

1.1 Diracsche δ -Funktion

Die Diracsche δ -Funktion $\delta(x)$ besitzt den Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$ und ist charakterisiert durch die folgende Eigenschaft:

$$\int_I dx \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in I \subseteq \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } x_0 \notin I \end{cases}. \quad (1.1)$$

Die δ -Funktion lässt sich als Grenzwert von Funktionenfolgen definieren. Eine Möglichkeit ist:

$$\delta(x - a) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} f_\eta(x), \quad f_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - a)^2}, \quad (1.2)$$

also über eine Lorentzkurve. In Abb. 1.1 ist der Grenzwertprozess dargestellt. Die Eigenschaften

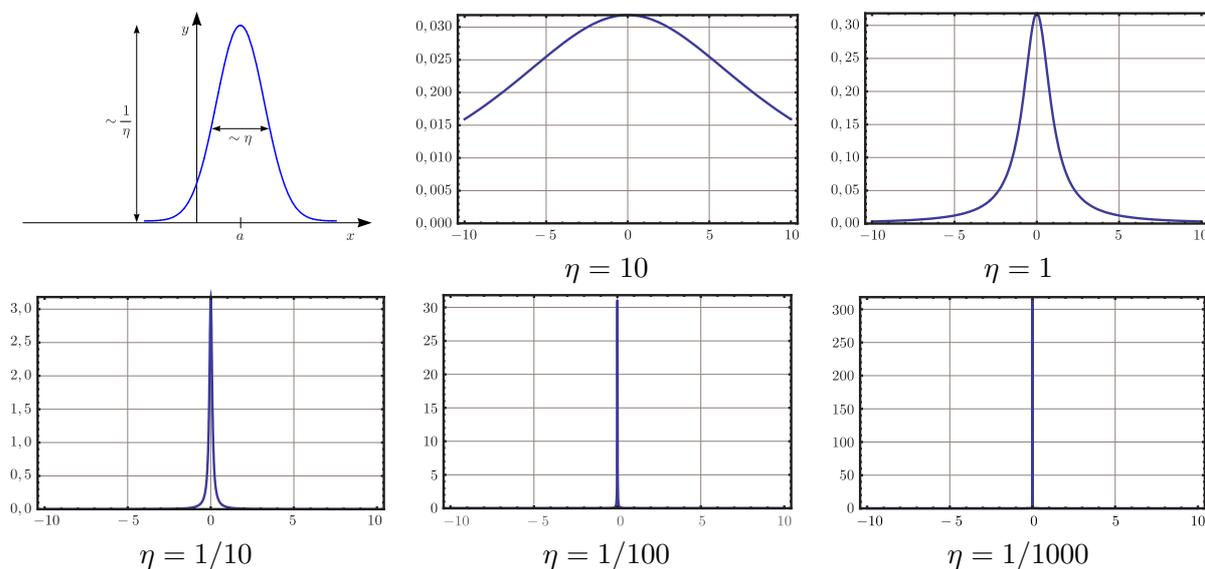


Abbildung 1.1: Lorentzkurve für verschiedene Werte von η .

der δ -Funktion sind nun:

$$1) \int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta(x - a) = \begin{cases} f(a) & \text{für } a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{für } a \notin (\alpha, \beta) \end{cases},$$

$$2) \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i),$$

wobei x_i eine einfache Nullstelle ist: $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$. Schauen wir uns nun am

Besten dazu ein Beispiel an:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) \exp(x) = \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta((x-2)(x+2)(x-3)) \exp(x) \\
 &= \int_{-2,5}^{2,5} dx \left\{ \frac{\delta(x-2)}{|3x^2 - 6x - 4|_{x=2}} + \frac{\delta(x+2)}{|3x^3 - 6x - 4|_{x=-2}} + \frac{\delta(x-3)}{|3x^2 - 6x + 4|_{x=3}} \right\} \exp(x) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x-2) \exp(x) + \frac{1}{20} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x+2) \exp(x) + \underbrace{\frac{1}{5} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x-3) \exp(x)}_{=0 \text{ da } 3 \notin [-2,5,2,5]} \\
 &= \frac{\exp(2)}{4} + \frac{\exp(-2)}{20}. \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

3) Durch partielle Integration ergibt sich die folgende Regel:

$$f(x)\delta'(x-a) = -f'(a)\delta(x-a). \tag{1.4}$$

4) Definition der Stufenfunktion:

$$\theta(x) \equiv \int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \theta(4-x^2) \exp(-x) = \int_{-2}^{+2} dx \exp(-x) = -\exp(-x)|_{-2}^{+2} = \\
 &= \exp(2) - \exp(-2) = 2 \sinh(2). \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

