um das elektrische Feld zu durchlaufen. Die Bänder werden aber beim pn-Übergang so gezeichnet, dass die die Energie von Elektronen (also negativ geladenen Teilchen) angeben. Damit müssen wir den Potentialverlauf gerade an der ϕ-Achse spiegeln, um den Verlauf der Bänder zu erhalten!