1.2 Skalar- und Vektorfelder

Ein **Vektorfeld** ist eine mehrdimensionale Funktion, die jedem Raumpunkt \mathbf{x} einen Vektor zuordnet. Beispielsweise ist das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv (E_1(\mathbf{x}), E_2(\mathbf{x}), E_3(\mathbf{x}))$ ein Vektorfeld. Das **Skalarprodukt** ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu und das **Vektorprodukt** einem Vektorfeld ein Vektorfeld zu. Zum Beispiel gilt für die beiden Vektorfelder \mathbf{x} und \mathbf{y} :

- Skalarprodukt: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

- Vektorprodukt: $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k \equiv \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i y_j$ mit dem antisymmetrischen ε -Tensor:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \text{ zyklisch aus } \{1, 2, 3\}, \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ antizyklisch aus } \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Berechnen wir danach beispielhaft die einzelnen Komponenten:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 = \varepsilon_{123} x_2 y_3 + \varepsilon_{132} x_3 y_2 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad (1.8a)$$

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 = \varepsilon_{231} x_3 y_1 + \varepsilon_{213} x_1 y_3 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad (1.8b)$$

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3 = \varepsilon_{312} x_1 y_2 + \varepsilon_{321} x_2 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1. \quad (1.8c)$$

Nun zu den Differentialoperatoren (siehe später für Bedeutung):

- Gradient: $\nabla \varphi$ (Skalarfeld \mapsto Vektorfeld)
- Divergenz: $\nabla \cdot \mathbf{E}$ (Vektorfeld \mapsto Skalarfeld)
- Rotation: $\nabla \times \mathbf{E}$ (Vektorfeld \mapsto Vektorfeld)
- Laplace-Operator: $\Delta \varphi \equiv \nabla \cdot \nabla \varphi$ (definiert für Skalarfelder und für Vektorfelder komponentenweise)

1.3 Taylor-Entwicklung von Feldern

1.3.1 Wiederholung: eindimensionale Taylor-Entwicklung

Eine Funktion $f(x)$ lässt sich um eine Stelle $x = x_0$ unter bestimmten Voraussetzungen in eine Taylorreihe zerlegen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (1.9)$$

Das gilt unter folgenden zwei Annahmen:

- 1) Unendliche Differenzierbarkeit: $f \in C^\infty[\mathbb{R}]$.
- 2) Die Taylorreihe gilt nur, sofern x in ihrem Konvergenzbereich liegt.

1.3.1.1 Beispiel: Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion

Gegeben: $f(x) = \sin(x)$. Gesucht ist die Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = \pi/2$. Bestimmung der Ableitungen:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad \dots \quad (1.10)$$

Ableitungen für $x_0 = \pi/2$:

$$f(\pi/2) = 1, \quad f'(\pi/2) = 0, \quad f''(\pi/2) = -1, \quad f'''(\pi/2) = 0, \quad f^{(4)}(\pi/2) = 1, \quad (1.11a)$$

$$f^{(2k)}(\pi/2) = (-1)^k, \quad f^{(2k+1)}(\pi/2) = 0. \quad (1.11b)$$

Damit können wir die Taylorreihe aufschreiben:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0)(x-x_0)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0)(x-x_0)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{24} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.3.2 Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Ebenso lässt sich die Taylorreihe von einem **skalares Feld** $\varphi(\mathbf{x}) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3)$ definieren:

$$\varphi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}^n \varphi(\mathbf{x}) = \exp(\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla) \varphi(\mathbf{x}), \quad (1.13)$$

mit dem Nablaoperator

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (1.14)$$

(siehe Impulsoperator in der Quantenmechanik)

1.3.2.1 Beispiel

Wir interessieren uns für die Taylorentwicklung von $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$. Das Schaubild beschreibt einen Berg, dessen Spitze über dem Koordinatenursprung liegt (siehe Bild im Abschnitt 1.5). In diesem speziellen Fall ist $j = 1, 2$, weil wir nur ein zweidimensionales Skalarfeld betrachten:

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0, 0) + \sum_{j=1}^2 \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^2 \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^2 \Delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} + \dots \\
& = f(0, 0) + \sum_{j=1}^2 \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \Delta x_j \Delta x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Nun zu den konkreten Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = -2x \exp(-(x^2 + y^2)) \Big|_{x=0, y=0} = 0, \tag{1.16a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = -2y \exp(-(x^2 + y^2)) \Big|_{x=0, y=0} = 0. \tag{1.16b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = [-2 \exp(-(x^2 + y^2)) + 4x^2 \exp(-(x^2 + y^2))] \Big|_{x=0, y=0} = -2, \tag{1.17a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = 4xy \exp(-(x^2 + y^2)) \Big|_{x=0, y=0} = 0, \tag{1.17b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \Big|_{x=0, y=0} = [-2 \exp(-(x^2 + y^2)) + 4y^2 \exp(-(x^2 + y^2))] \Big|_{x=0, y=0} = -2. \tag{1.17c}$$

Damit folgt:

$$\exp(-(\Delta x^2 + \Delta y^2)) = 1 - x^2 - y^2 + \dots \tag{1.18}$$

Der Berg wird an seiner Spitze also durch ein nach unten geöffnetes Paraboloid angenähert.

1.4 Flächenintegrale

1.4.1 Darstellung von Flächen

Eine Fläche ist ein zweidimensionales Gebilde im dreidimensionalen Raum. Wie wir eine solche darstellen, ist in Abb. 1.2 gezeigt.

$$F = \{\mathbf{r}(u, v) | u, v \in D\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{1.19}$$

Hierbei sind u, v die Parameter und D der Definitionsbereich.

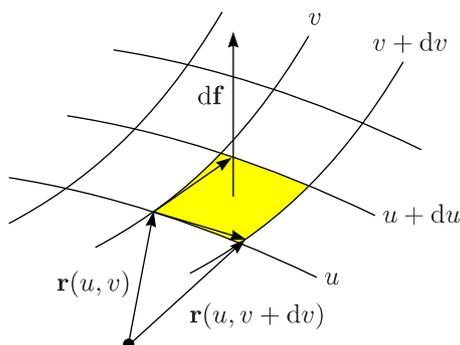


Abbildung 1.2: Darstellung einer Fläche.

1.4.1.1 Beispiele

- Darstellung einer Ebene durch die Punkte $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1)$ und $\mathbf{x}_3 = (1, 2, 3)$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)u + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} v. \quad (1.20)$$

- Darstellung einer Kugel mit Radius R :

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

1.4.2 Integrationen über Flächen

Das **orientierte Flächenelement** ist definiert durch

$$d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) dv du \equiv df \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.22)$$

Den **Fluss** des Vektorfeldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch die Fläche S ist definiert als:

$$\varphi_S[\mathbf{E}] \equiv \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{r}_i), \quad (1.23)$$

wobei $\Delta \mathbf{f}$ eine Teilfläche von S ist. Fluss durch allgemeine Flächen:

$$\varphi_S[\mathbf{E}] \equiv \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) dv du. \quad (1.24)$$

Die **Zirkulation** ist

$$Z_C[\mathbf{E}] \equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.25)$$

wobei C eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve ist.

1.4.2.1 Beispiel anhand der Einheitskugel

Wir betrachten eine Kugel mit $R = 1$ wie in Abb. 1.3. Uns interessiert das Flächenelement.

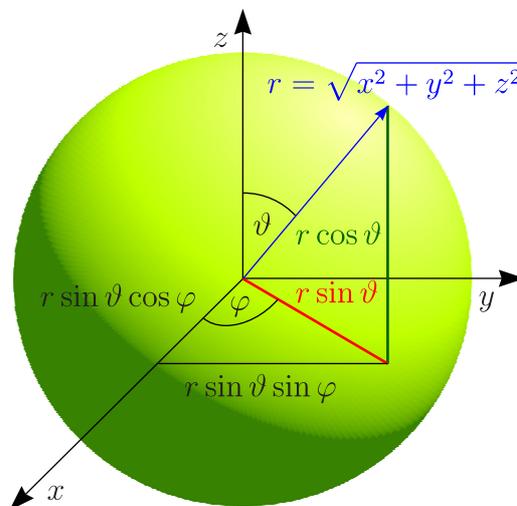


Abbildung 1.3: Darstellung einer Kugel mittels des Polarwinkels ϑ und des Azimutalwinkels φ .

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_1 &= \varepsilon_{123} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_3 + \varepsilon_{132} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_2 = \\ &= \sin \vartheta \cos \varphi \cdot (-\sin \vartheta) - 0 = -\sin^2 \vartheta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.27a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_2 &= \varepsilon_{231} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_1 + \varepsilon_{213} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_1 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_3 = \\ &= 0 - (-\sin \vartheta \sin \varphi) \cdot (-\sin \vartheta) = -\sin^2 \vartheta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.27b)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_3 = \varepsilon_{312} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_1 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_2 + \varepsilon_{321} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)_2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right)_1 =$$

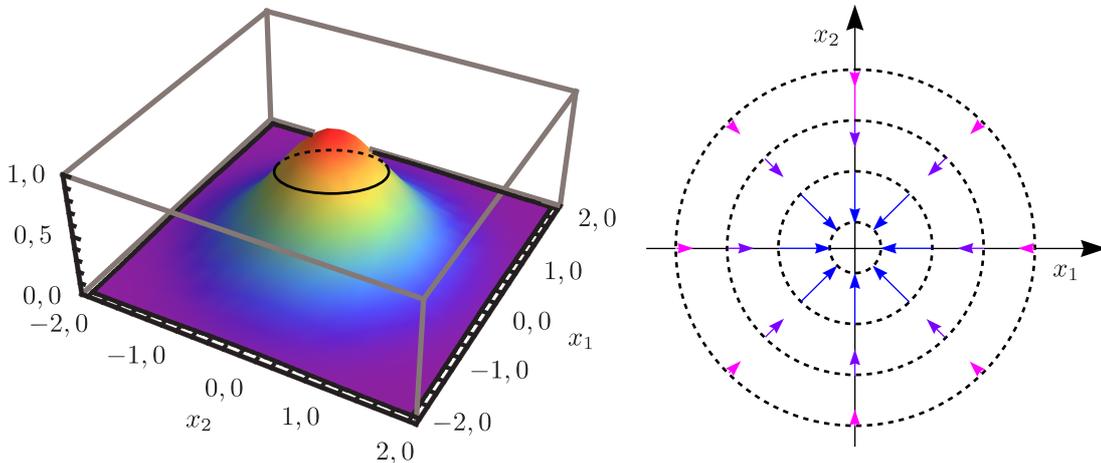
$$\begin{aligned}
&= (-\sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \cos \varphi \\
&= -\sin \vartheta \cos \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -\sin \vartheta \cos \vartheta.
\end{aligned} \tag{1.27c}$$

Daraus ergibt sich das Flächenelement:

$$d\mathbf{f} = -\sin \vartheta \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta. \tag{1.28}$$

1.5 Gradient, Divergenz und Rotation: Bedeutung

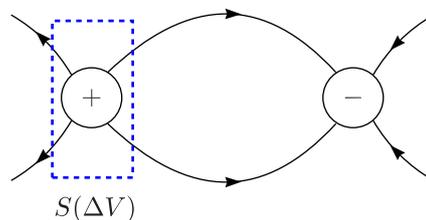
- Für ein Skalarfeld $h(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ zeigt der Gradient ∇h in Richtung des steilsten Anstiegs der Höhenlinien von h .



- Die Divergenz von \mathbf{E} , $\nabla \cdot \mathbf{E}$, ist die „mittlere Queldichte des Feldes \mathbf{E} “:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}. \tag{1.29}$$

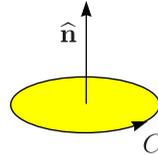
Das ist die Integraldarstellung (vergleiche Differentialdarstellung in Kapitel I.2).



Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für sogenannte Quellen und Senken, also Punkte, aus denen Feldlinien hervorgehen oder in die sie münden.

- Die Rotation von \mathbf{E} , $\nabla \times \mathbf{E}$, ist die „mittlere Flächendichte der Zirkulation“:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \lim_{F_c \rightarrow 0} \frac{1}{F_c} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.30)$$



Stellt man ein Schaufelrad in eine Flüssigkeit, deren Strömung durch ein Vektorfeld mit nicht-verschwindender Rotation beschrieben wird, so wird es sich drehen.

1.6 Integralsätze: Gauß, Stokes und Green

1) Gaußscher Satz:

Der Gaußsche Integralsatz stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes und des Integrals des Vektorfeldes über die Oberfläche des Volumens:

$$\int_V d^3r \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{S(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}. \quad (1.31)$$

Betrachten wir Anwendungen hierzu. Ist \mathbf{j} die Stromdichte (Strom pro Flächeneinheit), dann gibt das Integral

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}, \quad (1.32)$$

den Strom durch die Oberfläche S an. Dieser entspricht der negativen Änderung der Gesamtladung pro Zeit:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \varrho, \quad (1.33)$$

mit der Ladungsdichte ϱ . Daraus folgt mit dem Satz von Gauß:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int_V d^3r \text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \varrho \Rightarrow \int_V d^3r \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} \right) = 0. \quad (1.34)$$

Für ein **beliebiges** Volumen V ergibt sich die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.35)$$

2) **Greenscher Satz (1. Greensche Identität)**:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) = \oint_{\partial V} \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{f} \equiv \oint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\mathbf{f}. \quad (1.36)$$

In einem Beispiel sei $\varphi = x$ und $\psi = y$. Darüber hinaus soll die Integration über einen Würfel mit Kantenlänge 1 erfolgen. Dann gilt:

$$\Delta \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} y \right] = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.37)$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \psi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = 0. \quad (1.38)$$

Dann verschwindet auf jeden Fall die linke Seite der Gleichung. Für die rechte Seite müssen wir den Integranden für die sechs Seiten des Einheitswürfels ausrechnen. Beispielsweise gilt für die Seiten parallel zur x - y -Ebene:

$$\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\mathbf{f} = \varphi (\nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dx dy. \quad (1.39)$$

Nun gibt es nur Beiträge, wenn der Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ einer Seite nicht senkrecht auf $\nabla \psi = (0, 1, 0)$ steht. Das ist für die Seiten parallel zur x - z -Ebene der Fall. Zur ersten der beiden Seiten, die direkt in der x - y -Ebene liegt:

$$\int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz = \int_{x=0}^1 [xz]_0^1 = \int_{x=0}^1 x = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (1.40)$$

Nun zur gegenüberliegenden Seite:

$$\int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz = -\frac{1}{2}. \quad (1.41)$$

Damit heben sich auch diese beiden Beiträge weg und die rechte Seite verschwindet ebenso.

3) **Stokesscher Satz:**

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}. \quad (1.42)$$

1.7 Zerlegungs- und Eindeutigkeitsatz

Jedes Vektorfeld ist eindeutig durch sein Quellenfeld $\text{div}(\mathbf{E})$ und Wirbelfeld $\text{rot}(\mathbf{E})$ bestimmt. Sei $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Dann gilt der **Zerlegungssatz**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{E}_l = \nabla \alpha, \quad \mathbf{E}_t = \nabla \times \boldsymbol{\beta}, \quad (1.43a)$$

$$\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.43b)$$

wobei $\text{rot } \mathbf{E}_l = \mathbf{0}$ und $\text{div } \mathbf{E}_t = 0$ (bzw. $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_l = \mathbf{0}$ und $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_t = 0$ im Impulsraum).

Der **Eindeutigkeitsatz** besagt, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eindeutig festgelegt ist, wenn für \mathbb{R}^3 Quellenfeld $\text{div } \mathbf{E}$ und Wirbelfeld $\text{rot } \mathbf{E}$ bekannt sind.

1.8 Weitere Beziehungen für Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplaceoperator

Ein wichtiger Zusammenhang ist

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (1.44)$$

für die Funktion $f(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ und den Laplace-Operator $\Delta \equiv \text{div grad}$. Um das zu zeigen, benutzt man am besten Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) , wobei man den Ursprung des Koordinatensystems in \mathbf{r}_0 liegt. Dann ist $f(r) = 1/r$, hängt also nicht von irgendwelchen Winkeln ab. Dann benötigen wir nur den Anteil $\sim \hat{\mathbf{e}}_r$ vom Laplace-Operator:

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \hat{\mathbf{e}}_r + \dots \quad (1.45)$$

Dann folgt für $r \neq 0$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (1) = 0. \quad (1.46)$$

Um zu wissen, was für $r = 0$ passiert, integrieren wir den Ausdruck über eine Kugel mit Radius R um den Ursprung und benutzen den Gaußschen Satz, wobei

$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \dots \quad (1.47)$$

Also gilt mit $d\mathbf{f} = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \hat{\mathbf{e}}_r$:

$$\int_{K_R} d^3r \, \Delta \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{S(K_R)} d\mathbf{f} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \right) = \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \left(-\frac{1}{R^2} \right) = -4\pi. \quad (1.48)$$

Schließlich gelten noch die folgenden Beziehungen:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}, \quad (1.49a)$$

$$\text{div } \varphi \mathbf{E} = \varphi \text{ div } \mathbf{E} + (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{E}, \quad (1.49b)$$

$$\text{rot } \varphi \mathbf{E} = (\text{grad } \varphi) \times \mathbf{E} + \varphi \text{ rot } \mathbf{E}. \quad (1.49c)$$
